HZ BOOKS
华章经管

WILEY

| 第 1 卷 |

保罗·威尔莫特数量金融系列

数量金融

（原书第2版）

Paul Wilmott

ON QUANTITATIVE FINANCE

2ND EDITION

[美] 保罗·威尔莫特 (Paul Wilmott) 著
郑振龙 陈蓉 史若燃 等译

机械工业出版社
China Machine Press

保罗·威尔莫特数量金融系列

数量金融

（原书第2版）

ON QUANTITATIVE FINANCE

2ND EDITION

[美] 保罗·威尔莫特 (Paul Wilmott) 著　郑振龙 陈蓉 史若燃 等译

机械工业出版社
China Machine Press

图书在版编目（CIP）数据

数量金融（原书第2版·第1卷）/（美）威尔莫特（Wilmott, P.）著；郑振龙，陈蓉，史若燃等译．—北京：机械工业出版社，2015.4
书名原文：Paul Wilmott on Quantitative Finance

ISBN 978-7-111-49501-7

I. 数… II. ① 威… ② 郑… ③ 陈… ④ 史… III. 金融学－数量经济学 IV. F830

中国版本图书馆CIP数据核字（2015）第045060号

本书版权登记号：图字：01-2014-2013

Paul Wilmott. Paul Wilmott on Quantitative Finance, 2nd Edition.

Copyright © 2006 by Paul Wilmott.

This translation published under license.Simplified Chinese translation copyright © 2014 by China Machine Press.

No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or any information storage and retrieval system,without permission, in writing, from the publisher.

All rights reserved.

本书中文简体字版由John Wiley & Sons公司授权机械工业出版社在全球独家出版发行。

未经出版者书面许可，不得以任何方式抄袭、复制或节录本书中的任何部分。

本书封底贴有John Wiley & Sons公司防伪标签，无标签者不得销售。

数量金融（原书第2版·第1卷）

出版发行：机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街22号 邮政编码：100037）

责任编辑：杨 明　　责任校对：董纪丽

印　刷：北京天宇万达印刷有限公司　　版　次：2015年4月第1版第1次印刷

开　本：185mm×260mm 1/16　　印　张：22.75

书　号：ISBN 978-7-111-49501-7　　定　价：119.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

客服热线：(010) 68995261 88361066　　投稿热线：(010) 88379007

购书热线：(010) 68326294 88379649 68995259　　读者信箱：hzjg@hzbook.com

版权所有·侵权必究

封底无防伪标均为盗版

本书法律顾问：北京大成律师事务所 韩光/邹晓东

推荐序一

金融衍生品是20世纪最具革命性的金融创新，近40年来，全球金融衍生品市场发展迅猛，在高效管理风险、创造丰富投资工具与多样交易策略、创新金融产品等方面发挥了其他金融市场无法代替的作用。近年来，我国期货与衍生品市场的发展速度也在加快，沪深300股指期货、国债期货在中国金融期货交易所相继上市，上海证券交易所推出了上证50ETF期权。即使在国外，期权的出现也被称为“期权革命”，只要运用得当，其在资产配置、投资策略、风险管理乃至金融解决方案领域的应用之丰富、效果之奇妙常常令人称奇。伴随着我国经济的进一步对外开放和金融市场化改革的推进，我国的外汇期货与商品、金融等各类期权也将陆续推出，以远期、互换等交易工具和证券、信用等基础性资产为标的的场外金融衍生品市场也在迅速发展。衍生品正在成为我国各类金融机构和现货企业的重要工具，将被广泛地应用于外汇、利率、证券、大宗商品以及信用等各类基础产品的风险管理和金融创新。

现实的需求必然激发学习的热潮。然而，要想在日益复杂的衍生品市场中得心应手、游刃有余绝非易事。与期权等衍生品领域相关的学科——金融工程，被称为金融领域的“火箭科学”，其中至少涉及现代金融理论、复杂的数学知识技巧、数据处理分析技术和编程技术。大量深奥的数学知识和复杂技术的存在，使得许多人对此望而却步。进一步看，如何将这些复杂的知识与技术运用到实际市场中去，亦是一个不小的挑战。因此，对于金融工程领域的从业者和学习研究者来说，若有一本兼具理论深度和实际运用、清晰易懂的案头书籍备查，是一大幸事。

《数量金融》就是这样一套在金融工程领域难得一见的好书。作者保罗·威尔莫特博士是享誉国际的金融工程学家和金融顾问，是英国皇家学会的研

究学者，其主要研究领域是衍生品、风险管理和数量金融。他在牛津大学获得数学学士和流体力学博士学位，并进行了多年的研究工作。他创立了“数量金融证书”项目和《应用数量金融》杂志，出版了多部金融工程著作，发表了上百篇专业论文，被英国《金融时报》称为“诙谐的衍生品讲师”。他创办的网站 www. wilmott. com 在全球金融工程业界深受欢迎，主编的宽客杂志 *Wilmott* 在业界也有极大影响。书如其人，保罗·威尔莫特博士的这套《数量金融》既以简洁严谨的数学推导证明思想直觉的核心内涵，又以直观浅显的思想直觉阐释艰深复杂的数学推导，分析鞭辟入里、直击本质；既讨论复杂理论模型的基本原理，又专注于模型在实际运用中的诸多细节，让人受益匪浅；既涵盖极广，广泛涉及数学基础知识与技巧、定价原理、模型拓展、数值方法、程序实现等内容，又挖掘深入，展示金融工程问题的深刻本质与应用技巧。更难得的是，此书写作深入浅出，清晰易懂，读者略有基础就可以弄清复杂问题的来龙去脉，是一本将复杂广泛的金融工程问题讲得透彻务实的好书，值得大力推荐。

对于外文专业书籍的读者而言，译者的专业水准和表达能力至关重要。《数量金融》的中文版译者是我推荐此书的另一个重要原因。郑振龙教授和陈蓉教授带领的厦门大学金融工程团队是国内最优秀的金融工程教学和研究团队之一。作为中国金融工程学科的最初创始人之一，郑振龙教授带领团队长期潜心追踪和研究国际和国内金融工程的理论和实践动态，对复杂的金融工程问题理解透彻深入，对本质和前沿问题把握到位。不仅如此，郑振龙教授和陈蓉教授都擅长将复杂问题表达得浅显易懂，在学生和听众中享有很好的口碑。郑振龙教授和陈蓉教授主编的《金融工程》连续获评“十五”“十一五”和“十二五”国家级规划教材，郑振龙教授所讲授的本科“金融工程”被评为国家级精品课程。由于学生和听众的广泛好评，中国期货业协会多次邀请两位教授为期货公司高管和分析师授课，并专门与厦门大学金融工程研究中心合作开办多期“金融衍生品高级研修班”，为期货行业培养了数量众多的金融衍生品高端专业人才，这些专业人才在期货公司和其他金融机构的创新业务中正在大显身手。作为中国期货业协会人才发展战略规划的重要举措，这一研修班的举办在业内外受到高度评价。这样两位专家的翻译之作，值得信任与期待。

书为好书，出版恰逢其时，作者译者上佳。作为中国期货与衍生品市场发展的一名经历者，看到此书的出版，我十分高兴。由于译书不属科研成果，此次翻译整套大部头的《数量金融》，对于科研和教学任务繁重的两位教授来说，本是吃力不讨好之事。但两位教授出于对中国衍生品市场发展的拳拳之心，希望能引入与推广经典著作，促进中国金融工程高端专业人才培养。兴奋感动之余，特作序推荐此书。

李强

中国期货业协会

2015 年 3 月 9 日

推荐序二

国际金融危机爆发以来，已经过了6年多，尽管全球场内外衍生产品的活跃度远不如危机前多年那么活跃，全球场内衍生产品交易金额占全球GDP的比例从2007年40.3的峰值有所下降，但是近年来仍然保持在25上下的水平，在全球金融体系中的作用仍然重大且不容忽视。金融危机爆发后不久，国内不少人士认为：金融危机是金融衍生产品惹的祸，还好我国金融衍生产品当时并未真正起步和发展，因此不应急于发展那些易导致危机的市场。可喜的是，国内业界越来越多的同仁和专家认为金融衍生产品在金融危机前几十年都已存在，有些产品如信用违约互换在危机前后确有推波助澜的作用，但是金融衍生产品并不是金融危机的祸根；与国际金融衍生产品市场相比，金融危机前国际市场确实存在投机和炒作的问题，然而在国内很多领域作为基础风险管理工具的金融衍生产品，不是发展得太多太快，而是太少太慢，很多领域中的金融衍生品仍然处于缺位的状态。

近年来国内场内外衍生产品有了持续可观的发展。2010年我国成功推出股指期货，2014年国债期货成功恢复，2015年2月股指期权又成功推出，场内市场金融期货和期权缺位的局面有了明显的改善；场外银行间市场外汇远期交易早在2005年汇改后不久就成功推出，外汇互换、利率互换、远期利率协议、外汇期权等重要的银行间风险管理产品先后推出并达到了不同程度的活跃度。虽然目前除股指期货外其他场内外产品的市场活跃度仍有待提高，但场内外产品的丰富程度已有明显的提高。

笔者在20世纪90年代初期进入纽约金融市场时恰逢国际金融产品创新高峰。在2014年为《奇异期权》做推荐时，回顾自己初入国际金融市场时的感受，才首次联想到，20世纪80年代后期到90年代中期，国际金融创新高峰时期正好是全球最大经济体美国利率市场化的后期和当时第二大经济体日

本利率市场化结束的时期[⊖]。国际金融产品创新的高峰期与两大经济体利率市场化的进程的关系绝非偶然，因为全球金融市场最大的市场风险是利率风险。利率市场化为金融创新和风险管理提供了巨大的推动力。

党的十八届三中全会决定提出要“鼓励金融创新，丰富金融市场层次和产品”“完善人民币汇率市场化形成机制，加快推进利率市场化……加快实现人民币资本项目可兑换”；2014 年 12 月结束的中央经济工作会议又明确提出要“稳步推进人民币国际化”。利率市场化和汇率市场化是人民币国际化的前提或必要条件，也是国内债券、外汇、股市及相关风险管理市场活跃的前提。随着我国利率市场化的进一步推动和汇率市场化进一步完善，我国债券市场、外汇市场、股票市场及其相关的风险管理或衍生产品市场的丰富程度和活跃度将有显著的提升，金融创新和风险管理的需求将在今后数年步入快速发展的通道。我国对金融创新的技术、经验、管理等多方面的知识的需求也将有显著增长。

作为全球最复杂且技术含量最高的金融产品——金融衍生产品及市场的发展也当如债券、外汇、股票、商品等基础市场一样，有着自身的发展规律和发展路径。20 多年来我国学习和借鉴了国外很多领域的发展成果和经验，场内外金融衍生产品市场也不能例外。境外包括金融期货和期权在内的金融衍生产品市场经过了 40 多年的发展和演变，特别是经过了巴林倒闭、加州奥兰治县、美国长期资本管理公司等重大风险事件后，风险管理的经验逐渐积累，已发展到了相对成熟的阶段。作为全球金融市场技术含量最高的金融衍生产品的设计、定价和风险对冲也有了相对成熟的统计、数学、编程等方面的知识、技能和实践方面的积累。这些将是国内金融产品设计、定价、风险对冲和市场发展不可少的必修课。

保罗·威尔莫特先生集金融顾问、培训师、作家和软件开发者等理论与实践经验于一身，将“火箭物理学家”才能理解的相关数理知识用深入浅出、简洁易懂的方式向读者做了介绍，同时也向读者介绍了理解数量金融必须的金融概念、组合管理和具有代表性的衍生产品。作者也介绍了投资与赌博之间的各种相似和差异。本书的特点可以用理论与实际结合，参数与市场结合，

⊖ 张光平．人民币国际化和产品创新［M］．5 版．北京：中国金融出版社，2014.

产品与对冲结合这三个结合来简单概括。虽然本书简明扼要，但是要读懂仍需具备相当的数学、统计、市场等方面的基础知识，这些知识是推动国内金融创新，特别是国内金融产品设计、定价、风险对冲必需的基础知识。国内几乎所有的金融机构，特别是市场交易部门目前概无例外地在使用境外设计的产品定价、交易平台、风险管理模型等，然而却鲜有能够打开这些产品定价、交易平台和风险管理模型的“黑盒子”，因而只能知其然而不知其所以然，只能在别人多年前设计的“八阵图”内冲杀，不仅难以走出“八阵图”，更不用说要打赢“八阵图”的设计者了。《数量金融》为我们提供了打开这些“黑盒子”的基本知识和基本要素，是国内金融创新和国内金融机构及企业“走出去”在国际市场上直面市场竞争的必读物。

厦门大学金融工程团队在郑振龙教授和陈蓉教授指导下组织了一批博士和学生翻译了保罗·威尔莫特先生的《数量金融》一书，体现了厦大师生对金融工程知识的重视及对专业的认真态度。本书不仅对国内众多大专院校师生学习和研究金融工程、金融衍生产品、金融风险管理有用，而且对广大的金融从业人员开展金融创新、产品设计、风险管控也有必不可少的参考作用。

最后，值得提及的一个重要内容是学习过程中要结合国内市场的实际情况，并借鉴国外的知识和经验。记得十多年前，在国内市场仅有外汇远期结售汇等屈指可数的简单金融衍生产品的时候，国内曾经掀起学习金融工程的热潮，对后来国内金融市场的发展起到了一定的作用。然而十多年来，特别是2005年我国汇改以来，国内很多金融衍生产品从无到有，有些产品如外汇互换、利率互换、股指期货等市场已经有了较好的流动性，然而关于这些市场和产品相关实证研究却少之又少。之前国内少有或没有产品时学习只是学习别人的东西，而现在国内有了自己的产品和市场却少有人研究。由于我国利率、汇率等方面市场化程度有待进一步提高，国内产品定价和市场发展一定有与境外不同之处，这些不同之处我们只有经过实证研究才能发现，进而才能找到进一步完善国内市场的方法。尤其是近年来以人民币跨境贸易、其他经常项目、直接投资等相关结算为主的人民币国家化进程加速，境外人民币中心和业务快速发展，产品创新步伐加快。我们在学习和借鉴别人知识和经验的同时也需要结合国内产品和市场的发展来学习，结合国内利率和汇率市场化程度不断提高的进程来学习，结合人民币国际化的进程来学习，这样才

可以尽快地达到学以致用的目的。否则，国内人民币产品创新和人民币国际化相关的问题研究我们都可能落在别人的后面，从而难以有效推动市场的发展和人民币国际化的进程，让国内学者、职业人士和其他国人面临尴尬的境地。

最后，希望我们各界同仁共同学习和借鉴别人的知识与经验，共同研究和探讨国内金融创新与人民币国际化相关问题，共同为我国金融创新和人民币国际化做出应有的贡献。

张光平

上海银监局副局长

2015 年 3 月 16 日于上海

译者序

金融衍生品市场是现代金融体系的重要组成部分，主要负责风险的重新配置。它并不一定能阻止风险事件（比如经济危机）的发生，却可以让微观主体在风险事件发生时免于遭受损失。在一个完善的金融体系中，微观主体面临的任何风险（比如原材料涨价、产品价格下跌、利率上升、汇率波动、对手违约、气候变化、经济危机等），都可以通过衍生品来对冲。利用衍生品，还可以为各种宏微观问题提供解决方案，为合作双方提供求同存异的合作方案，以最大限度地发挥各个经济主体的比较优势，从而提高资源配置的效率。衍生品市场还是个信息集散地，从衍生品价格和成交量中可以提取出违约概率、相关系数、波动率、偏度、峰度等关于宏微观决策的重要信息。这种信息相对于统计信息而言，具有及时、真实、前瞻的特点，有助于提高决策的及时性、准确性和前瞻性。基于上述考虑，我国近年来也在稳步推进金融衍生品市场的发展，目前已经有股指期货、国债期货、利率互换、外汇期权、股票期权等产品。

要想熟练掌握金融衍生品的定价原理和应用技巧绝非易事。其中用到的数学知识和技巧非常复杂，有些人认为能掌握它们的只能是火箭物理学家之类的怪才，俗称宽客（quant），而相关的知识和技巧被称为金融工程（financial engineering）或数量金融（quantitative finance）。虽然冠名金融工程、数量金融或金融衍生品的书籍数量繁多，近年来仍不断有新作涌现，但大部分作品或者泛泛而谈，或者纠结于复杂的技术细节而让人望而生畏。只有保罗·威尔莫特的《数量金融》风格独特，通俗易懂，广受读者好评，其魅力经久不衰，被认为是该领域的必读书目。

该书受欢迎的一个原因是作者的传奇经历和个人魅力。保罗·威尔莫特是全球宽客领域的重量级人物。他在牛津大学获得了流体力学的博士学位，

进入数量金融领域前曾在多个行业从事过数学建模工作。他在数量金融领域发表了众多有影响力的学术论文，出版了许多重要教材，以其名字命名的杂志和论坛让万千从业人员和学者拥有了接触最新宽客技术和相互交流的平台。他主持的牛津大学“数理金融”项目和“数量金融认证”项目培养了大量的相关人才，是业界公认专业性最高的数量金融和金融工程的培训项目。最令人乐道的是他幽默风趣的讲述技巧和直击要害的洞察力，这些都在本套图书中得到了淋漓尽致的体现。

但本书不得不读或不得不备的最重要的理由还是其内容和风格的不可替代性。本书有三个显著的特点。第一个特点是既易懂又深刻，作者总是能以最简洁直接和清晰易懂的方式直击问题的本质，让读者不必具备火箭物理学家的头脑就可以明白复杂问题的来龙去脉。作为金融工程领域的专业学者和教育工作者，我们在翻译时深刻感受到，只有对金融与数学融汇贯通并对如何与读者沟通下了极大的工夫才能做到这一点。第二个特点是涵盖面广，本书涵盖了金融工程与数量金融领域可能涉及的大多数问题，并结合大量实际市场中的产品进行分析。既介绍了许多在学术界也尚在探索的高级模型，又囊括了许多在实际应用当中容易忽略却很重要的处理细节，是一套很好的案头备查书籍。第三个特点是实践性强，作者坚持以实际应用为导向的方式写作，试图引导读者自行思考解决问题的方法，并鼓励读者根据实际中遇到的问题灵活运用相关原理和知识，真正做到授人以渔。

由于所涉甚广，本书共分为 3 卷：第 1 卷介绍了金融衍生品定价的一些基本原理和需要用到的最简单的数学知识，第 2 卷介绍了大量不同类型的金融衍生产品和定价中可能遇到的特殊问题，第 3 卷介绍了许多更复杂的高级模型和实际定价的数值方法和程序。

本套书的主要读者对象为金融工程、数理金融、衍生品、宽客等领域的理论研究者和实务工作者。中国的衍生品市场蓄势待发，新的金融时代正在走近。如果你想在金融工程领域立足，理解相关领域的各类问题，并在未来的日子里有一个备查的重要资料来源，我们强烈建议你阅读并收藏这套书籍。

正如你们所见，本书是个大部头。我们的翻译团队来自厦门大学金融工程团队，第 1 卷的译者为郑振龙教授、陈蓉教授、史若燃博士、姚育婷、郭媛媛、郭博洋、唐易青和陈惠民，第 2 卷的译者为郑振龙教授、陈蓉教授、

陈焕华博士、李骅、洪集民、季锋、于爱颖、陈金钊和秦明，第3卷的译者包括郑振龙教授、陈蓉教授、刘杨树博士、邱紫华、郑国忠、王宜峰、江政雲、王忧、林晓鹏、姚莲莲、吴玮煌、王宏和贺晨。每册书先由金融工程硕士生、博士生初译，再由每册图书的第3名译者初校并修改，最后由两位教授（以郑振龙教授为主）逐字检查校对修改，共历时9个月。感谢每一个参与者的付出与努力，感谢机械工业出版社编辑的辛勤工作。

在翻译过程中，我们已经尽了最大努力，力求把原文忠实、清晰、简洁、达意地译成中文。由于本书难度较大，专业性较强，若有不当之处敬请读者见谅，欢迎沟通。

译者

2014年12月1日

第 2 版前言

这个版本相对于第 1 版来说有了相当大的升级和拓展。一如既往，书中内容以反映我本人的兴趣与见解为主。在两个版本之间的这段日子里，金融市场的规模越来越大，建模者可以运用的工具包越来越多，而我的腰围也变得越来越粗。从个人角度来说，我已经在实际操作领域投入了与在独立研究领域一样长的时间。那么很自然地，我将会在这个版本中引入许多新的材料，这些材料一方面能体现我作为科学家对模型精确性的要求，另一方面也能体现我作为实际操作者对模型高速、稳健且简明易懂的需要。正如我之前所说的，本书具有强烈的个人色彩。由于数量金融领域的主题一贯以来都是飞速变化的，我建议读者在本书学习过程中补充阅读我推荐的各种拓展阅读。

我想再次感谢在第 1 版序中致谢的人：Arefin Huq、Asli Oztukel、Bafkam Bim、Buddy Holly、Chris McCoy、Colin Atkinson、Daniel Bruno、Dave Thomson、David Bakstein、David Epstein、David Herring、David Wilson、Edna Hepburn-Ruston、Einar Holstad、Eli Lilly、Elisabeth Keck、Elsa Cortina、Eric Cartman、Fouad Khennach、Glen Matlock、Henrik Rassmussen、Hyungsok Ahn、Ingrid Blauer、Jean Laidlaw、Jeff Dewynne、John Lydon、John Ockendon、Karen Mason、Keesup Choe、Malcolm McLaren、Mauricio Bouabci、Patricia Sadro、Paul Cook、Peter J¨ackel、Philip Hua、Philipp Sch¨onbucher、Phoebus Theologites、Quentin Crisp、Rich Haber、Richard Arkell、Richard Sherry、Sam Ehrlichman、Sandra Maler、Sara Statman、Simon Gould、Simon Ritchie、Stephen Jefferies、Steve Jones、Truman Capote、Varqa Khadem 和 Veronika Guggenbichler。

同时，我也想感谢以下人员。首先是我在各个项目中的合伙人：7 City 项目的 Paul 和 Jonathan Shaw，感谢他们无与伦比的奉献和他们对新项目的构想；Riaz Ahmad 和 Seb Lleo 对数量金融证书项目的帮助十分成功，分担了

我许多的任务。然后是与杂志相关的各位，尤其是 Aaron Brown、Alan Lewis、Bill Ziemba、Caitlin Cornish、Dan Tudball、Ed Lound、Ed Thorp、Elie Ayache、Espen Gaarder Haug、Graham Russel、Henriette Prast、Jenny McCall、Kent Osband、Liam Larkin、Mike Staunton、Paula Soutinho 和 Rudi Bogni。我感到十分幸运且感激 John Wiley&Sons 出版公司，他们对被认为十分古怪的计划也给予了支持；感谢 Ron Henley，他真是每个宽客做梦都想得到的对冲基金合伙人。“It's just a jump to the left. And then a step to the right”。[⊖]还要感谢 Fulcrum 的 John Morris，带给我一段有趣的时光；也感谢纳西姆·塔勒布，我们之间有过一些有趣的谈话。

感谢 John、Grace、Sel 和 Stephen，他们不厌其烦地向我灌输着他们的价值观念，始终给予我有力的帮助。感谢 Oscar 和 Zachary，让我在一系列不幸的事件中能时刻保持理智。

最后，作为她的头号粉丝，我要感谢我的头号粉丝——Andrea Estrella!

⊖ 该句来自 1973 年脍炙人口的摇滚歌曲 *The Time Warp* 的歌词，此歌之后改编成电影《洛基恐怖秀》(*The Rocky Horror Picture Show*) 与同名舞台剧。这个系列已经形成特有的以怪诞变性装扮和万圣节狂欢为主题的狂欢文化。此处应是作者向 Ron Henley 致谢并回味两人共同度过的欢乐时光。——译者注

我在手背上写的漫画出现时，表示文中有值得注意的内容。这可以是一个金融原理、一个公式或者一个概念等。

我在打领结的漫画出现时，表示文中正在展示某种东西的实际应用。这可以是一个数值算法或者一个电子制表软件等。

举起大拇指的漫画表示我的肯定态度。我有时会表达对一个普通技术的肯定，有时会表达对一个全新概念的肯定。

我耸肩的漫画出现时，表示我并不确定所讨论的对象是否可靠，甚至我可能反对它。也许数据可以体现出某个模型是有问题的。

全书简明目录

第 1 卷

第一部分　数理与金融基础、 衍生品基本理论、 风险与收益

第 1 章　产品和市场

第 2 章　衍生品

第 3 章　资产的随机行为

第 4 章　基本的随机微积分

第 5 章　布莱克 - 斯科尔斯模型

第 6 章　偏微分方程

第 7 章　布莱克 - 斯科尔斯期权定价公式和“希腊字母”

第 8 章　布莱克 - 斯科尔斯世界的简单拓展

第 9 章　提前执行与美式期权

第 10 章　概率密度函数和首次退出时间

第 11 章　多资产期权

第 12 章　如何进行 Delta 对冲

第 13 章　固定收益证券和分析：收益率、久期和凸性

第 14 章　互换

第 15 章　二叉树模型

第 16 章　正态近似的准确性

第 17 章　从黑杰克和赌博学到的投资经验

第 18 章　投资组合管理

第 19 章　在险值

第 20 章　预测市场

第 21 章　一个交易游戏

第 2 卷

第二部分　奇异合约及路径依赖

第 22 章　奇异及路径依赖衍生品导论
第 23 章　障碍期权
第 24 章　强路径依赖衍生品
第 25 章　亚式期权
第 26 章　回溯期权
第 27 章　衍生品和随机控制
第 28 章　各种各样的奇异衍生品
第 29 章　股权和外汇类产品的说明书

第三部分　固定收益的建模和衍生品

第 30 章　单因子利率建模
第 31 章　收益率曲线拟合
第 32 章　利率衍生品
第 33 章　可转债
第 34 章　按揭支持证券
第 35 章　多因子利率建模
第 36 章　瞬时利率的实证表现
第 37 章　HJM 和 BGM 模型
第 38 章　固定收益产品说明书

第四部分　信用风险

第 39 章　公司价值和违约风险
第 40 章　信用风险简介
第 41 章　信用衍生品
第 42 章　RiskMetrics 和 CreditMetrics
第 43 章　CrashMetrics
第 44 章　衍生品灾难案例

第 3 卷

第五部分　进阶主题

第 45 章　金融建模
第 46 章　布莱克 - 斯科尔斯模型的缺陷
第 47 章　离散对冲
第 48 章　交易成本
第 49 章　波动率模型概述
第 50 章　确定性波动率曲面
第 51 章　随机波动率
第 52 章　不确定参数
第 53 章　波动率经验分析
第 54 章　随机波动率和均值 - 方差分析
第 55 章　波动率的渐近分析
第 56 章　波动率案例学习：棘轮期权
第 57 章　跳跃扩散
第 58 章　崩盘模型
第 59 章　用期权进行投机
第 60 章　静态对冲
第 61 章　流动性不足市场中对冲的反馈效应
第 62 章　效用理论
第 63 章　美式期权及相关问题的拓展讨论
第 64 章　红利建模高级方法
第 65 章　收益的序列自相关
第 66 章　连续时间资产配置
第 67 章　崩盘风险下的资产配置
第 68 章　无概率利率建模
第 69 章　衍生品定价与最优对冲：无概率模型（续）

第 70 章　无概率利率模型拓展
第 71 章　通货膨胀建模
第 72 章　能源衍生品
第 73 章　实物期权
第 74 章　寿险保单结算与保单贴现
第 75 章　发放奖金的时间

第六部分　数值方法与程序

第 76 章　数值方法概述
第 77 章　单因子模型的有限差分法
第 78 章　单因子模型的有限差分法进阶
第 79 章　两因子模型的有限差分法
第 80 章　蒙特卡罗模拟
第 81 章　数值积分
第 82 章　有限差分程序
第 83 章　蒙特卡罗程序
附录 A　你所需要的所有数学知识 （一份执行摘要）
附录 B　Visual Basic 计算机代码

注：原书所附光盘内容请见华章公司网站：http://www.hzbook.com。

目 录

推荐序一/李 强

推荐序二/张光平

译者序

第 2 版前言

全书简明目录

第一部分 数理与金融基础、衍生品基本理论、风险与收益

第 1 章 产品和市场 4

1.1 引言 4

1.2 货币的时间价值 5

1.3 股权 7

1.4 商品 12

1.5 货币 12

1.6 指数 14

1.7 固定收益证券 15

1.8 保值债券 16

1.9 远期和期货 17

1.10 总结 19

第 2 章 衍生品 21

2.1 引言 21

2.2 期权 22

2.3 常用定义 24

2.4 回报图 25

2.5 卖空期权 29

2.6 保证金 30

2.7 市场惯例 30

2.8 期权到期前的价值 31

2.9 影响衍生品价格的因素 32

2.10 投机和杠杆 33

2.11 提前执行 34

2.12 看跌看涨平价 34

2.13 二值期权或数字期权 36

2.14 牛市差价组合和熊市差价组合 37

2.15 跨式组合和宽跨式组合 38

2.16 风险逆转组合 40

2.17 蝶式差价组合和鹰式差价组合 41

2.18 差期组合 41

2.19 长期股票参与证券和灵活场内期权 41

2.20 权证 42

2.21 可转债 42

2.22 场外期权 42

2.23 总结 44

第 3 章 资产的随机行为 45

3.1 引言 45

3.2 常见的“分析”范式 45
3.3 为什么我们需要为随机性建模：Jensen 不等式 46
3.4 股票、货币、商品和指数之间的相似之处 48
3.5 分析收益率 49
3.6 时间刻度 52
3.7 估计波动率 55
3.8 电子表格中的随机游走 56
3.9 维纳过程 57
3.10 股票、货币、商品和指数普遍认可的模型 58
3.11 总结 59

第4章 基本的随机微积分 60

4.1 引言 60
4.2 一个具有启发性的例子 61
4.3 马尔科夫性质 62
4.4 鞅性质 62
4.5 二次变差 62
4.6 布朗运动 63
4.7 随机积分 64
4.8 随机微分方程 65
4.9 均方离差极限 66
4.10 随机变量函数和伊藤引理 67
4.11 伊藤引理的解释 69
4.12 伊藤引理和泰勒级数 70
4.13 多维的伊藤引理 72
4.14 一些相关的例子 73
4.15 总结 77

第5章 布莱克－斯科尔斯模型 78

5.1 引言 78
5.2 一个非常特殊的组合 79
5.3 消除风险：Delta 对冲 80
5.4 无套利 81
5.5 布莱克－斯科尔斯方程 81
5.6 布莱克－斯科尔斯假设 84
5.7 终值条件 85
5.8 分红股票的期权 86
5.9 货币期权 86
5.10 商品期权 86
5.11 期货期权 87
5.12 推导布莱克－斯科尔斯方程的其他方法 87
5.13 总结 88

第6章 偏微分方程 89

6.1 引言 89
6.2 布莱克－斯科尔斯方程的前世今生 89
6.3 布莱克－斯科尔斯方程中各项的含义 90
6.4 边界和初值/终值条件 91
6.5 一些求解方法 92
6.6 相似性化简 95
6.7 其他分析技术 96
6.8 数值解法 96
6.9 总结 96

第 7 章　布莱克－斯科尔斯期权定价公式和“希腊字母”　97

7.1　引言　97
7.2　看涨期权、看跌期权和简单数值期权的公式推导　98
7.3　Delta　107
7.4　Gamma　109
7.5　Theta　111
7.6　Speed　112
7.7　Vega　113
7.8　Rho　115
7.9　隐含波动率　116
7.10　不同类型的对冲　119
7.11　总结　123

第 8 章　布莱克－斯科尔斯世界的简单拓展　125

8.1　引言　125
8.2　红利、国外利率和持有成本　125
8.3　红利结构　126
8.4　分红和无套利　127
8.5　除息时刻前后期权价值的表现　127
8.6　商品　129
8.7　融券和回购　131
8.8　时变参数　133
8.9　幂期权的公式　135
8.10　对数合约　135
8.11　总结　136

第 9 章　提前执行与美式期权　137

9.1　引言　137
9.2　永续美式看跌期权　138
9.3　付红利的永续美式看涨期权　141
9.4　针对一般回报形式的数学公式　142
9.5　常红利率看涨期权的局部解　145
9.6　其他红利结构　146
9.7　一触即付期权　146
9.8　美式合约的其他特征　148
9.9　其他问题　150
9.10　总结　153

第 10 章　概率密度函数和首次退出时间　155

10.1　引言　155
10.2　转移概率密度函数　156
10.3　随机游走的三叉树模型　156
10.4　前向方程　157
10.5　稳态分布　159
10.6　后向方程　159
10.7　首次退出时间　161
10.8　首次退出时间的累积分布函数　161
10.9　预期首次退出时间　162
10.10　最优停时的另一个例子　163
10.11　期望与布莱克－斯科尔斯　164
10.12　一个常见误解　165

10.13 总结 166

第 11 章 多资产期权 168

11.1 引言 168
11.2 多维对数正态随机游走 169
11.3 度量相关性 170
11.4 多项标的资产的期权 171
11.5 支付红利资产的欧式非路径依赖期权的定价方程 172
11.6 用资产换取资产：一个近似解 172
11.7 双币种期权 174
11.8 两个例子 176
11.9 其他特征 178
11.10 为篮子期权定价的事实 178
11.11 对篮子期权进行套期保值的事实 179
11.12 相关性与协整 180
11.13 总结 180

第 12 章 如何进行 Delta 对冲 181

12.1 引言 181
12.2 如果隐含波动率和真实波动率不一样，将会发生什么 182
12.3 隐含波动率与真实波动率：Delta 对冲应该使用哪个波动率 184
12.4 案例 1：使用真实波动率 σ 对冲 184
12.5 案例 2：使用隐含波动率 $\bar{\sigma}$ 对冲 187
12.6 隐含波动率对冲时的利润 194
12.7 隐含波动率随机情况下的对冲 197
12.8 隐含波动率的特征 199
12.9 总结 201
附录 12A 各结论的推导 202

第 13 章 固定收益产品和分析：收益率、久期和凸性 208

13.1 引言 208
13.2 简单固定收益合约和特征 209
13.3 国际债券市场 212
13.4 应计利息 212
13.5 天数计算惯例 213
13.6 连续复利和离散复利 213
13.7 收益率衡量 214
13.8 收益率曲线 216
13.9 价格/收益率关系 216
13.10 久期 217
13.11 凸性 219
13.12 例子 220
13.13 对冲 221
13.14 时变利率 222
13.15 离散支付的息票 223
13.16 远期利率和靴襻法 223
13.17 插值 227
13.18 总结 227

第 14 章　互换　229

14.1　引言　229
14.2　香草利率互换　229
14.3　比较优势　231
14.4　互换曲线　233
14.5　互换和债券的关系　234
14.6　靴襻法　235
14.7　互换合约的其他特征　236
14.8　其他类型的互换　237
14.9　总结　238

第 15 章　二叉树模型　239

15.1　引言　239
15.2　股票价格会涨也会跌　240
15.3　期权价值　242
15.4　“模型”的哪部分是我们不需要的　244
15.5　为什么“理论价格”必须是“市场价格”　244
15.6　我怎么知道对冲应卖出 1/2 单位股票　245
15.7　如果利率不为 0，价格会怎么变化　246
15.8　股票本身有被正确定价吗　247
15.9　完全市场　248
15.10　现实世界和风险中性世界　249
15.11　使用符号来表达　251
15.12　期权的定价方程　253
15.13　概率 p 哪去了　255
15.14　违背直觉　256
15.15　二叉树　256
15.16　资产价格分布　257
15.17　二叉树倒推定价　257
15.18　二叉树模型的编程　260
15.19　希腊字母　261
15.20　提前执行　263
15.21　连续时间的极限　265
15.22　在二叉树模型、布莱克－斯科尔斯方程和“其他”世界中的无套利　265
15.23　总结　266
附录 15A　另一个参数化方法　268

第 16 章　正态近似的准确性　270

16.1　引言　270
16.2　为什么我们喜欢正态分布：中心极限定理　270
16.3　正态分布和对数正态分布　271
16.4　正态分布的尾部肥厚吗　272
16.5　不同分布的估计情况　273
16.6　序列自相关　274
16.7　总结　274

第 17 章　从黑杰克和赌博学到的投资经验　276

17.1　引言　276
17.2　黑杰克的规则　277
17.3　战胜庄家　278
17.4　黑杰克赌局中利润的分布　281

17.5 Kelly 准则 281
17.6 你可以赢得轮盘赌吗 285
17.7 赌马和无套利 286
17.8 无套利 287
17.9 如何下注 289
17.10 总结 291

第 18 章 投资组合管理 293

18.1 引言 293
18.2 多样化 294
18.3 现代投资组合理论 295
18.4 我该站在有效边界的哪个位置 298
18.5 马科维茨在实践中的运用 299
18.6 资本资产定价模型 300
18.7 多指数模型 302
18.8 协整 302
18.9 绩效度量 304
18.10 总结 305

第 19 章 在险值 306

19.1 引言 306
19.2 在险值的定义 306
19.3 单个资产的在险值 307
19.4 投资组合的在险值 309
19.5 衍生品的在险值 309
19.6 模拟 313
19.7 在险值在业绩评价中的应用 316
19.8 极值理论的介绍 316
19.9 一致性 317
19.10 总结 318

第 20 章 预测市场 319

20.1 引言 319
20.2 技术分析 320
20.3 波浪理论 327
20.4 其他分析方法 328
20.5 市场微观结构建模 329
20.6 危机预测 330
20.7 总结 330

第 21 章 一个交易游戏 332

21.1 引言 332
21.2 目的 332
21.3 游戏目标 332
21.4 游戏规则 333
21.5 注释 334
21.6 如何填写交易表 334

第一部分

数理与金融基础，衍生品基本理论、风险与收益

本书第一部分包括衍生品理论的基础与应用，同时研究股票和固定收益证券。我将介绍对冲和无套利的重要概念，大部分复杂的金融理论均建立在这些概念的基础之上。对于最初在赌博中体现出的一些理念，我们将把握其中的本质思想并将它转化成风险与回报的分析方法。

第一部分中的各种假设条件、关键概念以及结论共同组成了众所周知的“布莱克－斯科尔斯世界”——以费希尔·布莱克和迈伦·斯科尔斯两人之名命名。他们两人与罗伯特·默顿一起构建了布莱克－斯科尔斯世界。经历些许阻碍之后，最初的成果发表于1973年（经典方程最初在1969年写出）。1997年迈伦·斯科尔斯和罗伯特·默顿被授予诺贝尔经济学奖，而费希尔·布莱克已于1995年8月去世。1997年10月15日的《纽约时报》写道：“两位北美学者昨日赢得诺贝尔经济学奖。他们的成果令投资者能对所投资的期货精确定价。这个巨大的突破激励了金融市场自20世纪70年代以来爆炸式的发展，在日常的经济中也扮演着意义深远的角色。”

第一部分是独立的，除基本的微积分之外并不需要多少金融背景知识。

第1章：产品和市场　对金融市场和金融产品原理的概述。像这样的章节是必需的。然而，可能会形成两个阵营，他们或者已经掌握本章中的所有内容甚至非常多的其他内容，或者几乎一点金融都不理解，在后一种情况下，本章的内容可能还不够多。

第2章：衍生品　对期权、期权市场、市场规则的介绍。介绍了常见术语、简单无套利、看跌看涨期权平价以及基本交易策略的定义。

第3章：资产的随机行为　通过对不同金融变量数据的考察，推导出一个价

格随机行为的模型。几乎所有高深的金融理论都假设价格是随机的，问题在于如何为随机性建立模型。

第 4 章：基本的随机微积分 我们将需要一些理论来使用我们的随机变量。我会保持理论需求的最小化。关键的概念是伊藤引理，我会试图用最容易被接受的方法来介绍它。

第 5 章：布莱克 - 斯科尔斯模型 我会展示关于股票、外汇以及商品期权公平价值的经典模型。在本章中我将描述 Delta 对冲和无套利以及它们如何确定期权的唯一价格。这是大多数数量金融理论的基础，我将以这个为基础来构建本书的大部分内容，但不是全部内容。

第 6 章：偏微分方程 偏微分方程在大多数物理应用数学中扮演着重要的角色，它也在金融学中起着重要的作用。大多数接受过物理科学、工程学和应用数学的读者会认同得到了偏微分方程就几乎得到了“答案”，这两者顶多是在计算机程序中有区别。如果你不确定这种联系，那么我希望你在阅读本书时坚持下来。这需要你的一点信念，你可能不得不通读本书两次：我不得不把真正的“答案”移到本书的最后几章。

第 7 章：布莱克 - 斯科尔斯期权定价公式和“希腊字母” 通过布莱克 - 斯科尔斯偏微分方程，我们能找到一些关于期权价格的方程。期权价格对变量和参数的导数对套期保值来说是非常重要的。我会介绍它们中最重要的一些以及运用的方法。

第 8 章：布莱克 - 斯科尔斯世界的简单拓展 布莱克 - 斯科尔斯世界的一些假设限制可以适当放松。我会描述其中几种情况，后面的章节会致力于更一般化的拓展。

第 9 章：提前执行与美式期权 提前执行在金融上是非常重要的，它也十分具有数学趣味。这两个方面我都会进行解释。

第 10 章：概率密度函数和首次退出时间 金融变量的随机性意味着我们不能确切地说未来将持有什么。因此，我们需要能够用概率的思想描述这种未来。

第 11 章：多资产期权 另一个对基础布莱克 - 斯科尔斯世界概念化的简单拓展是考虑基于多种资产的期权。理论上很简单，这种拓展在实际操作中面临着其独特的问题。

第 12 章：如何进行 Delta 对冲 不是每个人都相信无套利思想，即没有免费的午餐。在本章中我们会看到，如果我们对未来波动性具有优于市场的预测我们

将如何获利。

第 13 章：固定收益产品和分析：收益率、久期和凸性　本章是对市场中经常用到的简单技术与分析方法的介绍。特别地，我将解释收益率、久期和凸性的概念。在本章以及下一章中，我假设利率是一个已知的、确定的变量。

第 14 章：互换　利率互换非常常见，并且具有很高的流动性。我将解释互换的基础，并将固定利率债券定价同互换定价联系起来。

第 15 章：二叉树模型　期权理论如此成功的一个原因是它可以在没有复杂数学公式的情况下很简单地被解释并应用。二叉树模型仅仅运用基础算数，是能解释期权理论背后思想的最简单的方法。这很棒，对吗？是的，但是你必须记住，这个模型仅仅用于证明，它并不是真实存在的。作为金融领域中的一个模型它太过简单，作为一个定价的概念它不够优雅以至于大家更偏好于其他的方法，作为一个数值图解它也过于陈旧。使用一次之后把它扔掉，这是我的建议。

第 16 章：正态近似的准确性　金融理论中一个主要的假设是回报率服从正态分布，在本章我们将会了解为什么我们做出这个假设以及它到底有多么优秀。

第 17 章：从黑杰克和赌博学到的投资经验　我们从赌博这个不无关系的领域获取领悟和灵感，帮助我们处理风险、回报和现金/风险的管理。

第 18 章：投资组合管理　如果你愿意承担风险你将怎样投资？我将解释现代资产组合理论以及资本资产定价模型的经典思想。

第 19 章：在险值　你的组合有多大风险？如果出现一个不利的市场变动你可能会损失多少？这些是本章的主题。

第 20 章：预测市场　尽管几乎所有的经典金融理论假设资产随机波动，但许多交易员仍依靠技术指标预测资产的未来走势。这些指标可以是对资产价格路径进行简单的几何构建抑或是较为复杂的演算。这里的假设是，未来短期内资产价格的变动信息会包含在历史价格中。所有的交易员都时不时地运用技术指标。在本章中我将描述一些常用的技术。

第 21 章：一个交易游戏　本书的大多数读者将不会交易比棒球卡更复杂的东西。为了让读者从一个具体的角度进入这个主题，我列举了一些基于买卖衍生品来组织你自己的交易游戏的建议。在写作本章的过程中我得到了大卫·埃普斯特恩的许多帮助，他玩这种游戏已经好几年了。

第 1 章

产品和市场

本章内容

- 货币的时间价值
- 股权、商品、货币和指数的介绍
- 固定利率和浮动利率
- 远期和期货
- 金融理论的主要基石之一：无套利

1.1 引言

本章将对金融学做一个非常简要的介绍，主要是对金融市场中常见的定义和规范进行汇总。本章几乎没有技术性的内容，而仅有的一个技术性概念——“货币的时间价值”，也相当简单。另外，我将给出“无套利”的第一个例子。“无套利”很重要，是衍生品理论基础的一部分。读者可以根据自己的知识背景来选择是否认真地读完或直接略过本章，比如初涉金融领域的数学家可能会比金融从业者更多地把时间花在这部分。

1.2 货币的时间价值

金融学中最简单的概念是**货币的时间价值**（time value of money）：今天1美元的价值比一年后1美元的价值高。这归因于一年内所有我们可以利用这1美元做的事情。最差的选择是，我们可以把它藏在床垫底下，一年后拿出来；若不放在床垫底下，可以选择投资一座金矿或一家新的公司；如果觉得投资太冒险，还可以把钱借给愿意承担风险的人，未来他会还给我们本金以及额外的一些钱——**利息**（interest）。这就是银行做的事：借你的钱然后以各种风险方式投资，同时通过分散投资来降低总风险。银行通过向许多人借钱，能以普通人无法做到的方式进行投资。通常，各银行会通过提供高利率来争夺储户资金，但自由市场的存在以及储户快速、低成本地变更存款银行的能力会使得各银行的存款利率趋于一致。

这里用 r 表示利率，虽然利率会随时间改变，但我暂且假设利率是一个常数。我们接下来会讨论几种不同类型的利率。首先，利率有**单利**（simple interest）和**复利**（compound interest）两种基本类型。在单利下投资者收到的利息仅仅基于投资者的初始投资，而在复利下投资者还会获得利息的利息。可见，复利是关联性的一个主要例子。复利有两种存在形式：**离散复利**（discretely compounded）和**连续复利**（continuously compounded）。下面将介绍它们的运作机制。

假设我在银行存入1美元，利率为 r，且每年付一次利息。一年后我的银行账户余额为

$$1\times(1+r)$$

如果利率是10%，一年后我将获得1美元10美分。两年后我将获得

$$1\times(1+r)\times(1+r)=(1+r)^2$$

也就是2美元21美分。n 年后，我将获得 $(1+r)^n$。以上是离散复利的示例。

现在假设每年复利 m 次并且每期依照利率 r/m 支付。一年后我将获得

$$\left(1+\frac{r}{m}\right)^m \tag{1-1}$$

假设利息支付频率逐渐增加，则每期支付的利率逐渐减小。我将取极限 $m\to\infty$，这会导致利息是连续支付的。式（1-1）变为

$$\left(1+\frac{r}{m}\right)^m = \mathrm{e}^{m\log\left(1+\frac{r}{m}\right)} \sim \mathrm{e}^r$$

当 r/m 非常小时，这是一个简单的泰勒级数的应用。这就是在连续复利下一年后我的银行存款余额。同理，t 年后将获得

$$\mathrm{e}^{rt} \tag{1-2}$$

如果没有特殊说明，本书所涉几乎所有利率均假设为连续复利。

另一个获得式（1-2）的方法是通过微分方程。假设在 t 时刻我的银行存款为 $M(t)$，那么一天后它将增加多少呢？如果在 t 时刻查询一次总额，一小段时间后，在 $t+\mathrm{d}t$ 时刻再查询一次，会发现这段时间内存款总额的增加额为：

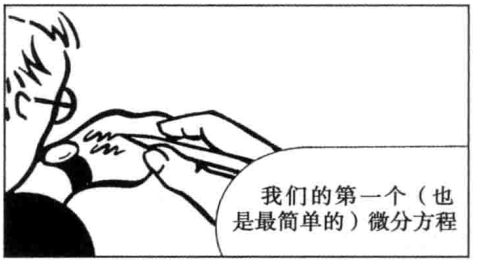
$$M(t+\mathrm{d}t) - M(t) \approx \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t + \cdots$$

其中，等式右边通过对 $M(t+\mathrm{d}t)$ 进行泰勒级数展开而得到。还可以注意到，利息是与本金 M、利率 r，以及时间间隔 $\mathrm{d}t$ 成比例的，因此

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = rM(t)\mathrm{d}t$$

等式两边同时除以 $\mathrm{d}t$，得到常微分方程

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = rM(t)}$$



方程的解为

$$M(t) = M(0)\mathrm{e}^{rt}$$

如果在 $t=0$ 时刻的本金为 1 美元，我们便再次得到式（1-2）。

这个方程将货币的当前价值与未来价值联系了起来。相反，如果知道在未来的时刻 T 将获得 1 美元，则在之前的某个时刻 t，这 1 美元价值为

$$\mathrm{e}^{-r(T-t)}$$

我们将未来现金流乘以这个因子，便把未来现金流与其**现值**（present value）联系了起来。例如，假设利率 r 为 5%，即 $r=0.05$，那么两年后收到的 100 万美元现金流的现值为

$$1\ 000\ 000 \times \mathrm{e}^{-0.05\times 2} = 904\ 837 \text{ 美元}$$

不难发现，现值明显小于终值。

利率是决定未来现金流现值很重要的一个因素。我们暂时只会对单个并以常数形式出现的利率进行讨论。在以后的章节中我们将讨论更一般的情形。

小贴士

到目前为止，我们用到了哪些数学知识？为了得到式（1-2），我们只需掌握两个函数（指数函数和对数函数）以及泰勒级数。信不信由你，只要掌握了这三个知识再加上“期望”的概念，你就能学习并掌握几乎所有的金融理论了。在假设读者理解这四个知识点的基础上，我将建立基本的布莱克－斯科尔斯公式以及衍生品理论。如果你暂时没接触过这些知识也不用担心，在附录A中罗列了这些必要知识的回顾以及怎样运用基础数学知识去理解并运用金融理论的方法，读者可以根据自身需要进行阅读。

另外，能够运用基础数学知识去理解衍生品理论并不意味着必须这么做。当然，我也希望本书中所涉及的数学知识能足够满足博士们[⊖]的胃口。

1.3 股权

最基础的金融工具被称为**股权**（equity）、**股票**（stock）或**股份**（share），它代表一家公司小部分的所有权。如果你有一个非常好的关于产品或服务的想法想要实现，可以通过出售自己新公司股份的方式来出售未来的利润以筹集资金。公司的投资者可能是你的朋友、亲戚、银行或投机资本家。他们向你提供资金，作为回报，你向他们提供一份注明他们各自拥有多少公司股份的凭证。拥有公司所有权的**股东**（shareholders）对公司的运作有发表意见的权利，理论上公司的管理者必须妥善行事以使股东的利益最大化。一旦公司业务蒸蒸日上，你还可以通过发行新股的方式来筹集未来扩张所需的资本。

小生意就是这样开始的。一旦你的小生意变成了大生意，下一步扩张时你的亲戚可能就没有足够的积蓄来投资公司了。这时，公司的股份需要出售给更多的投资者甚至向公众出售，而这一阶段的投资者可能与公司创始人没有任何关系。

⊖ 以及诺贝尔奖获得者。

公司成长的最后一步是公司的股份在交易所上市，使得股份可以自由地被买卖。在股市中公司能高效且低成本地融资。

图 1-1 和图 1-2 给出了来自彭博资讯（Bloomberg）的微软股票的详细情况，包括微软股票的当前交易价格、最高价、最低价、关键人物姓名以及在不同指数中的权重等。在彭博资讯中你还可以找到非常多关于微软及所有其他股票的信息。在本书中，我们将会多次看到彭博资讯的截图。

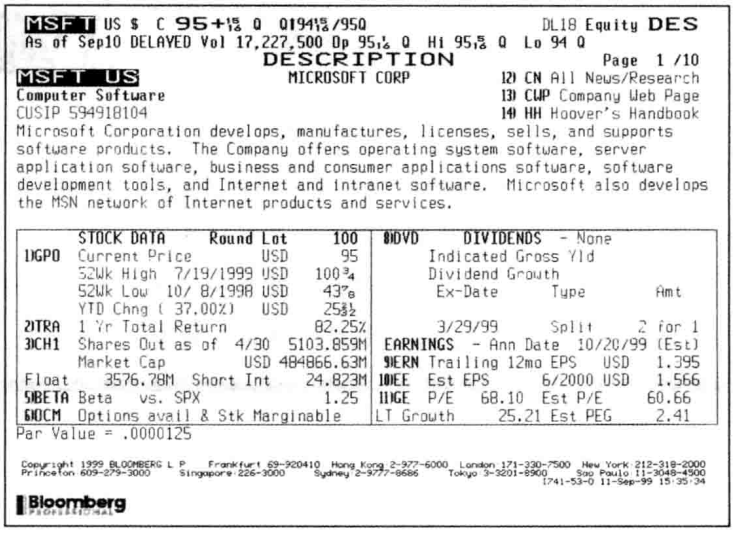


图 1-1 微软股票详情

资料来源：Bloomberg L. P.

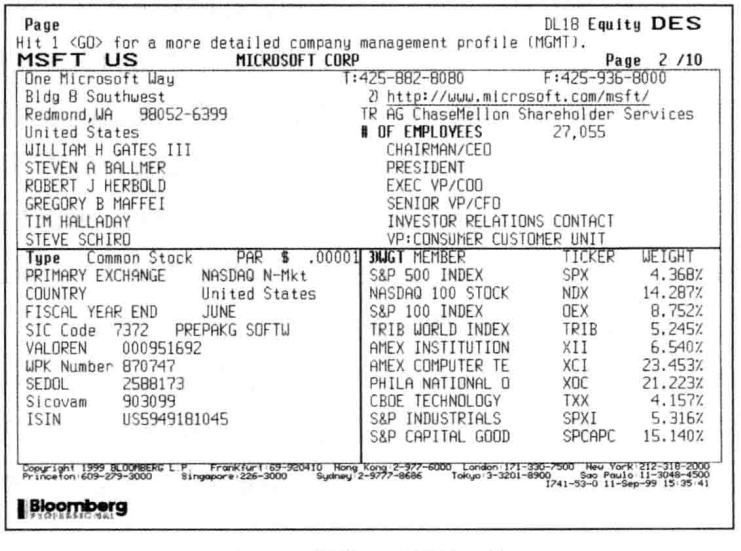


图 1-2 微软股票详情（续）

资料来源：Bloomberg L. P.

股票的价格行为是很难预测的。图 1-3 为 1950 年 1 月～2004 年 3 间道琼斯工业平均指数的走势图。图 1-4 为彭博资讯提供的葛兰素－威康（Glaxo-Wellcome）股价的时间序列图。

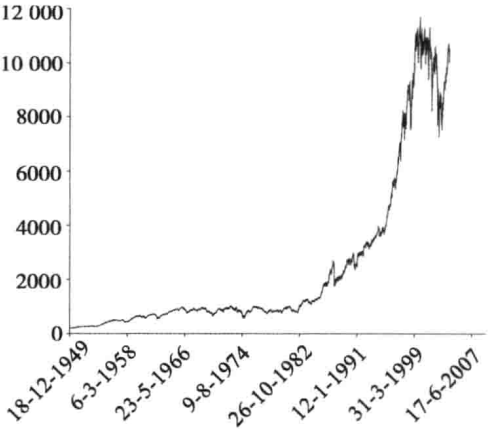


图 1-3 1949 年 12 月～2007 年 6 月间道琼斯工业平均指数时间序列图

如果我们能够预测股票未来的价格行为，那么我们将会非常富有。虽然很多人宣称能在不同精度下预测股票价格，但至今没有出现一个能够令人完全信服的案例。在本书我将持以下观点：股票价格在很大程度上具有随机性。但这并不意味着我们不能为股价建模，而是建模要从概率意义上考虑。毫无疑问，真实的股价行为是介于完全可预测和纯粹随机之间的，许多市场操纵案例的存在（大额交易者影响股价向着对他们有利的方向变化）便可以体现这个事实。

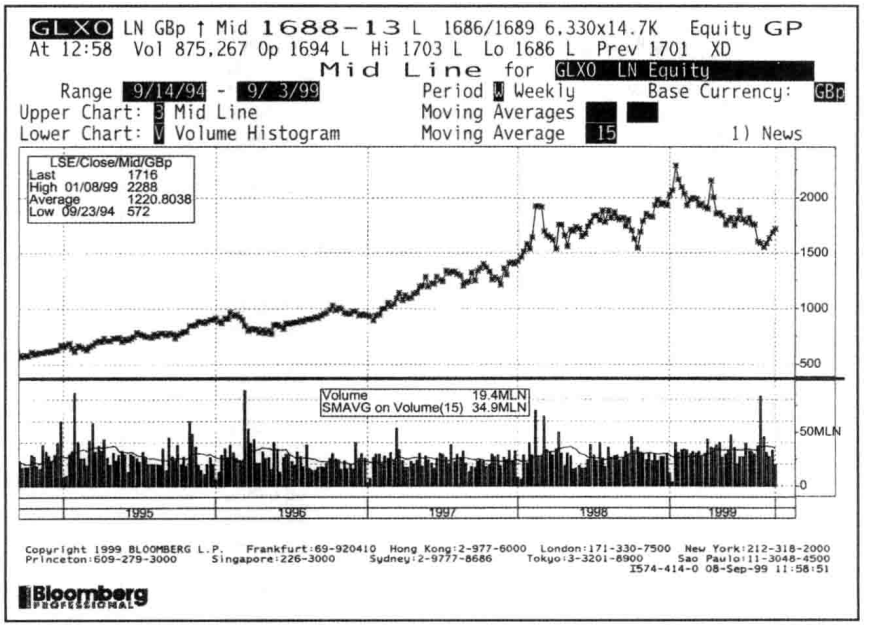


图 1-4 葛兰素－威康股票价格图（下方柱状图表示交易量）

资料来源：Bloomberg L. P.

作为对之后数学建模的热身，我想介绍一种看起来像股票价格行为的模拟随机游走的简单方法。一种最简单的随机过程是抛硬币。我将把抛硬币的想法应用

于一个模拟股票价格行为的模型。假设 100 为股票的初始价格，然后开始抛硬币，如果结果为正面，则新股价为原股价乘上 1.01；如果结果为反面，则新股价为原股价乘上 0.99。抛了一次硬币后，股价可能变为 99 或 101。再抛一次硬币，若是正面则乘 1.01，反面则乘 0.99。此时股价可能为 $1.01^2 \times 100$、$1.01 \times 0.99 \times 100 = 0.99 \times 1.01 \times 100$ 或 $0.99^2 \times 100$。重复上述过程，并且将每次抛硬币后得到的值绘在图上。图 1-5 显示了某次具体实验的结果。不过，图 1-5 所用的值不是来自反复抛硬币，而是由像图 1-6 这样的电子表格生成的。通过用 Excel 的工作表函数 RAND() 生成 0 到 1 之间均匀分布的随机数——如果随机数大于 0.5，则认为结果为正面；如果随机数小于 0.5，则认为结果为反面。

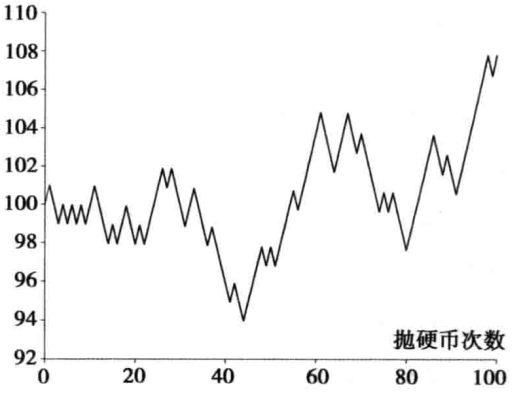


图 1-5 资产价格路径模拟图

	A	B	C	D	E
1	初始股票价格	100		Stock	
2	向上移动	1.01		100	
3	向下移动	0.99		101	
4	向上移动的概率	0.5		99.99	
5				98.9901	
6				99.98	
7		=B1		98.9802	
8				99.97	
9		=D6*IF(RAND()>1-$B$4,$B$2,$B$3)			
10				99.96001	
11				98.96041	
12				99.95001	
13				100.9495	
14				99.94001	
15				98.94061	
16				97.95121	
17				98.93072	
18				97.94141	
19				98.92083	
20				99.91004	
21				98.91094	
22				97.92183	
23				98.90104	
24				97.91203	
25				98.89115	
26				99.88007	
27				100.8789	
28				101.8877	
29				100.8688	
30				101.8775	
31				100.8587	

图 1-6 模拟抛硬币实验的简单电子表格

1.3.1 红利

理论上股票持有者拥有公司的一部分。一般情况下，这种所有权只能转化为现金，除非拥有足够多的股票以至于能接管公司并将利润归为己有（对大多数人来说这是不现实的）。对普通投资者来说，持有股票的价值来自**红利**（dividends）以及股票价格的增长。红利是汇总派发的，一般每季度或每半年派发一次。

红利的额度每年随着公司的盈利能力变动。但一般来说，公司喜欢将每个时期的红利都保持在同一水平上。红利的额度通常是在红利派发前大约一个月由公司董事会决定的。

购买股票时，股票可能拥有获得下次红利的权利（cum 含权）也可能没有（ex 不含权）。在红利支付日附近会有一个临界日的存在，这一天股票由含权变为不含权的。这一天之后若股票产生买卖，股票原来的持有者可以获得红利，购买该股票的投资者不能获得红利。那么在其他条件相同的情况下，含权的股票要优于不含权的股票。正因如此，股票会在红利派发时除息，股票的价格将会下跌。此时，对想要购买股票的投资者来说，股票价格的下降弥补了没能得到红利的损失。

现实中股票价格的跳跃变动要比此处介绍的更为复杂。通常，由股价上涨引起的资本利得和被视为收入的红利所适用的税率是不同的，一些投资者可以利用税差不承担风险地赚到很多钱。

我将在第 8 章和第 64 章更深入地讨论红利。

1.3.2 拆股

在美国，股票价格通常是 100 美元的倍数，而在英国一般为 1 英镑。这种数字并没有什么实质性的原因，毕竟，如果我买了一只股票，我只想知道股价增长的百分比，而股价的绝对水平与我没什么关系。股价的绝对水平仅仅决定了为完成确定数目的投资金额我需要购买股票的数量。当然，投资者购买股票的数量还会受到心理因素的影响。公司经常会宣布**拆股**（stock split）（见图 1-7）。例如，一家股价为 900 美元的公司宣布按 1 拆 3 的方式进行拆股，这就意味着持有 1 股每股价值为 900 美元股票的股东变成了持有 3 股每股价值为 300 美元的股票的股东。[⊖]

⊖ 在英国这被称为 1 拆 2 的方式。

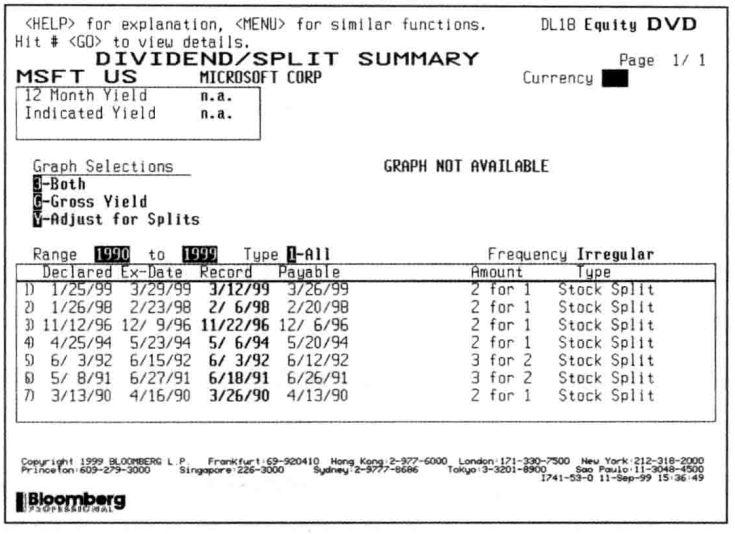


图 1-7 微软公司的拆股信息

资料来源：Bloomberg L. P.

1.4 商品

商品（commodities）一般指贵金属、石油、农产品等原材料性产品。这些产品的价格都是不可预测的，但通常会体现出季节性效应。通常来说，产品稀缺会导致产品价格高昂，因此商品经常被没有实际原材料需求的人交易以获取价差收益。例如，没有储藏黄金需求或首饰制造目的的人，也可能会通过黄金交易进行投机。大部分商品交易在期货市场上进行。在这个市场上，买方和卖方对在未来某个时刻交易某种商品达成协议。若期货合约持有人在商品执行交割前将合约平仓，那么该协议亦宣告结束。关于期货合约的知识将在之后讨论。

图 1-8 给出了用于造纸工业的纸浆的价格时间序列。

1.5 货币

另一个我们要讨论的金融变量是**汇率**（exchange rate），它是一种货币与另一种货币兑换的比率。汇率应用于**外汇市场**（foreign exchange、Forex、FX）。有些国家使本国货币盯住另一种货币，实行固定汇率制；另一些国家则允许汇率自由浮动。但无论货币如何进行兑换，各种货币之间的汇率必须始终保持一定的一致性关系。即如果同时可以用美元兑英镑、英镑兑日元，那么美元/英镑、英镑/

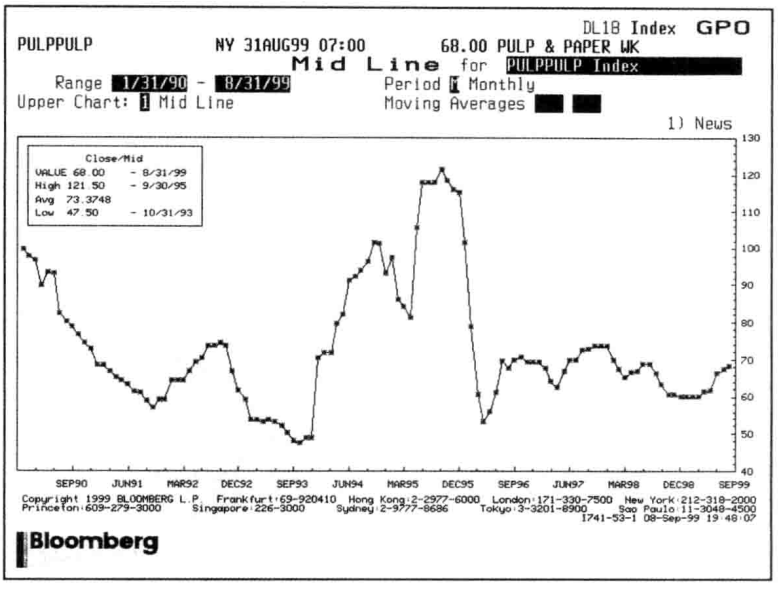


图 1-8 纸浆价格时间序列

资料来源：Bloomberg L. P.

日元以及美元/日元三种汇率之间就具有了一种隐含关系。如果这种关系被破坏，投资者就可以利用汇率的错误定价来获取**套利利润**（arbitrage profits）。

图 1-9 给出的是来自彭博资讯（Bloomberg）的汇率矩阵。

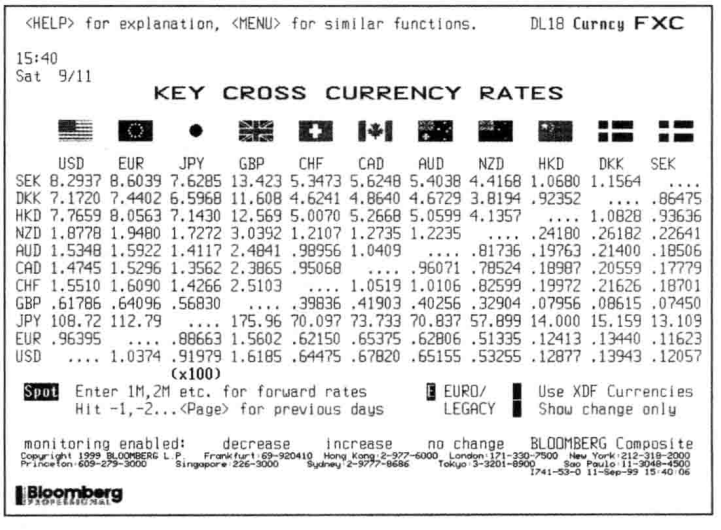


图 1-9 主要货币间汇率表

资料来源：Bloomberg L. P.

虽然汇率的波动无法预测，但汇率和双方国内的利率之间是有联系的。例如，

如果美元利率上升而英镑利率保持不变，那么我们可以预测英镑相对于美元会暂时贬值。因此，中央银行可以（在一定程度上）把利率作为调控汇率的一种工具。

图 1-10 显示了 1999 年年初欧洲大陆各国货币所实行的固定汇率。

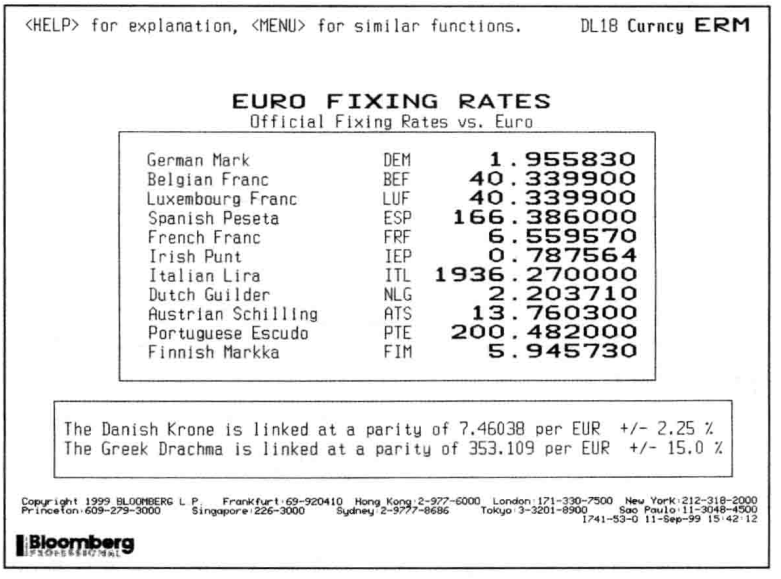


图 1-10 欧洲货币固定利率图

资料来源：Bloomberg L. P.

1.6 指数

为了衡量股票市场或经济的整体走势，股票**指数**（indices）应运而生。一个典型的股票指数是由特别选出的或**一篮子**（basket）有代表性的股票的价格加权而成的。这些选出来的股票被设计成用来代表整个市场或市场上的某个特殊板块。比如，美国的标准普尔 500 指数（S&P500）和英国的富时 100 指数（FTSE100）一般被用来代表整个市场。图 1-3 显示了道琼斯工业平均指数，它代表美国主要股票的走势情况；图 1-11 显示了 JP 摩根新兴市场债券指数（JP Morgan's Emerging Market Bond Index）。EMBI+是一种包含了以外币发行的布雷迪（Brady）债券、欧洲债券以及

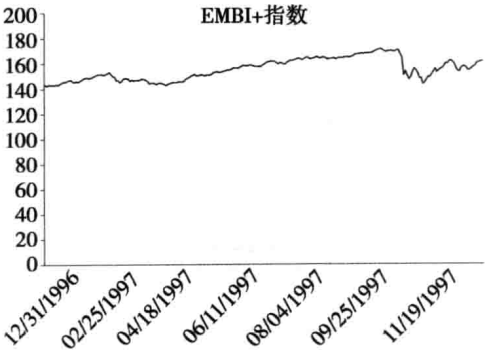


图 1-11 JP 摩根 EMBI+指数图

资料来源：Bloomberg L. P.

美元国内市场工具在内的新兴市场债务工具指数。该指数的主要组成国是三个主要的拉丁美洲国家：阿根廷、巴西和墨西哥。但同时，该指数也代表了保加利亚、摩洛哥、尼日利亚、菲律宾、波兰、俄罗斯以及南非等国。

图 1-12 为房屋抵押贷款全债指数的时间序列图，该指数包含了阿根廷政府发行的比索和美元债券。

图 1-12 房屋抵押贷款全债指数时间序列图

资料来源：Bloomberg L. P.

1.7 固定收益证券

当在银行储蓄时，你可能会考虑存款期限以及存款利率。如果你决定存定期存款（如一个月、半年或一年），银行会在存款期间向你提供一个固定的存款利率。不同储蓄期限的利率不必相同，一般来说存款期限越长则利率越高，但也会有例外的时候。另一方面，如果你有随时取现的需求，你将面临随时间变化的利率，也就是说利率将不为恒定值。

我们能在许多金融工具中看到利息的两种基本支付类型：**固定的**（fixed）和**浮动的**（floating）。**附息债**（coupon-bearing bonds）每半年或一年向持有者支付一次约定的金额。这被称为**息票**（coupon），息票通常按固定利率计算。债券到期时投资者将得到最后一次息票以及归还的用于计算利息的**本金**（principal）。**利率互换**（interest rate swaps）是固定利率与浮动利率的交换。政府和公司发行债

券是一种借贷行为，一般来说，发行方的信用级别越低，发行方必须支付越高的利息。另外，由于债券本身可以被交易，其价格会因此产生连续波动。

本书将在第 13 章、第 14 章以及第三部分进一步讨论为固定收益建模以及固定收益产品的知识。

1.8 保值债券

美国政府最近发行了一种**指数连接债券**（index-linked bond）。英国自 1981 年就开始发行此类债券了，这种证券为投资者提供了一种非常成功的保护收入免受通货膨胀侵蚀的方法。

在英国，通货膨胀由**零售价格指数**（Retail Price Index，RPI）衡量。该指数通过对包括抵押贷款利息在内的一篮子产品和服务的价格变化来计算该年相对于上一年的通胀情况，每月发布一次。指数连接债券的息票和本金均与 RPI 有关，粗略来说就是息票和本金会随着债券发行日到债券支付日期间 RPI 的上升而上升。稍微有点复杂的是，用于计算息票和本金的 RPI 滞后了 8 个月。也就是说，度量的基期是在债券发行前 8 个月，相应地，利息和本金也依赖于基期到利息支付日前 8 个月这段时间 RPI 的增长量。这样设计的一个原因是，RPI 的初始估计值通常在一段时间后需要被修正。

在美国，衡量通货膨胀的指数是**消费价格指数**（Consumer Price Index，CPI）。图 1-13 是该指数的一个时间序列图。

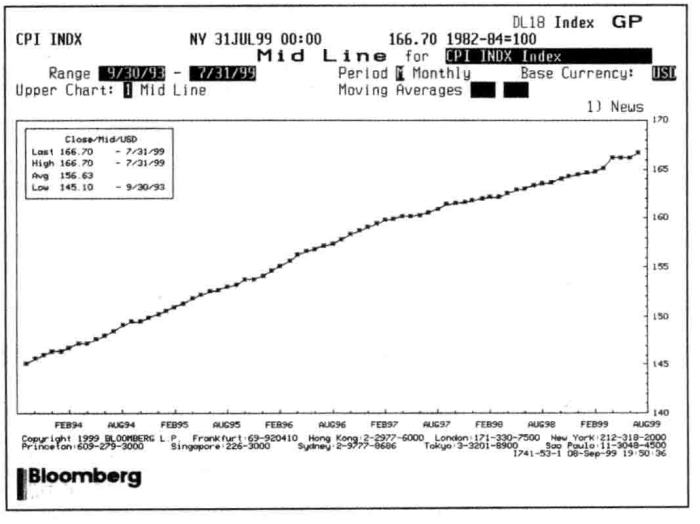


图 1-13 CPI 指数

资料来源：Bloomberg L. P.

通货膨胀和短期利率之间的动态变化关系是非常有趣的。显然，利率会通过抵押贷款月供直接影响通胀水平。另外，央行也经常会把利率作为保持低通胀水平的工具。

我们将在第71章讨论通货膨胀的建模。

1.9 远期和期货

远期合约（forward contract）是指一方承诺在将来某个特定的时刻按特定的价格向另一方购买某种资产的合约，在合约**交割日**（delivery date）或**到期日**（maturity）前不会出现现金往来。合约条款规定合约一方必须在交割日当天买下标的资产，没有其他选择。该标的资产可以是股票、商品或货币。

期货合约（futures contract）和远期合约非常相似，不同的是期货合约是标准化的合约，通常在交易所交易。期货合约每天都进行结算，由亏损方支付给盈利方期货价值的改变量。因此，从期货合约签订到到期日，存在一个逐渐支付资金的过程。

远期和期货合约的两个主要用途是投机和套期保值。如果投资者认为市场会上涨，就可以试图通过持有一份远期或期货合约来获利。如果投资者预测准确，投资者将会在到期日（甚至每一天）赚取很多钱。这就是投机，而且颇具风险。套期保值则正好相反，它是为了规避风险。例如，如果你预期在6个月后获得日元，但你生活在美国且所有的花费都使用美元，那么你可以通过签订一份期货合约来锁定未来汇率为你的日元收入保值。一旦汇率锁定，你将不会暴露在美元/日元汇率波动的风险中。当然，同时你也失去了日元升值可能带来的利润。

无套利原理的第一个例子

远期和期货为我们提供了**无套利**（no-arbitrage）原理的第一个例子。

考虑一份使我们有义务在时刻 T 以 F 美元的价格购买标的资产的远期合约。假设当前时刻为 t，资产的当前价格即**现货价格**（spot price）为 $S(t)$，也就是立即购买资产所需支付的金额。在交割日，我们付出 F 美元购买资产，此时资产价

值为 $S(T)$。在知道 $S(T)$ 的具体数值之前我们不知道自己盈利多少，而 $S(T)$ 也要在时刻 T 才能知道。为简单起见，之后将略去金额的单位“美元”。

知道了 F、$S(t)$、t 以及 T 的含义，那么它们之间有什么关系呢？也许你认为没有，因为远期合约使我们在到期时可获得的收益 $S(T)-F$ 是未知的。不过，在合约未开始的现在，通过构建一个投资组合我们可以消除未来的不确定性，具体实现方法如下。

首先，签订该远期合约。这个操作并不需要任何成本，但却使得我们暴露在标的资产到期价值不确定的风险下。与此同时，卖出一份标的资产。卖出你不拥有的东西称为**卖空**（going short），这在许多市场上是可能的，但一般会受到一些期限限制。现在我们拥有通过卖出资产获得的现金 $S(t)$、一份远期合约多头以及一份资产空头，但净头寸为 0。最后，将现金存入银行并获得利息。

在合约到期日，我们以价格 F 购买资产。无论此时 $S(T)$ 的值是多少，我们都可以用以价格 F 买来的资产将空头头寸平仓。因此，在到期日所剩下的问题仅为确定的 $-F$ 现金和银行账户两部分。这里“确定的”一词十分关键，因为它强调了其相对资产价值的独立性。银行账户里包含本金以及累计的利息，在到期日的价值为

$$S(t)\mathrm{e}^{r(T-t)}$$

因此，在到期日的净头寸为

$$S(t)\mathrm{e}^{r(T-t)}-F$$

因为初始时组合的价值为 0，而到期时能获得一个可预测的价值，那么这个可预测的值也应该为 0。因此可得

$$\boxed{F=S(t)\mathrm{e}^{r(T-t)}} \qquad (1\text{-}3)$$

这直观地体现了即期价格和远期价格的关系是一种线性关系，即远期价格和即期价格是成比例的。

表 1-1 显示了这种特殊对冲组合的现金流。

表 1-1 资产与远期合约的对冲组合的现金流

持有头寸	当前（t）价值	到期（T）价值
远期	0	$S(T)-F$
一股票	$-S(t)$	$-S(T)$
现金	$S(t)$	$S(t)\mathrm{e}^{r(T-t)}$
合计	0	$S(t)\ \mathrm{e}^{r(T-t)}-F$

图 1-14 为即期价格和远期价格的走势图。只要利率是常数，两者的关系就由式（1-3）确定。

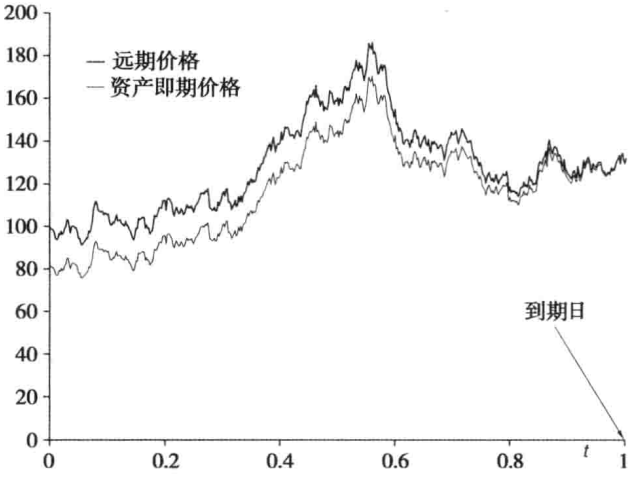


图 1-14 资产即期价格和远期价格的时间序列图

如果这种关系被破坏，则必定存在套利机会。例如，假设 F 小于 $S(t)e^{r(T-t)}$，进入一个示例所述的组合头寸即可利用它获取无风险利润。在到期日时，你将拥有一个金额为 $S(t)e^{r(T-t)}$ 的银行账户、一份资产空头以及一份远期多头头寸。支付金额 F 履行远期合约后，得到的标的资产可将空头头寸平仓，最后你将得到数额为 $S(t)e^{r(T-t)}-F$ 的利润。反过来，如果 F 比式（1-3）给出的值大，你可以进入与上述例子相反的组合头寸，持有远期合约空头，同样获得无风险利润。标准的经济学观点认为投资者会迅速发现并抓住这些机会进行套利，在这个过程中价格的改变会迅速消除这种套利机会。

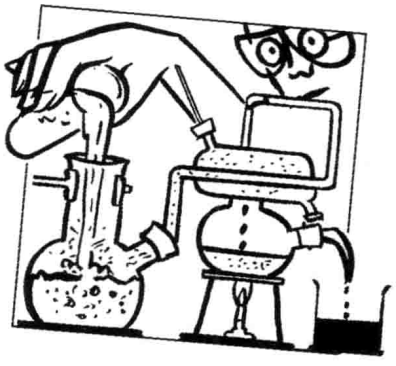
1.10 总结

作为介绍性章节来说，以上关于金融市场的描述程度已经足够了。本章最重要且最应该被读者掌握的是无套利的思想。在建立远期价格和现货价格的联系的例子中，我们构建了一个非常简单的组合，它完全消除了远期合约价值对资产未来价格的依赖。之后当我们为衍生品定价时会看到，为远期定价的原理同样可以

被运用于更复杂的金融分析中。

延伸阅读

- 更多金融资讯请访问 www. bloomberg. com 和 www. reuters. com，也可访问 CNN 的在线金融新闻，网址为 www. cnnfn. com。还有一些杂志的网络在线版，如《华尔街日报》：www. wsj. com、《金融时报》：www. ft. com 以及《期货期权世界》：www. fow. com。
- 更多有关期货的信息参见芝加哥商品交易所网站：www. cbot. com。
- 在 Wahoo! 上能看到许多金融网站的链接，网址是 www. io. com/～gibbonsb/wahoo. html。
- 我们主要假设市场具有随机性，其他类型的假设参见 Schwager（1990，1992）。
- 实际中如何为生意募资资金可参见 Brooks（1967）。
- 远期和期货价格的关系可参见 Cox、Ingersoll 和 Ross（1981）。



第2章

衍 生 品

本章内容

- 基本金融衍生工具的定义
- 期权术语
- 怎样画回报图
- 无套利和看跌看涨平价
- 简单的期权策略

2.1 引言

在上一章我们学习了金融市场的一些基本知识。我并没有展开细节层面的介绍，仅勾勒了一个简单纲要并为本章做铺垫。本章将介绍本书的核心内容——期权，期权又被广义地称为衍生品或者或有要求权。本章技术性不强，主要是介绍一些最常见的期权合约以及市场标准术语。在本章之后的部分将开始变得更加技术化。

期权已经产生很多年了，但直到 1973 年 4 月 26 日才第一次在交易所交易。那时，芝加哥期权交易所（CBOE）第一个创造了标准化的上市期权。最初只有 16 只股票的看涨期权被交易，而看跌期权直到 1977 年才被引进交易所。在美国，期权在 CBOE、美国股票交易所、太平洋股票交易所以及费城股票交易所交易。

在全世界范围内，有 50 多个交易所进行期权交易。

2.2 期权

如果将这本书从头通读到尾，你会发现远期和期货是一个较少提及的话题。远期或期货合约的持有者有义务在合约到期日进行交割。除非头寸被提前平仓，否则无论标的资产的价值是上升还是下降，合约持有者必须履行买卖商品、货币或其他合约标的物的义务。如果我们只在资产价值上升时才“必须”取得其所有权，岂不美哉？

最简单的**期权**（option）给予购买者在未来以事先约定的价格购买资产的权利，并且不承担任何义务。因此，当股票价格下跌时，我们并不需要购买它。

> **看涨期权**（call option）指在未来一个确定的时间按约定的价格购买一定数量某种资产的权利。

例如，考虑一个基于微软公司股票的看涨期权，它赋予期权持有者一个月后以 25 美元的价格购买一股微软股票的权利，而现在的股价是 24.5 美元。用于购买股票的 25 美元称为**执行价格**（exercise price 或 strike price）。按合约规定**执行**（exercise）期权的日期称为**到期**（expiry）或**到期日**（expiration date）。作为期权基础的股票称为**标的资产**（underlying asset）。

现在考虑在下个月合约到期前会发生什么。假设股票价格没有改变，仍然是 24.5 美元，在到期日我们应该怎么做？我们可以执行期权，用 25 美元购买股票，但这样合理吗？不合理，因为股票只值 24.5 美元，期权不应该被执行。如果确实想要该股票，我们可以在股市上以 24.5 美元的价格购买。但是，如果股票价格涨到 29 美元呢？这时我们可以笑了。我们可以执行期权，以 25 美元的价格购买价值 29 美元的股票，这样就可获利 4 美元。

我们应该在股票价格高于执行价格时执行期权，在股票价格低于执行价格时不行权。如果用 S 代表股票价格，E 代表执行价格，那么在到期时期权价值为

$$\max(S-E,0)$$

这个标的资产的函数叫**回报函数**（payoff function）。最大值函数“max”代表选择权。

为什么我们要买这样一个期权？很明显，如果你拥有一个看涨期权，你会希望股票价格尽量上涨。股票价格越高则盈利越多。关于这点，我们将在下面详细讨论。不过，是否购买期权的决策还取决于其购买成本：期权的价值是非负的，

它不像期货可以有负的价值。在上述例子中，期权的价值是 1.875 美元。这个数字是如何得到的呢？期权定价是本书的主题之一，在后面章节中将会介绍寻找期权价值的方法。

如果你认为股票价格会下跌，那又怎么办呢？有没有一种能从股票价格下跌中获利的合约呢？

看跌期权（put option）指在未来一个确定的时间按约定的价格卖出一定数量某种资产的权利。

看跌期权持有者希望股票价格下跌，这样就可以以高于市场价格卖出股票。看跌期权的回报函数为

$$\max(E-S,0)$$

这时，期权只有在股票价格低于执行价格时才会被执行。

图 2-1 是 3 月和 6 月到期的美国道琼斯工业平均指数（DJIA）看涨期权报价和执行价格的关系。图中还画出了在面临不同执行价格时期权的回报图。

图 2-1 进一步表明了在其他条件相同的情况下，执行价格越高，看涨期权的价值越低。另一方面也可以看出剩余期限越长，看涨期权的价值越高。这一点是显然成立的吗？随着剩余期限缩短，我们能观察到什么？随着能让标的资产价值发生改变的时间越来越少，期权的价值会慢慢接近回报函数曲线。

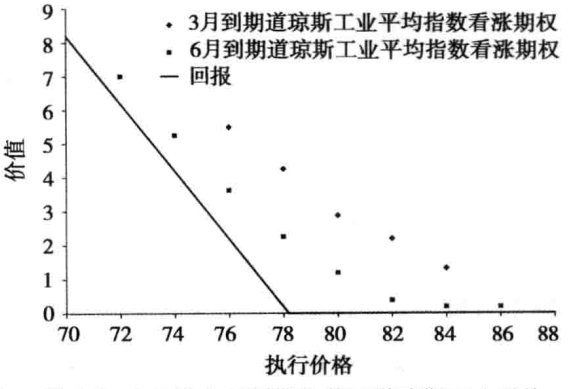


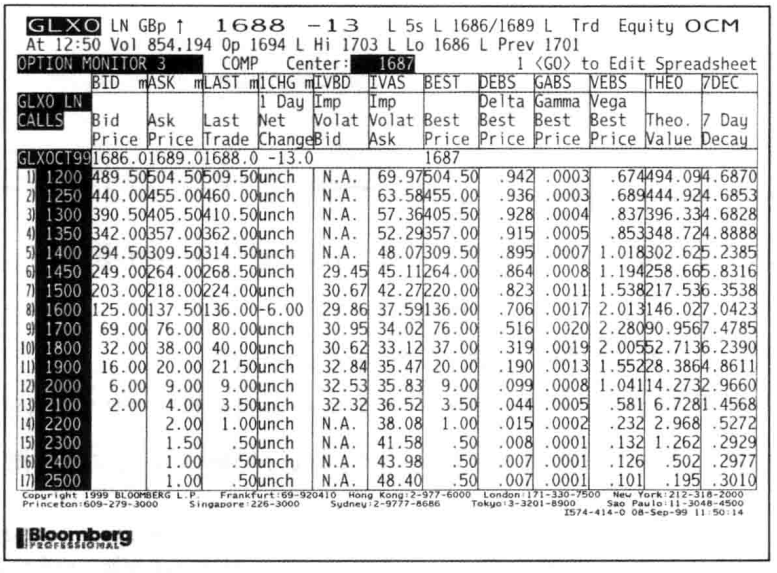
图 2-1 3 月和 6 月到期的美国道琼斯工业平均指数看涨期权报价和执行价格的关系

看涨和看跌期权的一个有趣特点是它们的价值和标的资产价格的关系是非线性的，这与期货价值与标的资产价格呈线性关系的特点形成了鲜明的对比。在给期权定价时，这种非线性的性质非常重要，因为标的资产价格的随机性和期权价值关于标的资产价格的曲率有着紧密的联系。

看涨和看跌期权是两种简单的期权，应用非常广泛。由于与香草到处存在的特性相一致，它们经常被称为**香草期权**（vanilla）。现实中还有许多种类的期权，本书后面将会向读者介绍以及描述它们中的一些。其他用于描述基于基础资产合约的概念还有**衍生品**（derivative）以及**或有要求权**（contingent claims）。

图 2-2 为 1 月份不同执行价格下葛兰素 - 威康（Glaxo-Wellcome）股票看涨

期权的价格图，所有期权均在 10 月份到期。该图还展示了许多其他信息，我们将在后面讨论。



GLXO LN GBp ↑ 1688 −13 L 5s L 1686/1689 L Trd Equity OCM
At 12:50 Vol 854,194 Op 1694 L Hi 1703 L Lo 1686 L Prev 1701
OPTION MONITOR 3 COMP Center: 1687 1 〈GO〉 to Edit Spreadsheet

GLXO LN CALLS	BID Bid Price	mASK Ask Price	mLAST Last Trade	mCHG 1 Day Net Change	mIVBD Imp Volat Bid	IVAS Imp Volat Ask	BEST Best Price	DEBS Delta Best Price	GABS Gamma Best Price	VEBS Vega Best Price	THEO Theo. Value	7DEC 7 Day Decay
GLXOCT99	1686.0	1689.0	1688.0	-13.0			1687					
1) 1200	489.50	504.50	509.50	unch	N.A.	69.97	504.50	.942	.0003	.674	494.09	4.6870
2) 1250	440.00	455.00	460.00	unch	N.A.	63.58	455.00	.936	.0003	.689	444.92	4.6853
3) 1300	390.50	405.50	410.50	unch	N.A.	57.36	405.50	.928	.0004	.837	396.33	4.6828
4) 1350	342.00	357.00	362.00	unch	N.A.	52.29	357.00	.915	.0005	.853	348.72	4.8888
5) 1400	294.50	309.50	314.50	unch	N.A.	48.07	309.50	.895	.0007	1.018	302.62	5.2385
6) 1450	249.00	264.00	268.50	unch	29.45	45.11	264.00	.864	.0008	1.194	258.66	5.8316
7) 1500	203.00	218.00	224.00	unch	30.67	42.27	220.00	.823	.0011	1.538	217.53	6.3538
8) 1600	125.00	137.50	136.00	-6.00	29.86	37.59	136.00	.706	.0017	2.013	146.02	7.0423
9) 1700	69.00	76.00	80.00	unch	30.95	34.02	76.00	.516	.0020	2.280	90.956	7.4785
10) 1800	32.00	38.00	40.00	unch	30.62	33.12	37.00	.319	.0019	2.005	52.713	6.2390
11) 1900	16.00	20.00	21.50	unch	32.84	35.47	20.00	.190	.0013	1.552	28.386	4.8611
12) 2000	6.00	9.00	9.00	unch	32.53	35.83	9.00	.099	.0008	1.041	14.273	2.9660
13) 2100	2.00	4.00	3.50	unch	32.32	36.52	3.50	.044	.0005	.581	6.728	1.4568
14) 2200		2.00	1.00	unch	N.A.	38.08	1.00	.015	.0002	.232	2.968	.5272
15) 2300		1.50	.50	unch	N.A.	41.58	.50	.008	.0001	.132	1.262	.2929
16) 2400		1.00	.50	unch	N.A.	43.98	.50	.007	.0001	.126	.502	.2977
17) 2500		1.00	.50	unch	N.A.	48.40	.50	.007	.0001	.101	.195	.3010

Copyright 1999 BLOOMBERG L.P. Frankfurt:69-920410 Hong Kong:2-977-6000 London:171-330-7500 New York:212-318-2000
Princeton:609-279-3000 Singapore:226-3000 Sydney:2-9777-8686 Tokyo:3-3201-8900 Sao Paulo:11-3048-4500
I574-414-0 08-Sep-99 11:50:14
Bloomberg PROFESSIONAL

图 2-2 10 月份到期葛兰素 - 威康股票看涨期权的价格

资料来源：Bloomberg L. P.

2.3 常用定义

在数量金融和衍生品理论中有很多专业术语，这些术语有的来自金融界有的则来自数学界。通常来说，来自金融界的术语是为了便于交流，使得每个人对同一个定义有相同的理解。[⊖]这里有一些不是很严格的定义，有些定义读者可能已经见过，本书还将介绍更多的定义。

- **期权费**（premium）：在初始时需要为合约支付的金额，如何确定该费用是本书许多章节的议题。
- **标的资产**（underlying asset）：期权价值依赖的金融工具，如股票、商品、货币以及指数等，通常记为 S。期权回报一般定义为到期日标的资产价格的函数。
- **执行价格**（exercise price）或**交割价格**（strike price）：标的资产能被买入（看涨期权）或卖出（看跌期权）的价格，一般记为 E。这个定义仅适用于

⊖ 我对大多数数学术语的目的持怀疑态度。

简单的看涨或看跌期权。在以后的章节中读者将看到更复杂的期权合约，执行价格的定义也会同时被扩展。

- **到期日**（expiration 或 expiry date）：期权可以被执行的日期，或期权失效、不再赋予持有者权利的日期。到期日一般标记为 T。
- **内在价值**（intrinsic value）：期权到期时假设标的资产价格等于当前价格的情况下期权所能获得的回报。[⊖]
- **时间价值**（time value）：期权价值高于内在价值的部分。标的资产未来价格的不确定性意味着期权价值一般不等于其内在价值。
- **实值**（in the money）期权：内在价值为正的期权，即标的资产价格高于执行价格时的看涨期权或标的资产价格低于执行价格时的看跌期权。
- **虚值**（out of money）期权：没有内在价值只有时间价值的期权，即标的资产价格低于执行价格时的看涨期权或标的资产价格高于执行价格时的看跌期权。
- **平价**（at the money）期权：执行价格与当前标的资产价格水平接近的看涨或看跌期权。
- **多头**（long position）：产品持有数量为正或有正的风险暴露数量的一方。
- **空头**（short position）：产品持有数量为负或有负的风险暴露数量的一方。很多资产允许卖空，但有一个在一定时间内必须将资产重新买回的限制。

2.4 回报图

关于期权到期价值的一个可视化且直观的解读，有助于理解期权。我们可以绘制出期权到期价值关于标的资产价格的函数的坐标图，即**回报图**（payoff diagram）。在到期日，期权的价值是已知的；对看涨期权来说，合约的价值为 $\max(S-E, 0)$，如图 2-3 中粗线所示。

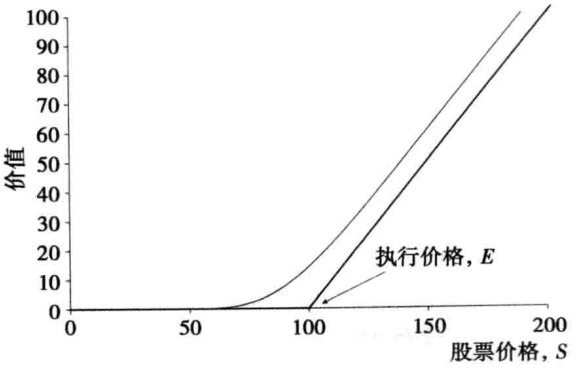


图 2-3 看涨期权回报图

⊖ 这样的定义不准确，会导致很多问题。关于内在价值的准确定义，请参见郑振龙、陈蓉著《金融工程》，第 3 版，高等教育出版社，2012 年。——译者注

图 2-4 是来自彭博资讯的看涨期权定价截图，图 2-5 为随标的资产价格变化而改变的看涨期权价值及其回报图。

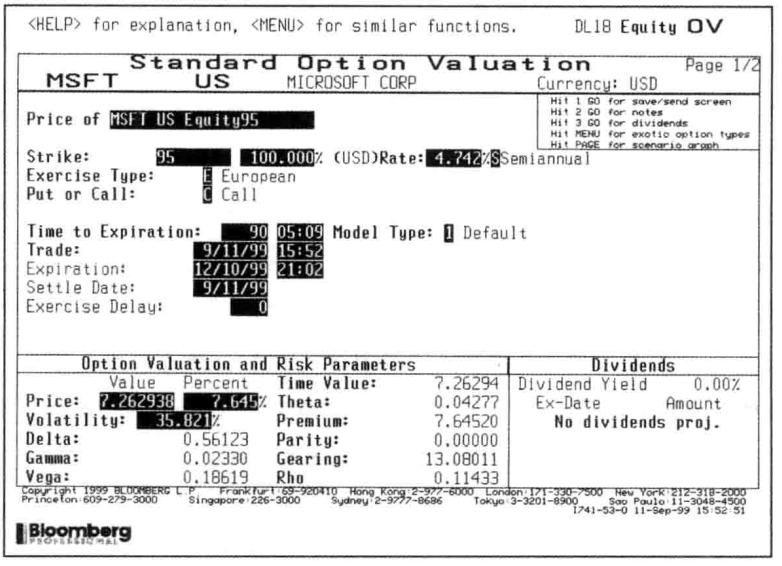


图 2-4 彭博资讯看涨期权的定价截图

资料来源：Bloomberg L. P.

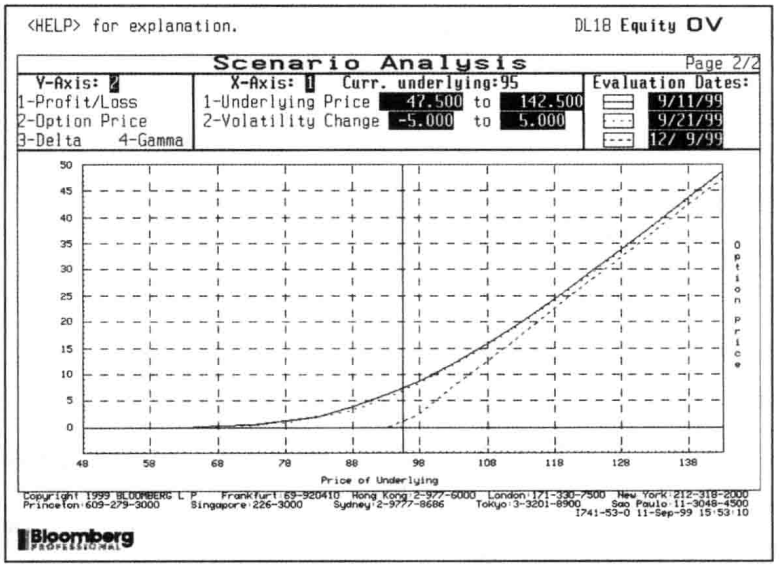


图 2-5 彭博资讯看涨期权的情景分析

资料来源：Bloomberg L. P.

看跌期权的到期回报为 $\max(E-S, 0)$，如图 2-6 中粗线所示。图 2-7 是来自彭博资讯的期权定价截图，图 2-8 为随标的资产价格变化而改变的看跌期权价

值及其回报图。回报图非常有用，因为它简化了包含许多个期权的复杂策略的分析。

请读者记住图中的这些细线，本章将对它们的意义做简略分析说明。

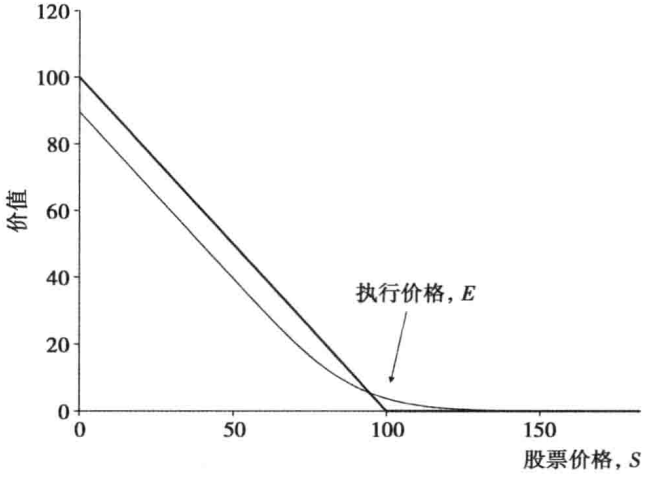


图 2-6 看跌期权的回报图

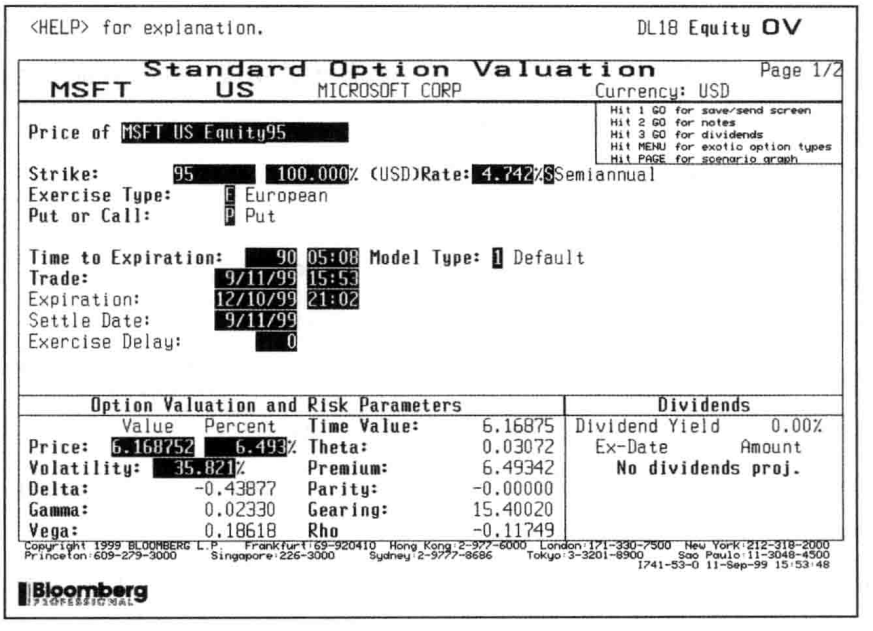


图 2-7 彭博资讯看跌期权的定价截图

资料来源：Bloomberg L. P.

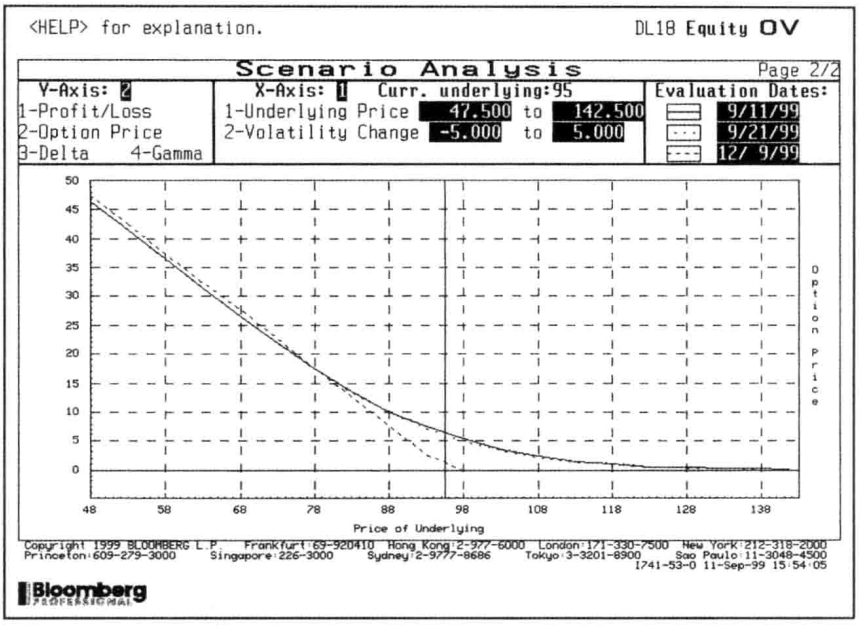


图 2-8 彭博资讯看跌期权的情景分析

资料来源：Bloomberg L. P.

价值的其他表示方式

前面介绍的回报图只描述到期时期权合约的价值情况，并没有提及为此你需要支付多少期权费。为了反映初始成本，有时我们需要绘出类似于图 2-9 的**利润图**(profit diagram)。在这一幅看涨期权利润图中，回报减去了初始支付的看涨期权费。利润图很有用，因为它显示了到期时标的资产价格要涨到什么程度才能令期权盈利。资产价值 S^* 是期权盈利与亏损的临界值，如果到期时资产价格高于 S^* 则期权盈利，如果到期时资产价格低于 S^* 则期权亏损。

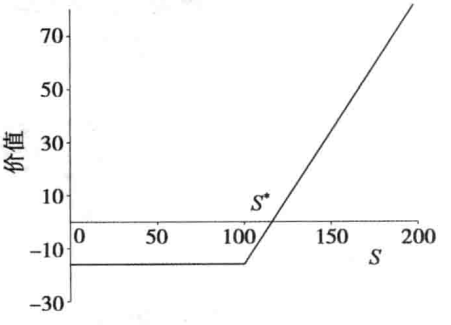


图 2-9 看涨期权利润图

正如图 2-9 中所示，该利润图并没有考虑货币的时间价值。期权费是在购买时支付的，但回报（如果有）却是在到期时才收到。为了保持一致性，你应该要么把回报乘以折现因子 $e^{-r(T-t)}$ 在当前进行估值，要么将期权费乘以因子 $e^{r(T-t)}$ 在到期日对所有现金流进行估值。

图 2-10 为彭博资讯看涨期权的利润图。注意当前的利润为 0，如果我们购买该期权并立即卖掉它，我们将既不会盈利也不会亏损（不考虑交易费用）。

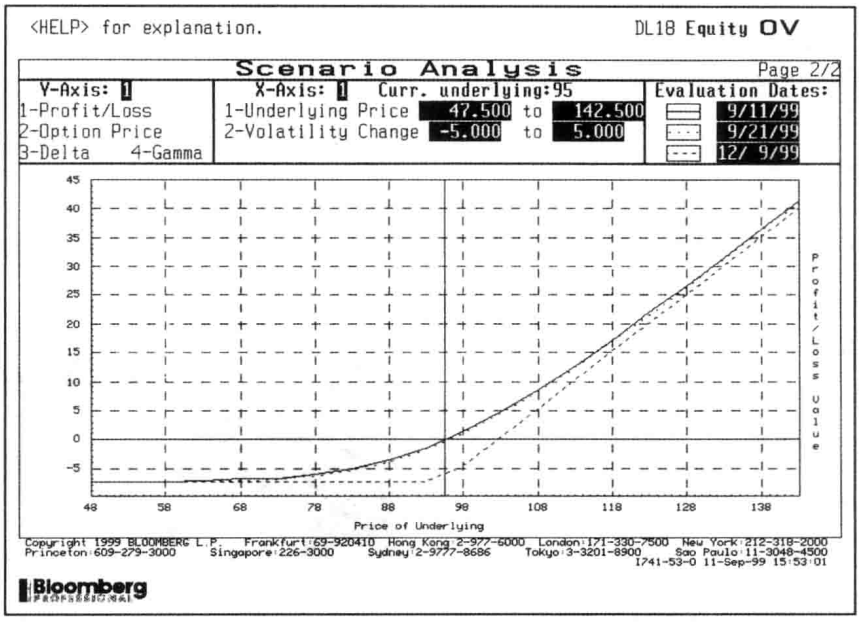


图 2-10 看涨期权利润图

资料来源：Bloomberg L. P.

2.5 卖空期权

前面我们讨论了期权购买者的权利，但是对于每一个被卖出的期权来说，如果期权被执行则必须有人在某个地方承担义务。如果我持有一份使我有权在未来某时刻购买一股股票的看涨期权，到期时我应该向谁购买股票呢？从根本上说，股票必须从**卖空**（wrote）期权的人那里购买。期权的**空方**（writer）是指承诺按看涨期权（或看跌期权）约定价格卖出（或买入）标的资产的人。期权卖方是收取期权费的人。

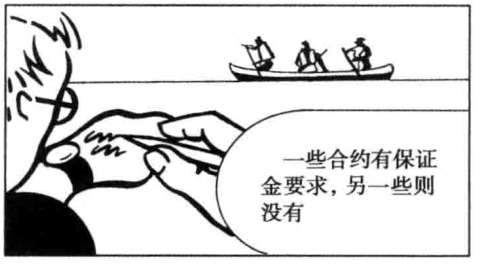
实际上，大多数简单期权合约通过交易所操作以至于期权的购买者不知道期权的卖方是谁。期权持有者甚至可以通过交易所将期权卖给其他人来结束自己的

头寸。然而，无论谁持有或曾经操作过期权，期权空方都是有义务出售或购买标的物的人。

拥有期权方和卖空期权方之间的不对称现在已经清楚了。期权购买者支付一笔期权费作为获得特定的权利和不确定的结果的回报。期权空方当前获得一份确定的款项，但在未来负有一定的义务。

2.6 保证金

卖空期权是非常危险的。购买期权的最大损失仅仅是初始的期权费，而最大获益则可能是无限的。卖空期权的最大获益是有限的，但最大损失则可能巨大。因此，为了预防不利情况下的违约风险，进行期权登记和结算工作的**清算所**（clearing houses）要求期权空方必须存入一笔**保证金**（margin）。清算所以交易对手的姿态面对参与期权交易的双方。



保证金有两种：**初始保证金**（initial margin）和**维持保证金**（maintenance margin）。初始保证金是在合约初始时存入的数额。保证金的总额必须保持在规定的维持保证金数额之上。如果保证金低于这个水平，那么必须有额外的钱（或等价的债券、股票等）存入。另外，各个市场维持保证金的水平会有所不同。

保证金在学术文献中经常被忽视，但缺乏对保证金的理解已经导致了许多著名的金融灾难，最著名的如德国金属公司（Metallgesellschaft）和长期资本管理公司（Long Term Capital Management）的案例。我们将在第44章详细讨论这些案例，我们还将看到如何为保证金建模以及如何进行保证金套期保值。

2.7 市场惯例

大多数简单期权合约通过交易所进行买卖，这些交易所使卖家与买家的匹配能够更加简便和有效率。一些简化涉及合约特征诸如可交易的执行价和到期日等。例如，香草期权以**系列**（series）的形式给出，这便涉及执行价和到期日。典型的，在任何时刻，一只股票都有三个不同到期日的期权可供交易选择。通过交易所进行标准化合约交易提高了金融工具的流动性。

一些期权是双方之间的协议，并不通过交易所，而是经常通过中介达成。这些协议可以非常灵活而且合约的细节也不需要满足任何市场惯例。这种合约被称为**场外市场**（over the counter，OTC）合约。我将在本章结束时对该类合约进行举例说明。

2.8 期权到期前的价值

我们已经看到看涨和看跌期权在到期日的价值，并已将这些价值用回报图绘制出来。我们现在的问题（也是本书核心的问题）是："如果还没有到期，现在合约的价值是多少呢?"你愿意为在未来赋予你权利的一纸合约付多少钱呢？也许你并不知道从现在到到期日这6个月间股票价格会怎样变化，但是很显然合约是有价值的。至少你知道拥有合约不会再损失什么，合约赋予你特定的权利而没有义务。关于到期前的合约价值，有两点是清楚的：合约价值将依赖于标的资产现价的高低以及合约期限的长短。

标的资产的现价越高，期权到期时我们期望的资产价格就越高，进而看涨期权的价值也就越高；另一方面，看跌期权的价值将基于同样的原因变得更低。

合约价值对剩余期限的依赖更加微妙。剩余期限越长，资产价格可以上升或下降的时间就越长。这一点对于我们拥有一份看涨期权来说是好还是坏呢？还有一点要注意：因为货币时间价值的关系，在获得任何回报之前我们等的时间越长，回报的价值就越低。

我想让你暂时收起质疑（我会不止一次这样要求）并且相信我，我们能够找到这些期权合约的"公平价值"。对于寻找合约的"公平价值"，我目前想关注的是它所依赖的资产价格和期限这两个方面。我将用 V 代表期权价值，在 t 时刻它将是标的资产价值 S 的函数。因此，我们可以将合约价值写成 $V(S, t)$。

我们知道合约到期的价值。如果我用 T 表示到期日，则在 $t=T$ 时，函数 V 就是已知的，这正是回报函数。例如，如果我们拥有一份看涨期权，则

$$V(S,T) = \max(S-E,0)$$

这就是早些时候我们在回报图上绘制过的关于 S 的函数。现在我可以告诉你图2-3和图2-6中细线代表什么了：它们是以 S 为横轴绘制的合约在到期前某一时刻的价值 $V(S, t)$。我没有指出图像绘制时距离到期时的期限，因为这些图仅用于示意性说明。之后我将花很多时间告诉读者如何找出不同种类合约的价值。

2.9 影响衍生品价格的因素

影响期权价格的两个最重要的因素是标的资产的价值 S 和距离到期的时间 t。这些量是**变量**（variables），意味着在合约期限内它们会不可避免地不断变化：如果标的资产的价值保持恒定不改变，那么期权定价就不重要了。与变量相对应的概念是影响期权价格的**参数**（parameters）。

利率和执行价格就是参数的两个例子。因为回报是在未来收到的，所以利率将通过货币的时间价值对期权价值产生影响。我们将在以后看到利率还有另一个作用。显然，执行价格是重要的：在看涨期权中，执行价格越高，看涨期权的价值就越低。

如果我们持有股票期权，期权的价值还依赖于期权存续期内该股票的红利分配。如果我们持有外汇期权，那么它的价值会依赖于外币的利率。

有一个重要的参数我还没有提到，它对期权价值有着重要的影响，这就是**波动率**（volatility）。波动率是对资产价格波动程度以及随机程度的衡量。图 2-11 显示了两种资产价格路径，其中更多锯齿状起伏的路径波动率更大。波动率的技术定义是“资产收益的年化标准差”。我将在第 3 章介绍如何度量波动率这个参数。

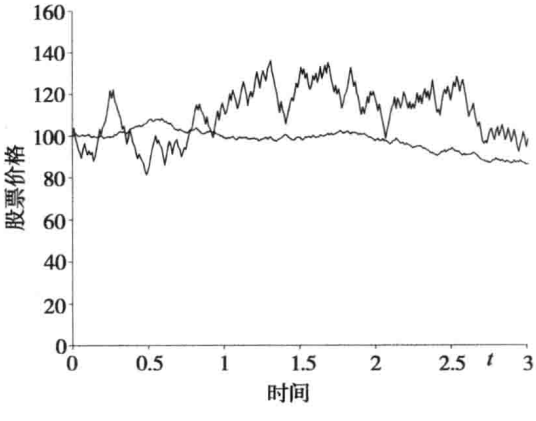


图 2-11 两种（模拟的）资产价格路径，其中一个更具波动性

波动率是一个非常有趣的参数，因为估计波动率很难。即使估计出来了，你也会发现它不会是一个常数并且是不可预测的。一旦你开始认为波动率以随机的方式变化，那么很自然地就应该把波动率当成一个变量来对待。之后我们将会在本书中看到一些例子。[⊖]

[⊖] 在金融中我们有过许多的数据，但是从来没有弄清楚这些数据对我们为未来建模到底有多大的帮助。这与自然科学形成了鲜明的对比。例如，太阳黑子的平均数可能在过去几百万年内都很稳定，但是很显然，我们不可能得到追溯那么久远的数据。

变量和参数的区别非常重要。我将推导期权价值的方程——偏微分方程。这个方程会涉及对变量的微分；但对于参数，就像其名称暗示的一样，在方程中依然以参数的形式保留。

2.10 投机和杠杆

如果你购买一个深度虚值的期权，一般花费不会太多，尤其是在距离到期日不远的情况下。即使期权到期时不值钱，你也不会损失太多。然而，如果标的资产价格发生大幅度的改变，使期权到期时变成了实值的，那么相对于投入的数额你可能会赚取十分可观的利润。下面举例说明。

示例

假设今天是4月14日，Wilmott公司的股票价格为666美元。一个在8月22日到期执行价格为680美元的看涨期权价格为39美元。我预期股价从现在至到期会有一个较大幅度的上升，如果预测正确我应如何获利呢？

1. 购买股票

假设我以666美元的价格买入股票，并假设在8月中旬股票价格确实上涨到了730美元，那么我将获得每股64美元的利润。更重要的是我的投资将以如下比率增长：

$$\frac{730-666}{666}\times 100=9.6\%$$

2. 购买看涨期权

如果我以39美元的价格购买看涨期权，那么在到期日我可以执行看涨期权，支付680美元以获得价值730美元的股票。我支付了39美元并收回了50美元。每股期权的利润为11美元，但以百分数的形式我获得的收益率为

$$\frac{\text{资产到期价值}-\text{交割价}-\text{期权费}}{\text{期权费}}\times 100=\frac{730-680-39}{39}\times 100=28\%$$

这是**杠杆**（gearing，leverage）的一个例子。虚值期权具有较高的杠杆，能用很小的投资赚取可能很高的回报。这里杠杆的下行损失是看涨期权很有可能在到期日变得完全没有价值，那么你将失去你所有的投资。如果Wilmott公司的股票价格保持在666美元，那么股票投资会有一个与期初相同的价值，但是看涨期权投资会遭受100%的损失。

高杠杆率的期权合约对期权空方来说有很大的风险，而多方只承担很小金额的风险（即使亏损的可能性很高），其最大损失仅限于支付的期权费。但是空方为了得到概率高但量很小的利润将面临巨额的损失风险。面对这样的交易，空方当然会三思而后行，除非他能通过购买其他合约来抵消风险。这种通过购买其他相关合约来抵消风险的做法称为**套期保值**或**对冲**（hedging）。

杠杆解释了购买期权的一个原因。如果你对市场走向持有坚定的看法，那么你可以利用衍生品来获利；如果你是对的，这会比直接进行资产的买卖赚取更多收益。

2.11 提前执行

以上介绍的简单期权是**欧式期权**（European options）的例子，因为它在到期日才允许被执行。一些合约允许持有者在到期日前任意时刻执行，这些期权被称为**美式期权**（American options）。美式期权比同等条件的欧式期权赋予了持有者更多的权利，因此可能更具价值，并且永远不会比同等条件的欧式期权的价值低。对于美式合约来说，最重要的是决定什么时候执行合约。第 9 章将深入讨论美式期权，并介绍如何确定期权的最佳执行时刻，以使得合约的价值最高。

必须注意，“美式”和“欧式”的称呼与合约的交易场所没有任何关系。

最后，有一种**百慕大期权**（Bermudan options）。这种期权允许在特定的一些日期或者说特定的时间区间行权。从某种意义上说它处于欧式和美式之间，因为期权只允许在某些日期执行而其他日期则不行。

2.12 看跌看涨平价

设想你购买了一份执行价格为 E、到期日为 T 的欧式看涨期权，同时卖空了一份具有相同执行价格和到期日的欧式看跌期权。当前日期为 t。在到期日 T，你收到的看涨期权的回报将如图 2-12 中第 1 个坐标图上的实线所示；你收到的看跌期权的回报将如第 2 个坐标图中的实线所示。注意第 2 个坐标图中回报的符号是负的，因为你卖空期权则对期权回报负有义务。两个期权组成的组合的回报是两者回报的加总，如图中第 3 个坐标图所示。期权组合的回报为

$$\max(S(T)-E,0)-\max(E-S(T),0)=S(T)-E$$

其中 $S(T)$ 是标的资产在 T 时刻的价值。

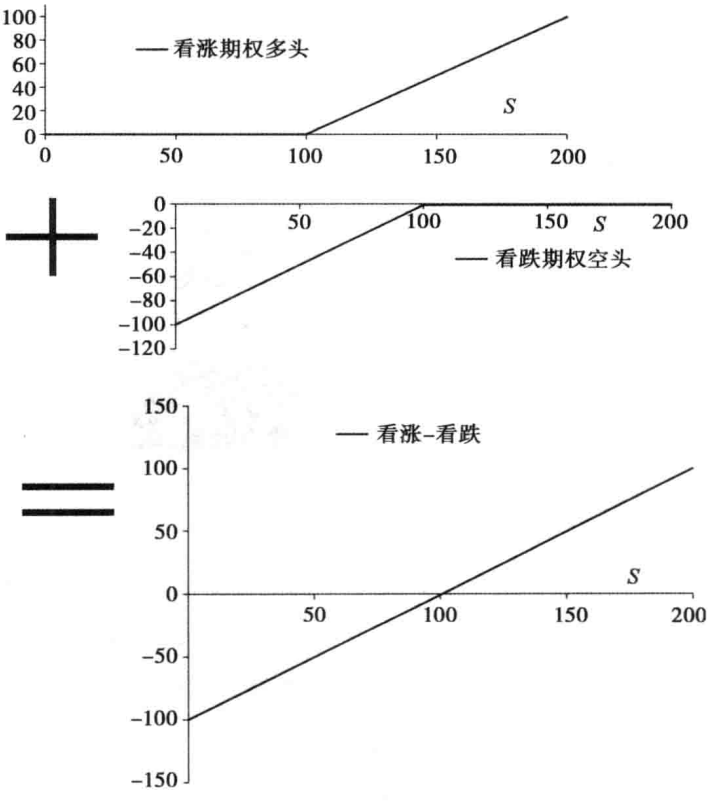


图 2-12 看跌 - 看涨平价示意图

表达式右边由两部分组成，即标的资产价格和固定金额 E。有没有另外一种方法能获得相同的回报呢？如果我今天购买资产，成本为 $S(t)$，到期时价值为 $S(T)$。我不知道 $S(T)$ 的值将会是多少，但是我知道如何确保到期时获得它，那就是购买该资产。如何获得 E 值呢？为了锁定在时刻 T 的支付 E，则涉及在 t 时刻的现金流 $E\mathrm{e}^{-r(T-t)}$。结论是，一个包含看涨期权多头和看跌期权空头的组合的回报与包含一个资产多头和现金空头的组合的回报完全相同。现金流的等价独立于股票的未来表现，并且也独立于模型：

$$C - P = S - E\mathrm{e}^{-r(T-t)}$$

其中，C 和 P 分别代表看涨和看跌期权当前的价值。这个关系在合约到期前的任意时刻均成立，被称为**看跌 - 看涨平价**（put-call parity）。如果这个等式关系不成立，就会存在无风险套利的机会。

表 2-1 显示了完美套期保值组合的现金流。在表中，我将到期时的现金流构建为一个确定的值 0。

表 2-1 期权和资产套期保值组合中的现金流

持有头寸	当日(t)价值	到期日(T)价值
看涨期权	C	$\max(S(T)-E,0)$
−看跌期权	$-P$	$-\max(E-S(T),0)$
−股票	$-S(t)$	$-S(T)$
现金	$Ee^{-r(T-t)}$	E
合计	$C-P-S(t)+Ee^{-r(T-t)}$	0

2.13 二值期权或数字期权

香草看涨和看跌期权是最早出现且至今仍最常见的期权，而**二值期权**（binary options）或**数字期权**（digital options）正变得越来越重要。这些合约在到期时的回报并不是标的资产价格的连续函数。**二值看涨期权**（binary call）的回报图的例子如图 2-13 所示。这种合约在时刻 T 即合约到期时如果标的资产的价格大于执行价格 E，则需偿付 1 美元。再一次注意，粗线表示合约到期回报，细线表示到期前某个时刻合约的价值（与本章其他的图例一致）。

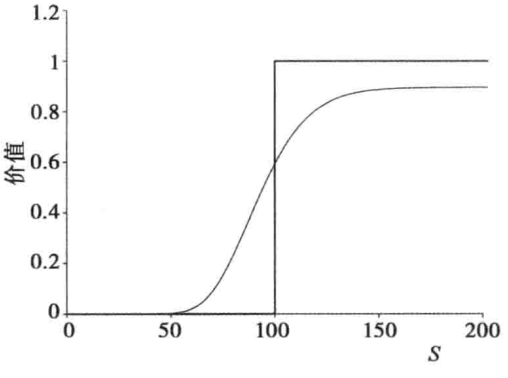


图 2-13 二值看涨期权的回报图

为什么你会投资二值期权？如果你认为资产价格在到期前将会上涨并且最终会超过执行价格，那么你可能选择购买香草看涨期权或二值期权。香草期权有最好的盈利潜力，当资产价格 S 超过执行价格时香草期权的收益呈线性增长；而二值期权的收益则一定不会超过 1 美元。如果你预期标的资产的价格将会大幅上涨，那么购买香草期权也许是最佳的；如果你预期标的资产价格的上涨幅度不大，那就购买二值期权。在标的资产价格大幅度变动的情况下，香草看涨期权的杠杆比二值看涨期权的杠杆更大。

图 2-14 是**二值看跌期权**（binary put）的回报图，如果在到期日资产的价格低于 E，那么期权持有者会得到 1 美元。预测标的资产价格会有小幅下降

的投资者将是二值看跌期权的主要购买者。

有一个很简单的二值期权看跌看涨平价关系。当你同时持有一个二值看涨期权和一个具有相同到期日和执行价格的二值看跌期权时，在到期日你将得到什么？答案是，无论到期时标的资产的价格水平是多少，你都将获得1美元。因此

$$\text{二值看涨期权}+\text{二值看跌期权}=\mathrm{e}^{-r(T-t)}$$

另外，完美套期保值的数字期权组合的现金流表格是怎样的呢？

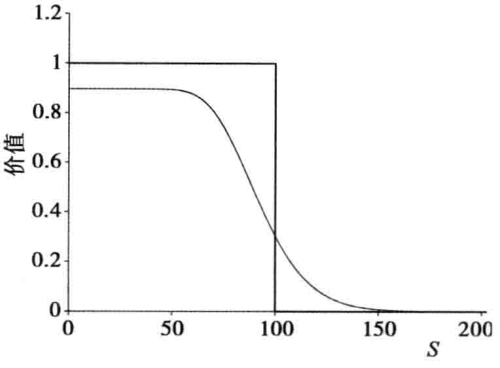


图 2-14 二值看跌期权的回报图

2.14 牛市差价组合和熊市差价组合

一份类似于二值期权的回报可以由香草看涨期权构造。这就是我们关于**期权组合**（portfolio of options）或**期权策略**（option strategy）的第一个例子。

假设我购买一份执行价格为100美元的看涨期权，同时卖出一份具有相同到期日的执行价格为120美元的看涨期权，那么我构造的组合的回报就如图2-15所示。到期时，如果股票价格低于100美元，则回报为0美元；股票价格高于120美元，则回报为20美元；股票价格处于二者之间，则回报与股价呈线性关系。不同于二值期权，它的回报是连续的，但二者的回报从表面上看起来很相似。这种策略称为**牛市差价组合**（bull spread）或**看涨差价组合**（call spread）。它从牛市中获利。

由执行价格分别为 E_1 和 E_2 的看涨期权组成的一般牛市差价组合的回报由下式给出

$$\frac{1}{E_2-E_1}(\max(S-E_1,0)-\max(S-E_2,0))$$

其中 $E_2>E_1$。为了使最大回报为1美元，这里每个期权我都买了/卖了 $(E_2-E_1)^{-1}$ 份。

如果我卖出一份执行价格为100美元的看跌期权，同时买入一份执行价格为120美元的看跌期权，我将获得如图2-16所示的回报。这称为**熊市差价组合**（bear spread）或**看跌差价组合**（put spread），它从熊市中获利。同样，除了回报

是连续的以外，它的回报与二值看跌期权非常相似。

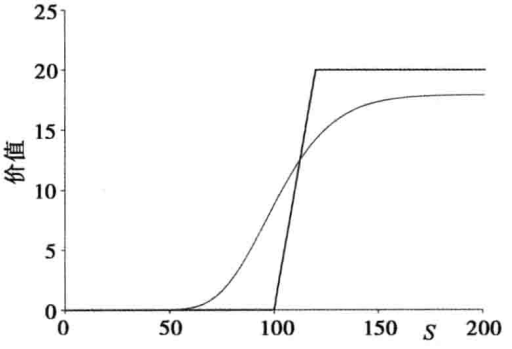


图 2-15 牛市差价组合的回报图

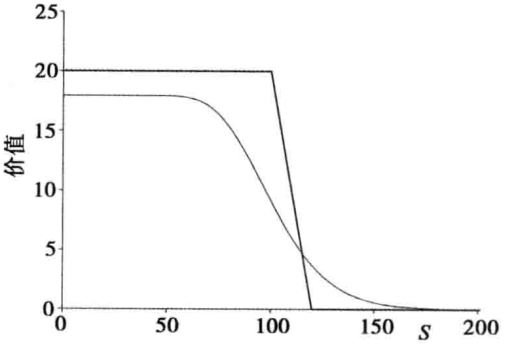


图 2-16 熊市差价组合的回报图

因为看跌－看涨平价的关系，我们能够使用其他合约构造上述回报。

一个涉及同类期权（即同为看涨期权或看跌期权）的策略称为**差价策略**（spread）。

2.15 跨式组合和宽跨式组合

如果对标的资产价格的表现有精确的判断，你可能会想在选择期权时进行更加精确的操作。简单的看涨期权、看跌期权以及二值期权此时可能显得比较粗糙。

跨式组合（straddle）由具有相同执行价格的一份看涨期权和一份看跌期权组成。回报图如图 2-17 所示。构成这种组合的期权通常是平价期权，投资者预期标的资产价格要么上涨要么下跌，唯独不会一直维持在现有水平。例如，在预料到的重大消息公布前，股价经常表现出“暴风雨前的平静”。一旦消息发布，股价会突然上涨或下跌，这取决于消息是否对公司利好。技术交易者观察到股价正处于一个关键的支撑位或阻力位并且预期股价会显著突破或大幅反转时，也有可能购买跨式组合。

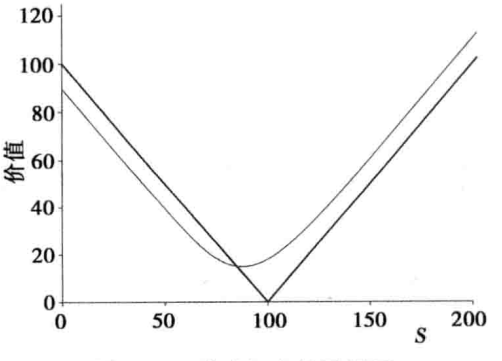


图 2-17 跨式组合的回报图

相反，跨式组合会被持有相反观点的人卖掉，他们预期标的资产的价格会保持稳定。

图 2-18 是彭博资讯构建跨式组合的截图。图 2-19 显示了该头寸在到期

前不同时刻的损益情况。这里的利润/损失是指期权价值减去已付的期权费之后的值。

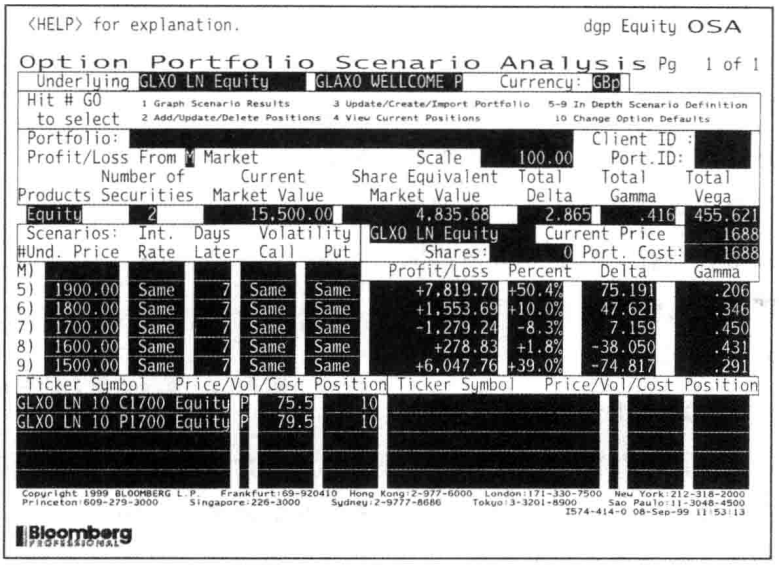


图 2-18 两份期权构成的跨式组合

资料来源：Bloomberg L. P.

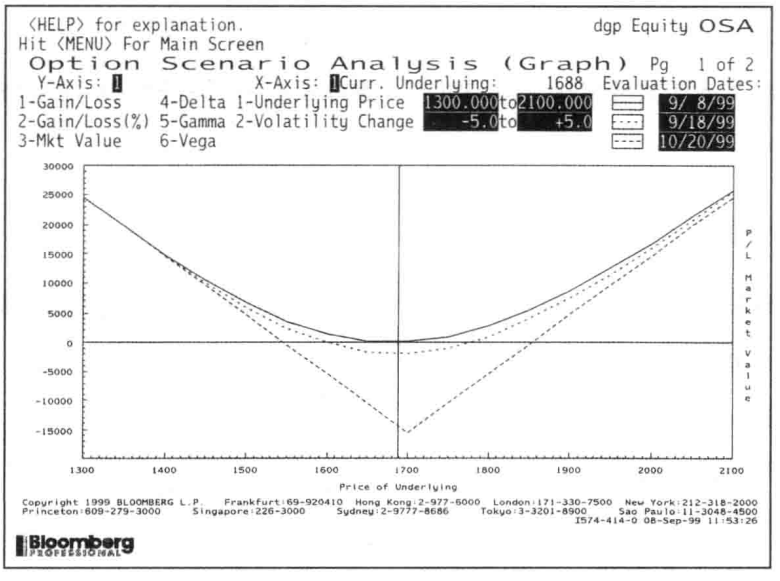


图 2-19 跨式组合到期前不同时间段的盈亏图

宽跨式组合（strangle）与跨式期权类似，除了看涨和看跌期权的执行价格不一样。合约既可以是**虚值宽跨式组合**（out of money strangle），也可以是**实值**

宽跨式组合（in the money strangle）。图 2-20 显示了虚值宽跨式组合的回报情况。购买这种头寸的动机与购买跨式组合类似，不同之处在于购买者预期标的资产的价格会向上或向下有更大幅度的变动。这种合约通常在标的资产价格处于两个执行价格之间时被购买，价格比跨式组合便宜，这意味着虚值宽跨式组合的杠杆大于跨式组合。其缺点是在到期日时宽跨式组合会有一个更大价格范围的无回报区间，而跨式组合则只在一个价格点没有回报。

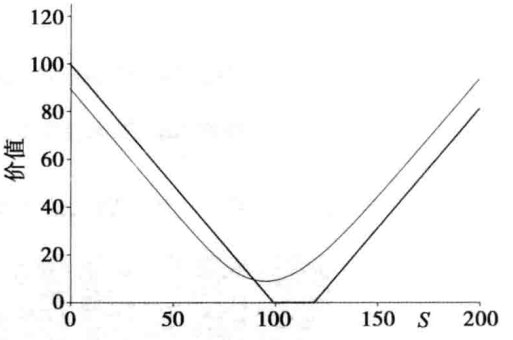


图 2-20 宽跨式组合的回报图

另一个选择跨式组合或宽跨式组合的原因是，它不涉及对资产价格走势的判断。这些合约会被一些对波动率走势有判断的人买进或卖出，他们属于最简单的**波动率交易者**（volatility trades）。因为期权价格和资产波动率之间的关系，一些人可以投机于波动率的变动。你预期波动率会上升吗？如果是，你能如何从中获益？除非更了解期权价格和资产波动率间的关系，否则我们不能更详细地分析这个问题。

另外，跨式组合和宽跨式组合很少被持有至到期。

一个涉及不同类型期权（即同时涉及看涨期权和看跌期权）的策略称为**混合策略**（combination）。

2.16 风险逆转组合

风险逆转组合（risk reversal）是一份执行价格高于现货价格的看涨期权多头和一份执行价格低于现货价格的看跌期权空头组成的组合。两个期权到期日相同。组合回报如图 2-21 所示。

风险逆转组合是一种非常特殊的合约，很受从业者欢迎，其价值通常非常小并且与波动率变动的市场预期有关。它太复杂了以至于我们目前不会深入学习，但在本书第 50 章将会有

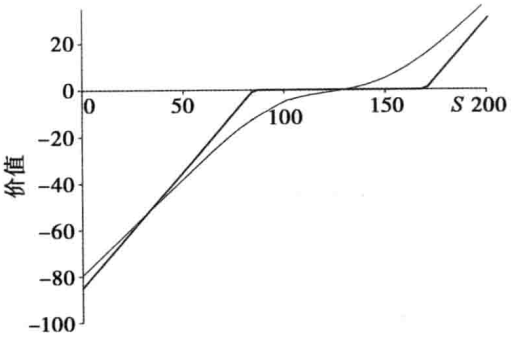


图 2-21 风险逆转组合的回报图

关于风险逆转组合的针对性解释。

2.17 蝶式差价组合和鹰式差价组合

一个更复杂的涉及买卖三种不同执行价格的期权的策略是**蝶式差价组合**（butterfly spread）。购买一份执行价格为90美元的看涨期权，卖出两份执行价格为100美元的看涨期权，再买入一份执行价格为110美元的看涨期权，图2-22给出了该组合的回报。如果你认为资产价格既不会上涨也不会下跌，你可能会持有这种组合。因为它没有多大的盈利潜力（该例中最大回报为10美元），这种头寸会相对便宜。对期权来说，便宜是一个好的属性。

鹰式差价组合（condor）与蝶式差价组合很像，差别在于前者会用到四种不同执行价格的看涨期权，其回报如图2-23所示。

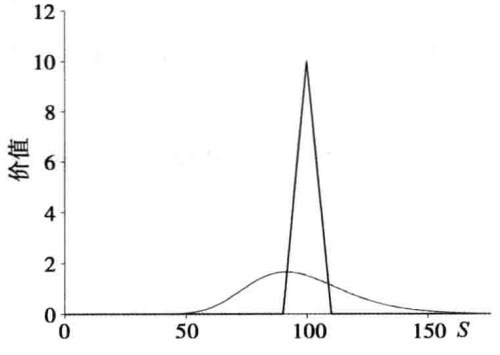


图2-22 蝶式差价组合的回报图

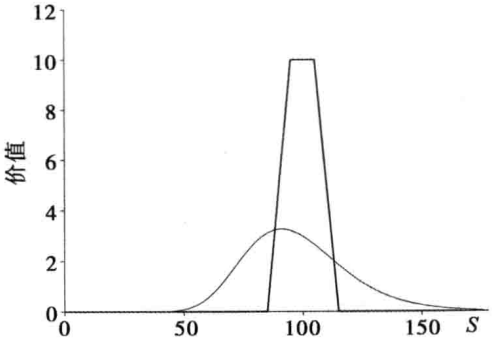


图2-23 鹰式差价组合的回报图

2.18 差期组合

前面描述的所有策略都涉及买入或卖出具有不同执行价格但都有相同到期日的看涨和看跌期权。一个涉及具有不同到期日的期权的策略称为**差期组合**（calendar spread）。如果对市场变动的时机和方向有精确的判断，你可能会持有一个这样的头寸。与往常一样，这种策略的动机是：减少你认为不重要的时间及资产价格点上的回报，增加你认为关键的时间及资产价格点上的回报。任何回报上的减少都会减少期权头寸的总价值。

2.19 长期股票参与证券和灵活场内期权

长期股票参与证券（Long-term equity anticipation securities，LEAPS）是在

交易所交易的长期限看涨和看跌期权，20 世纪 80 年代后期开始在芝加哥期权交易所（CBOE）交易。它们是标准化的，其到期期限最长可以为 3 年。它们以 3 种执行价格开始交易，分别是平价、相对于交易时的标的资产价格高 20%以及相对于交易时的标的资产价格低 20%。

1993 年，芝加哥期权交易所推出了以几种指数为标的的**灵活场内期权**（FLexible EXchange-traded options，FLEX）。这种期权允许一定程度的差别化定制，包括到期日（最多可以 5 年）、执行价格以及执行方式等。

2.20 权证

与期权非常相似的一种合约是**权证**（warrant），这是一种公司以其股权为标的而发行的看涨期权。权证与交易型看涨期权的主要区别是期限长短不同，权证通常有一个更长的生命周期，执行时公司会向权证持有者发行新股。相反，在行权时，交易型期权的持有者会收到已经发行的股票。权证通常允许在一个初始等待期之后至到期之前的任何时刻行权。

一般典型的权证生命跨度大约是 5 年或者更长。偶尔的**永续权证**（perpetual warrants）也会被发行，而它是没有到期日的。

2.21 可转债

可转债（convertible bonds，CB）同时具有债券和权证的特点。它支付一连串息票，且最后在到期日偿还本金，但它还可以在到期前转换为标的股票。当然，一旦执行转换功能，它便失去了获得未来息票的权利。如果股价很低，那么可转债几乎没有转换为股票的动力，息票流会更具价值，此时的可转债就相当于债券；如果股价很高，转换就成为可能，可转债会对股票价格的变动做出反应。由于可转债可以被转换成股票，所以它的价值至少等于标的股票的价值。这样的属性使得可转债与美式期权类似——提前执行期权和可转债执行转换在数学上是一样的。

2.22 场外期权

不是所有的期权都在交易所交易。一些被称为场外期权的合约会在私下由合约一方卖给另一方。图 2-24 是一份场外看跌期权的条款说明书，其中有一些比较

特殊的特征。**条款说明书**（term sheet）详细说明了场外期权合约的细节。在这份场外看跌期权合约中，持有者得到一份标准普尔500指数的看跌期权，但是比香草看跌期权更便宜。这份合约便宜的原因是，当标的指数低于一个指定的水平时多方可以不支付部分期权费。每当指数上升到一个新的水平就会引起一个额外的支付。这一特性意味着合约不是香草型的，同时也使得定价更加复杂。在本书后面的章节我们将会讨论与这份合约一样的一些特征。

标准普尔500指数场外期权

期权类型	具有或有期权费特征的欧式看跌期权
期权卖方	××××
期权买方	[待定]
名义本金	USD 20MM
交易日	[]
到期日	[]
标的指数	标准普尔500指数
结算方式	现金结算
现金结算日	到期后5个交易日
现金结算数量	按如下公式计算： 合约数量×max[0，S&P500执行价格 −S&P500的到期价格]其中合约数量 =名义本金/S&P500初始价格 这和普通的看跌期权相同：S&P500执行价格等于交易日S&P500收盘价的95% S&P500到期价格等于到期日确定的标的股指水平 S&P500初始价格等于合约成立时的标的股指水平
初始期权费	名义本金的[2%]
初始期权费支付日期	交易日后5个交易日
附加期权费	名义本金的[1.43%]，每个触发水平
附加期权费支付日期	附加期权只在从交易日（包括交易日）至到期日（包括到期日）间，标的指数大于等于任何触发水平时支付
触发水平	S&P500初始价格的103%、106%、109%
文件材料	国际互换与衍生品协会
适用法律	纽约

注：这个象征性的条款清单既不是用于购买或出售证券或诸如期权、互换、远期合约和与场外衍生产品具有相似特征的结构性票据等场外衍生品的要约，也不是购买或出售证券与场外衍生品的宣传单。上述并不是实际交易中一份完整说明的全部内容，并可随意更改其中内容。

图 2-24 场外看跌期权的条款说明书

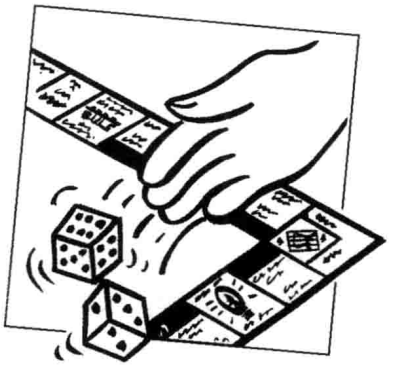
本书中所有的条款说明书都是真实的，一般是银行工作人员为了可能的商业目的而写下的。然而，很多条款说明书在完成前我便拿到手了，因此你可能经常会看到它们有所“缺失”，但这些问题在合约最终敲定时都会被处理。

2.23 总结

现在我们了解了期权和期权市场的基本情况，以及一些最简单的交易策略。我们知道了一些术语以及人们可能购买期权的原因。我们还看到在看跌看涨平价中的另一个无套利的例子。这还仅仅是个开始。我们还不知道这些工具的价值是多少，不知道它们如何受标的资产价格的影响，不知道买入或卖出期权的风险有多大。我们仅仅看到了最简单的合约，还有很多更复杂的产品有待我们去考察。所有这些内容都会在以后的章节中学到。

延伸阅读

- McMillan（1996）和 Options Institute（1995）介绍了许多实务中用到的期权策略。
- 大多数交易所都有自己的网站。伦敦国际金融期货交易所的网站上包含了很多货币市场、债券、股权、指数以及商品的信息，见 www. liffe. com。期权和一般衍生品的信息，见芝加哥期权交易所的网站 www. cboe. com。美国股票交易所的网址是 www. amex. com，纽约股票交易所的网址是 www. nyse. com。
- 经常有关于衍生品的负面新闻（可能以后会有更多）。见 Miller（1997）对衍生品利弊的讨论。
- 期权方面最好的书是 Hull（2005）、Cox 和 Rubinstein（1985）等人的著作，好得让我无法提及其他的书。



第3章

资产的随机行为

本章内容

- Jensen 不等式
- 更多数量金融常用符号介绍
- 如何分析时间序列数据以建立收益率模型
- 维纳过程：一个关于随机性的数学模型
- 一个用于股票、货币、商品和指数的简单模型

3.1 引言

受之前抛硬币实验的启发，本章将描述一个简单的用于刻画股票和其他金融工具的连续时间模型。这将带领我们进入随机微积分和维纳过程的世界。尽管我描述的观点背后有许多理论，但是我会尽可能用简单且易于接受的方式介绍这一切。我们将会对股票、货币和商品的行为建模，这些模型的思想也适用于将在本书第三部分涉及的固定收益建模。

3.2 常见的“分析”范式

在金融世界中，有三种常用的“分析”范式：

- 基本面
- 技术
- 数量

基本面分析（fundamental analysis）是通过深入分析一家公司的资产负债表、管理团队、专利应用、竞争对手以及诉讼案件等各方面来试图确定该公司“正确”的价值。换句话说，即深入公司的内部，做大量的计算、预测等。这听起来是为一家公司及其股价建模的一种很合理的方式。确实是，而且我们之后将在实物期权部分讨论它。然而遗憾的是，这种范式伴随着两个困难。第一点，它非常难，你需要一个会计学学位并且要非常耐心。即使这样，最重要的资料也可能藏在“资产负债表之外”。第二点，也是更重要的一点，“市场保持非理性的时间可以很长，长到超过你能保持偿债能力而不破产的时间。”（可能是凯恩斯说的）。换句话说，即使你有关于一家公司价值的完美模型，也不意味着你就能够赚钱。必须找到一些错误定价的股票，然后希望世界上的其他人开始意识到你的观点。但这可能永远都不会发生。如果基本面分析是困难的，那么接下来的分析范式刚好相反，因为它相当简单。

技术分析（technical analysis）适用于当你关心的仅有公司股票历史价格信息的时候。你通过绘制趋势线，寻找股价的特定模式然后做出相应的预测。这将是本书第 20 章的内容。不过，多数学术证据表明大多数技术分析都是废话。

最后一种分析范式是我们在本书中真正关心的，也是过去 50 年最成功的分析范式，为组合理论、衍生品定价以及风险管理构建了一个坚实的基础，这就是**数量分析**（quantitative analysis）。数量分析就是将股票价格或利率等金融变量视为随机变量，并且为这种随机性选择最好的模型。接下来，我们首先看看随机性为何重要，然后构建一个简单的、随机的股票价格模型。

3.3 为什么我们需要为随机性建模：Jensen 不等式

为什么“随机性”对为衍生品世界建模如此重要？为什么我们不尝试尽最大的努力预测未来股票价格并由此得出期权的回报？为了尽量了解随机性在期权理论中的重要性，我们引入一个非常简单的数学概念：**Jensen 不等式**（Jensen's Inequality）。

当前的股票价格为 100 美元，我们假设一年后股票价格等可能性的为 50 美元或 150 美元（见图 3-1）。那么，以该股票为标的资产、一年后到期且执行价格为

100美元的看涨期权应该如何定价呢？

定价可以有两种方法。

针对两种可能的情形，我们可以说一年后股票的预期价格为100美元（未来的可能价值的均值）。看涨期权的回报将会是0，因为它正好处于平价状态。因此，回报的现值也是0。这是期权定价的正确方法吗？

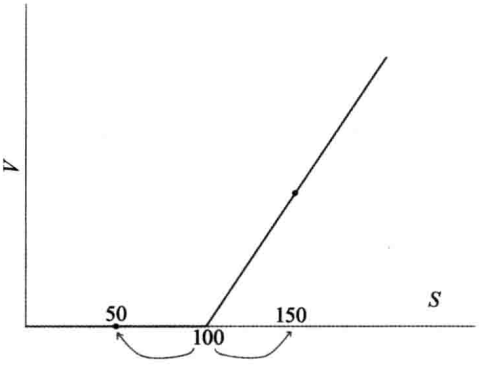


图3-1 未来的情形

也许不该是这样。你应该会预期大于0的价值，因为总有一半的可能得到回报。

另一种方法是，我们可以考虑两个可能的回报然后计算其期望值。如果股票价格下跌至50美元，则期权回报为0；如果股票价格上涨至150美元，则期权回报为50美元。因此，平均回报是25美元，我们可以将价值折现来给我们一些关于期权价值的想法。

事实证明，第二种计算方法更加接近现实中我们为期权的定价（尽管概率其实并不参与定价计算），我们将在本书中多次看到这种方法。这个计算也说明了另一个非常重要的关键点，即计算回报和期望的先后顺序是重要的。在这个例子中我们有

$$\text{回报(期望股价)}=0$$

然而

$$\text{期望[回报(股价)]}=25$$

这是Jensen不等式的一个简单例子。让我们引入一些符号。假设有一个随机变量S（在我们的例子中为股票价格）的凸函数$f(S)$（在我们的例子中为看涨期权的回报函数），那么

$$E[f(S)] \geqslant f(E[S]) \tag{3-1}$$

我们甚至可以近似得出公式左边比右边大多少，这可以通过S均值附近的泰勒级数得到。由

$$S = \bar{S} + \epsilon$$

其中$\bar{S}=E[S]$，因此$E[\epsilon]=0$。则有

$$E[f(S)] = E[f(\bar{S}+\epsilon)] = E\left[f(\bar{S}+\epsilon f'(\bar{S}) + \frac{1}{2}\epsilon^2 f''(\bar{S}) + \cdots\right]$$

$$\approx f(\bar{S}) + \frac{1}{2} f''(\bar{S}) E[\epsilon^2]$$

$$= F(E[S]) + \frac{1}{2} f''(E[S]) E[\epsilon^2]$$

所以，式（3-1）的左边比右边大约大

$$\frac{1}{2} f''(E[S]) E[\epsilon^2]$$

这显示了以下两个概念的重要性：

- $f''(E[S])$：期权的**凸性**（convexity）。通常来说，凸性增加了期权的价值。这也意味着我们从线性合约（远期和期货）中获得的任何直觉可能对诸如期权等非线性工具的应用没有帮助。
- $E(\epsilon^2)$：标的资产中的随机性及其**方差**（variance）。正如上文所述，为随机性建模是为期权建模的关键。

现在，我们已经对随机性为何重要有了一些了解，下面开始为一些资产建模。

3.4 股票、货币、商品和指数之间的相似之处

当你投资于某些产品（无论是股票、商品、艺术品或是赛马），你主要关心的是能否从投资中获得令人满意的收益。我们倾向于将一段时期内包括累计红利和资产价值在内的百分比增长率表示为**收益率**（return）：

$$\text{收益率} = \frac{\text{资产价值的变动} + \text{累计现金流}}{\text{资产的初始价值}}$$

这里我想区分一下百分比增长（或称相对增长）与绝对增长之间的差别。假设我们可以投资两只股票中的任何一只，二者价格平均每年增长都是 10 美元。股票 A 的当前价格为 100 美元，股票 B 的当前价格为 1000 美元。很显然，前者是一个更好的投资，在年末，股票 A 可能将会值大约 110 美元（如果期间没有其他事发生），而股票 B 大约值 1010 美元。二者都增长了 10 美元，但是股票 A 上涨了 10%，而股票 B 仅仅上涨了 1%。如果我们有 1000 美元可用于投资，选择投资 10 股 A 股票将比投资 1 股 B 股票更优。这说明当对资产进行建模时，我们应当关注的是收益率。就这一点来说，所有股票、货币、商品和股票市场指数都可

以进行类似的处理。那么我们希望从中获得什么样的收益呢？

估计资产收益率的重要内容就是估计资产价值中有多少不可预测性。下一节将说明，随机性在金融市场中扮演了多么举足轻重的角色，并开始建立一个考虑随机性的资产收益率的模型。

3.5 分析收益率

图 3-2 描绘了一家阿根廷集团企业佩雷斯公司在 1995 年 2 月到 1996 年 11 月的股票报价，它是一条非常典型的金融资产价格曲线。该资产在这期间大体上保持了上涨的趋势，但这远不能保证一定会获得收益。如果买卖的时机不对，你会损失一大笔资金。从该图中看到的不可预测性是金融建模的主要特征。正因为有如此多的随机性，金融资产的任何数学模型都必须涉及随机性并且需要一个概率论基础。

图 3-2 佩雷斯公司在 1995 年 2 月到 1996 年 11 月的股票报价

请记住，对我们来说，收益率比资产价格的绝对水平更重要，图 3-3 介绍了如何在电子表格上计算收益率。把第 i 天的资产价值记为 S_i，则第 i 天到第 $i+1$ 天的收益率由下式给出

$$\frac{S_{i+1}-S_i}{S_i}=R_i$$

（此处忽略掉了红利，它们很容易添加，

尤其是股票一年通常只获得 2 次或 4 次红利。）当然，我不需要使用每天的数据，这一点会在稍后说明。

日期	佩雷斯	收益率		
01-Mar-95	2.11		平均收益率	0.002916
02-Mar-95	1.90	-0.1	标准差	0.024521
03-Mar-95	2.18	0.149906		
06-Mar-95	2.16	-0.01081		
07-Mar-95	1.91	-0.11258	=AVERAGE(C3:C463)	
08-Mar-95	1.86	-0.02985		
09-Mar-95	1.97	0.061538		
10-Mar-95	2.27	0.15	=STDEVP(C3:C463)	
13-Mar-95	2.49	0.099874		
14-Mar-95	2.76	0.108565		
15-Mar-95	2.61	-0.05426		
16-Mar-95	2.67	0.021858		
17-Mar-95	2.64	-0.0107		
20-Mar-95	2.60	-0.01622	=(B13-B12)/B12	
21-Mar-95	2.59	-0.00275		
22-Mar-95	2.59	-0.00275		
23-Mar-95	2.55	-0.01232		
24-Mar-95	2.73	0.069307		
27-Mar-95	2.91	0.064815		
28-Mar-95	2.92	0.002899		
29-Mar-95	2.92	0		
30-Mar-95	3.12	0.069364		
31-Mar-95	3.14	0.005405		
03-Apr-95	3.13	-0.00269		
04-Apr-95	3.24	0.037736		
05-Apr-95	3.25	0.002597		
06-Apr-95	3.28	0.007772		
07-Apr-95	3.21	-0.02057		
10-Apr-95	3.02	-0.06037		
11-Apr-95	3.08	0.019553		
12-Apr-95	3.19	0.035616		
17-Apr-95	3.21	0.007936		
18-Apr-95	3.17	-0.01312		
19-Apr-95	3.24	0.021277		

图 3-3 计算资产收益率的电子表格

图 3-4 给出了佩雷斯公司股票的日收益率。这看起来很像“噪声”，而这正是我们将对其建模的方式。

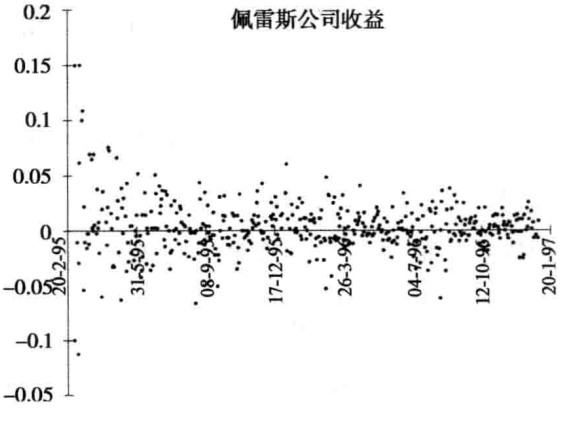


图 3-4 佩雷斯公司日收益率

收益率分布的均值为：

$$\bar{R} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} R_i \qquad (3\text{-}2)$$

样本标准差为：

$$\sqrt{\frac{1}{M-1}\sum_{i=1}^{M}(R_i - \bar{R})^2} \qquad (3\text{-}3)$$

其中 M 是样本中收益率的个数（比资产价格的数目少一个）。从本例中的数据我们可知均值为

0.002 916，标准差为0.024 521。

注意，日收益率的均值比标准差小很多，这在比较短的时间刻度上是金融数量领域非常典型的现象。在逐日交易数据上你观察到的将主要是股票价格中的噪声，也许要等上几个月才能观察到股票价格的趋势。

日收益率时间序列的频度分布很容易计算，并且对作图很有帮助。在Excel中使用工具/数据分析/柱状图便可以得到。图3-5给出了佩雷斯公司的日收益率频度分布。这个分布被转换成了均值为0、标准差为1以及曲线下面积为1的分布。该图同时也描绘了标准正态分布的概率密度函数作为对比

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\phi^2}$$

其中 ϕ 是标准正态变量。这两条曲线不完全一致但非常接近。

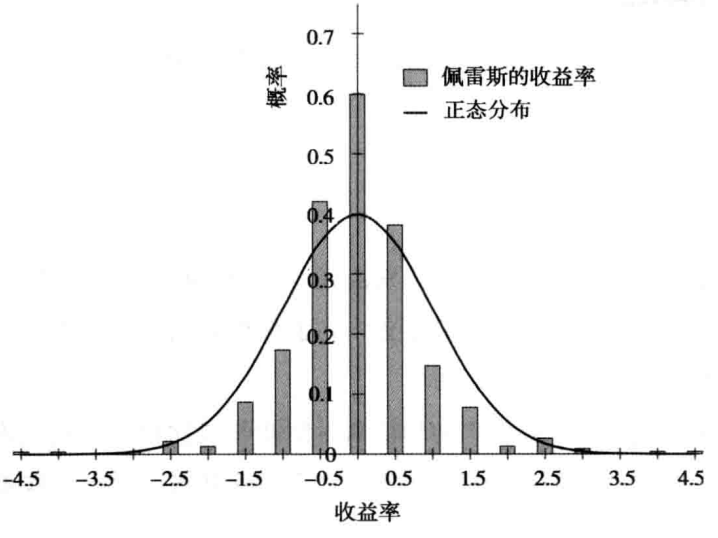


图3-5 佩雷斯公司日收益率的正态化频度分布和标准正态分布

假设我们相信经验收益率足够接近正态分布（因为这是一个很好的近似），那么就已经在建模的目标上取得了很大的进展。将把收益率看成一个随机变量，且服从一个具有已知且非零的常数均值和常数标准差的正态分布：

$$R_i = \frac{S_{i+1} - S_i}{S_i} = \text{均值} + \text{标准差} \times \phi$$

图3-6显示了彭博资讯计算的葛兰素公司的收益率分布。它没有被正态化。

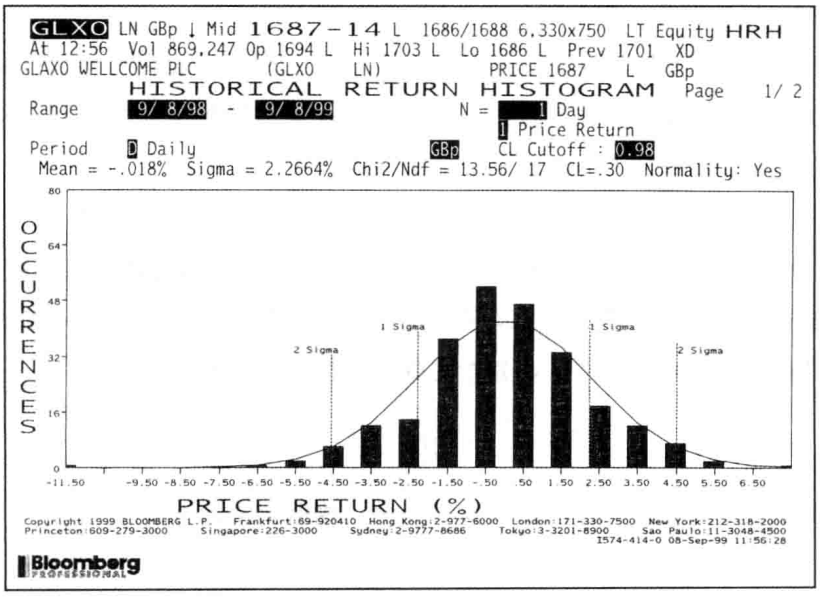


图 3-6 葛兰素公司的收益率柱状图

资料来源：Bloomberg L. P.

3.6 时间刻度

收益率序列的均值和标准差（分别由式（3-2）及式（3-3）估计）会如何随着记录资产价格的时间步长变化而变化？在上例中时间步长为 1 天，但假设按小时或周间隔取样，将如何影响分布？

将时间步长记为 δt。收益率的均值和时间步长成比例。也就是说，取样的时间间隔越大，平均来说在这期间资产价格将会变动越多。对于一些被假设为常数的 μ，我们可以写出

$$\text{均值} = \mu \delta t$$

在佩雷斯公司的例子中，时间刻度为 1 天，均值为 0.002 916，$\delta t = 1/252$，因此

$$\mu = 252 \times 0.002\,916 = 0.735 = 73.5\%$$

暂时忽略随机性，模型可简化为

$$\frac{S_{i+1} - S_i}{S_i} = \mu \delta t$$

经过变形，我们得到

$$S_{i+1} = S_i(1 + \mu \delta t)$$

如果资产在 $t=0$ 时刻价格为 S_0，那么一个时间步长 $t=\delta t$ 之后有

$$S_1 = S_0(1+\mu\delta t)$$

两个时间步长 $t=2\delta t$ 之后有

$$S_2 = S_1(1+\mu\delta t) = S_0(1+\mu\delta t)^2$$

M 个时间步长 $t=M\delta t=T$ 后有

$$S_M = S_0(1+\mu\delta t)^M$$

这正是

$$S_M = S_0(1+\mu\delta t)^M = S_0\,e^{M\log(1+\mu\delta t)} \approx S_0\,e^{\mu M\delta t} = S_0\,e^{\mu T}$$

固定总时间长度 T，在时间步长趋于 0 的极限情况，这个近似会变成精确的。这一结果非常重要，有以下两个原因：

第一，在没有任何随机性的情况下，资产呈指数增长，就像银行中的存款一样。

第二，在时间步长趋于 0 的极限下，这个模型是有意义的。如果我选择用 δt 的任意其他幂次来度量收益率的均值，那么结果将是一个不重要的模型（$S_T=S_0$）或资产价值趋于无穷（$S_T=\pm\infty$）。

第二点可以引导我们选择对收益率的随机成分的度量方法。收益率的标准差如何随时间步长 δt 变化？（回忆一下，方差可以累加而标准差不行。）再次考虑 $T/\delta t$ 步后会发生什么，其中每步步长为 δt（也就是说，在总时间 T 之后）。在式（3-3）的平方根中有很多项，数量为 $T/\delta t$。当 δt 趋于 0 时，为了保证标准差为有限值，表达式中每一项都必须是 $O(\delta t)$。由于每一项是一个收益率的平方，故在时间步长 δt 后，资产收益率的标准差必须是 $O(\delta t^{1/2})$：

$$\text{标准差} = \sigma\delta t^{1/2}$$

其中 σ 是衡量随机性大小的一个参数，这个参数越大，收益率的不确定性越大。我们暂时假设它是一个常数。在佩雷斯公司的例子中，每天的标准差为 0.024 521，因此

$$\sigma = \sqrt{252}\times 0.024\,531 = 0.389 = 38.9\%$$

将这些量代入资产收益率模型中

$$R_i = \frac{S_{i+1}-S_i}{S_i} = \mu\delta t + \sigma\phi\delta t^{1/2} \tag{3-4}$$

可以将式（3-4）改写成

$$S_{i+1}-S_i = \mu S_i\delta t + \sigma S_i\phi\delta t^{1/2} \tag{3-5}$$

该方程的左边是资产价格从第 i 步到第 $i+1$ 步的变化，方程右边是“模型”。我们可以把这个方程当做资产价格的**随机游走**（random walk）模型。如图 3-7 所示。我们准确知道今天的资产价格位于何处，但是明天的价格是未知的。根据式(3-5)，它服从与当前价值有关的分布。

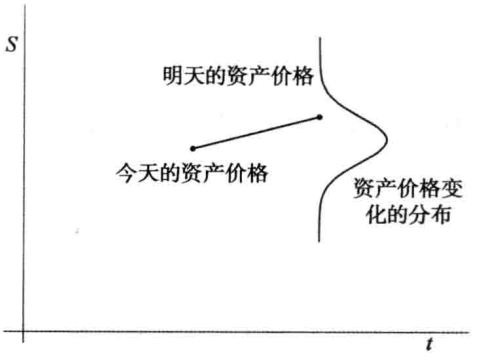


图 3-7 随机游走的一个示意图

3.6.1 漂移

参数 μ 称为**漂移率**（drift rate）、**预期收益率**（expected return）或资产的**增长率**（growth rate）。在统计上它是非常难以衡量的，因为与均值成比例的参数 δt 通常非常小。可以通过下式估算

$$\mu = \frac{1}{M\delta t}\sum_{i=1}^{M} R_i$$

时间单位通常用年计算，此时 μ 以年化增长率的形式出现。

在经典期权定价理论中，漂移率几乎不起任何作用。所以，即使它非常难度量也没太大关系。[⊖]

3.6.2 波动率

参数 σ 称为资产的**波动率**（volatility）。它可以通过下式估计

$$\sqrt{\frac{1}{(M-1)\delta t}\sum_{i=1}^{M}(R_i-\overline{R})^2}$$

同样，通常它也经常以年化的形式来表示。

波动率在衍生品理论中是最重要也是最难以捉摸的量。我会一遍又一遍地论述它的估计和建模。

因为漂移率和波动率都与时间成比例，它们对资产路径会产生不同的影响。若时间区间很短，漂移率作用不明显，波动率会起主导作用。而在较长的时间段内，比如说 10 年，漂移率就变得很重要了。图 3-8 是一个已实现的资产价格对数的路径，以及它的预期路径和一个“置信区间”。本例中置信区间为 1 个标准差。

⊖ 在非经典理论和组合管理中，它确实经常起关键作用。

在正态假设下这意味着资产价格的对数在 68%的时间内会位于这一区域。均值路径随着时间呈线性增长，而置信区间与时间的平方根成比例增长。因此，在很短的时间刻度内，波动率起主导作用。⊖

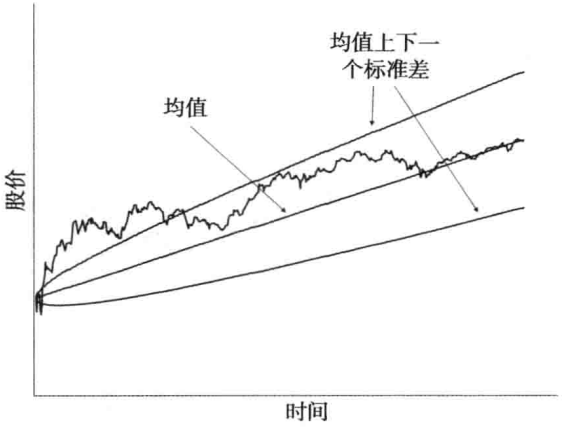


图 3-8　某个资产价格对数的路径、预期路径以及预期路径上下各一个标准差的位置

3.7　估计波动率

最常用的波动率估计为：

$$\sqrt{\frac{1}{(M-1)\delta t}\sum_{i=1}^{M}(R_i-\overline{R})^2}$$

如果 δt 足够小，那么平均收益率 $\overline{R}$ 可以忽略。对于很小的 δt，也可以使用如下形式

$$\sqrt{\frac{1}{(M-1)\delta t}\sum_{i=1}^{M}(\log S(t_i)-\log S(t_{i-1}))^2}$$

其中 $S(t)$ 是第 t 日的收盘价。

波动率不大可能一直保持常数。变化的经济环境、季节性等会难以避免地导致波动率随时间变化。如果你想知道今天的波动率，就必须在计算中用到一些过去的数据。遗憾的是，这意味着无法确保你计算的是今天的波动率。

⊖　为什么我使用对数？因为对数的改变量与资产的收益率相关。

通常，你会使用日收盘价来计算日收益率并且在上面的方程中使用过去 10 天、30 天、100 天等的日收益率，或者你可以使用更长或更短期限的收益率。因为所有的收益率都是等权重的，所以当用它们估计波动率时，任何大的收益率都会留在波动率的估计中直到 10 天（或 30 天或 100 天）过去。这会导致波动率上升到较高水平，变得完全不可信。

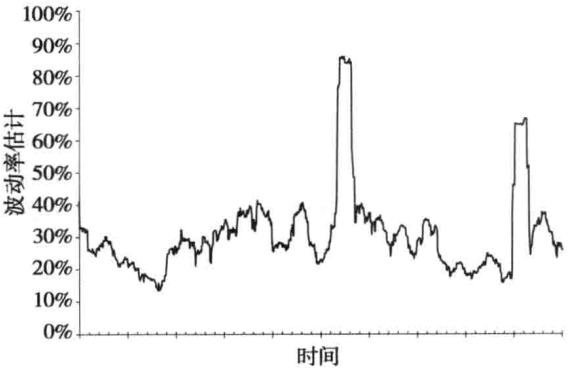


图 3-9 使用移动窗口波动率估计时的平顶效应

图 3-9 显示了一个与股价突然大跌相联系的不真实的高地效应。

由于波动率不能被直接观察到，并且因为在简单衡量波动率的方法中存在高地效应，我还是建议你使用波动率的其他估计方法。我们将在第 49 章中介绍更多的方法。

3.8 电子表格中的随机游走

随机游走式（3-5）可以写成一个由 S_i 得到 S_{i+1} 的递推式的形式：

$$S_{i+1} = S_i(1 + \mu\delta t + \sigma\phi\delta t^{1/2}) \tag{3-6}$$

我们很容易使用电子表格来模拟该模型。在模拟时，必须输入一些参数，即资产的初始价格、时间步长 δt、漂移率 μ、波动率 σ 以及总时间步数，然后在每一个时间步长从正态分布中选择一个随机数 ϕ。在第 80 章将深入讨论模拟问题，我们暂时仅仅介绍在电子表格中可以快速生成的正态变量的近似（具体操作是，加总 12 个由［0，1］均匀分布产生的随机变量值，再减去 6）：

$$\left(\sum_{i=1}^{12} \text{RAND}()\right) - 6$$

Excel 电子表格函数 RAND() 是一个生成［0，1］间均匀分布随机变量的函数命令。

图 3-10 给出了用电子表格模拟资产价格随机游走的细节。

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	资产	100		时间	资产			
2	漂移率	0.15		0	100			
3	波动率	0.25		0.01	98.38844			
4	时间步长	0.01		0.02	94.28005			
5				0.03	95.40441			
6				0.04	92.79735			
7				0.05	93.45168			
8				0.06	93.99664			
9				0.07	97.66597			
10				0.08	96.52319			
11				0.09	98.38844			
12				0.1	94.28005			
13				0.11	99.60075			
14				0.12	99.01974			
15				0.13	100.8729			
16				0.14	101.2378			
17				0.15	102.4736			
18				0.16	102.7694			
19				0.17	100.7347			
20				0.18	102.7021			
21				0.19	107.3493			
22				0.2	109.887			
23				0.21	108.688			
24				0.22	110.7826			
25				0.23	112.8932			
26				0.24	111.0625			
27				0.25	111.6157			
28				0.26	112.5443			
29				0.27	111.9805			
30				0.28	115.6002			
31				0.29	117.9831			
32				0.3	115.2694			
33				0.31	117.4374			

=D4+$B$4

=E7*(1+$B$2*$B$4+$B$3*SQRT($B$4)*(RAND()+RAND()+RAND()+RAND()
+RAND()+RAND()+RAND()+RAND()+RAND()+RAND()+RAND()+RAND()-6))

图 3-10 电子表格中随机游走的模拟

3.9 维纳过程

到目前为止，我们拥有了一个允许资产价格在一个时间步长之后取任意值的模型。略有进展，但还是存在离散的时间步长，仍然没有达到连续时间的目标。本节是对公式（3-4）的方程取连续时间极限时的一个简要介绍。我们将开始介绍随机建模和维纳过程领域的思想，并在第 4 章中进行深入讨论。

现在我将用 d 表示某个量的“变化”，那么 dS 表示“资产价格的变化”。不过这个变化是在连续时间下的，所以我们需要取极限 $\delta t=0$。式（3-5）右边第一项 δt 变成了 dt，不过第二项的转变更加复杂。

我们不能直接用 $dt^{1/2}$ 来代替 $\delta t^{1/2}$。如果确实坚持零步长极限，那么任何 $dt^{1/2}$ 的随机项的影响将胜过任何 dt 的确定项。然而，在我们的问题中，$dt^{1/2}$ 前的因子具有 0 均值，因此它的影响未必胜过漂移率。显然，在极限条件下模型出现了微妙的变化。

事实表明，由于随机项的方差是 $O(\delta t)$，我们可以为离散时间模型建立一个可行的连续时间极限（将在第 4 章看到），这将把我们带到维纳过程的世界。

我将把 $\phi\delta t^{1/2}$ 项记为

$$\mathrm{d}X$$

你可以把 $\mathrm{d}X$ 视为一个服从均值为 0、方差为 $\mathrm{d}t$ 的正态分布的随机变量：

$$E[\mathrm{d}x] = 0 \text{ 和 } E[\mathrm{d}x^2] = \mathrm{d}t$$

虽然并不完全正确，但对于描绘一个正确的概念它已经足够接近了，这被称为**维纳过程**（Wiener process）。重要的是，我们可以使用维纳过程建立一个连续时间理论来代替正态分布和离散时间。

3.10 股票、货币、商品和指数普遍认可的模型

使用维纳过程符号，在连续时间条件下资产价格模型可以写成

$$\mathrm{d}S = \mu S\mathrm{d}t + \sigma S\mathrm{d}X \tag{3-7}$$

这是我们的第一个**随机微分方程**（stochastic differential equation），是资产价格的一个连续时间模型。它是最被普遍接受的关于股票、货币、商品和指数的模型，并且是众多金融理论的基础。

现在我们已经建立了一个关于股票的简单模型，我们将会多次使用它。你可能会问，如果股票市场是如此的随机，那么基金经理如何证明他们应该获取佣金呢？他们能设法战胜市场吗？他们真的那么有洞察力还是市场根本就不是随机的呢？好吧，我不会发誓说市场是随机的，但是我可以自信地说基金经理并没有战胜市场。图 3-11 显示了战胜由英国所有股票构成的指数的基金的百分比。可以看到，无论是 1 年、3 年、5 年还是 10 年的期限，大多数基金甚至还不能保持与市场相同的收益率。从统计上来说，会有少数基金战胜市场，但仅仅是运气。也许投资者应该投资于一个与其他所有基金相反的基金。这可能真是个好主意，不过考虑了管理费用和交易成本之后这一项投资的表现多半同样让人失望。这并不能证明市场是随机的，但它充分表明我的大多数个人头寸应该投资于指数基金。

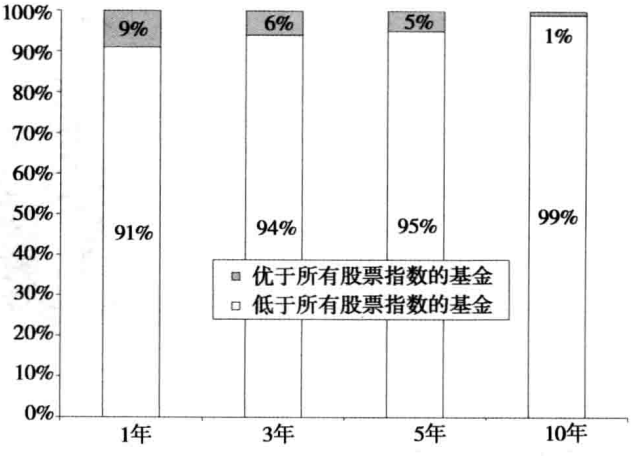


图 3-11 截至 1998 年 12 月同英国所有股票构成的指数相比较的基金业绩

3.11 总结

本章介绍了一个关于资产价格随机游走的简单模型。最初我在离散时间中建立该模型，展示模型中各项的含义以及它们如何随着时间步长成比例变动，并且展示了如何在电子表格中操作这个模型。

本书的大部分是关于资产的连续时间模型。随机游走的连续时间模型涉及诸如随机微积分和维纳过程的概念。本章简要介绍了这些概念，并将继续解释随机微积分的基础理论，以便为本书的后续内容提供必要的知识背景支持。

延伸阅读

- Mandelbrot（1963）和 Fama（1965）做了一些关于金融数据分析的早期工作。
- 关于随机游走和维纳过程的介绍参见 Øksendal（1992）和 Schuss（1980）。
- 一些高频数据可以从 Olsen Association 订购，网址是 www.olsen.ch。它不是免费的，但也不贵。
- 关于对股票市场行为的洞察，Malkiel（1990）的著名书籍非常值得一读。请阅读他关于黑猩猩、眼罩和飞镖的论述。实际上，如果你还没有阅读过 Malkiel 的书，那么请确保在读完本书后你的下一本书就是他的。

第 4 章

基本的随机微积分

本章内容

- 所有你需要了解的随机微积分知识
- 马尔科夫过程和鞅的含义
- 布朗运动
- 随机积分
- 随机微分方程
- 一维及多维伊藤引理

4.1 引言

我们假定金融市场上标的资产具有随机特性，因此随机微积分对我们为金融过程进行数学建模非常有帮助。由于这种工具十分重要，我希望每个人都能掌握它。为了达到这个目的，我尽可能地将本章写得通俗易懂。我希望读者在读完本章后能理解各个专业术语的含义（它们大多数比较简单），更重要的是，能以最简单的方式掌握随机微积分方法，避免不必要的困扰。

金融领域的大多数学术文章都具有非常“纯粹”的数学假设。有时候在数学

上做到如此严谨是合情合理的，但这样做的结果多半只能使文章内容变得晦涩难懂。当某个学术领域刚刚兴起（比如现在还非常年轻的数量金融领域），该领域的研究通常都非常严谨，这是因为学者对于使用的方法和获得的结果缺乏自信。随着这个领域慢慢发展，学者们逐渐变得游刃有余，我们就能看到更多、更快的研究进展。

4.2　一个具有启发性的例子

让我们来掷硬币。每次出现正面朝上我给你 1 美元，反面朝上你给我 1 美元。图 4-1 显示了在 6 次投掷的过程中你的财产变化。这一次的试验结果为“反正正反正反”，最后我们打平了。

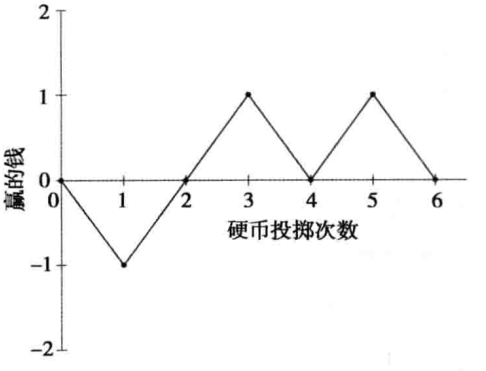


图 4-1　一次硬币试验的结果

如果用 R_i 表示你在第 i 次试验中的输赢，即 1 美元或 -1 美元，那么我们有

$$E[R_i] = 0 \quad E[R_i^2] = 1$$

$$\text{以及} \quad E[R_i R_j] = 0$$

此例中，这些期望是不是条件期望对结果没有影响。换句话说，即使我连续掷出 5 个正面，第 6 次试验出现任一结果的可能性也不会受到影响。对赌徒来说，这个性质同样适用于掷骰子和轮盘赌博，但不适用于扑克牌里的黑杰克。在黑杰克游戏中，同一副牌在连续的赌局中被重复使用，某一回合的胜负概率将取决于之前回合中扑克牌的分配情况。这也是为什么从长期来看在黑杰克游戏中赢钱是有可能的，而在轮盘赌博中则不可能。

用 S_i 表示在前 i 次投掷后你的总输赢

$$S_i = \sum_{j=1}^{i} R_j$$

为了便于之后进行分析，令 $S_0 = 0$，即开始时你的输赢为 0。

如果要计算 S_i 的期望值，我们当前拥有的信息的确有影响。如果是在所有试验开始之前计算未来事件的期望值，那么

$$E[S_i] = 0 \quad \text{并且} \quad E[S_i^2] = E[R_1^2 + 2R_1R_2 + \cdots] = i$$

假设现在已经进行了 5 次投掷，我们该如何利用这一已知信息？第 6 次试验的期

望值会受什么影响？这就是**条件期望**（conditional expectation）。在给定前 5 次投掷结果的前提下，S_6 的期望值为

$$E[S_6 \mid R_1, \cdots, R_5] = S_5$$

4.3 马尔科夫性质

这个结果很特别：在给定所有历史事件的条件下，随机变量 S_i 的分布仅取决于前一观测值 S_{i-1}。这种性质被称为**马尔科夫性质**（Markov property）。通俗地说，这种随机游走没有“记忆”，它只知道自己所处的位置。请注意，随机变量 S_i 的期望值不是必须等于 S_{i-1}。

更一般地说，对于满足马尔科夫性质的变量 S，若给定关于某些 S_j 的历史信息（其中 j 满足 $1 \leqslant j < i$），那么在预测 S_i 的值时唯一能够用到的信息便是所有已知信息中下标 j 最大的 S_j 的值。

本书将要介绍的金融模型几乎都满足马尔科夫性质，这种性质在金融建模中既基础又重要。本书还将介绍一些具有“记忆性”的模型，即除了 S_{i-1} 之外，S_i 的期望值还受其他信息影响。我还会介绍几个特殊的模型，其未来期望与整条历史路径上的信息都有关。

4.4 鞅性质

掷硬币试验还体现了另一个在金融领域十分重要的性质。假设当前已经进行了 5 次投掷，那么你在第 6 次（或者更多次）投掷之后的总输赢的期望值等于当前的总输赢。也就是说，未来任意时点的总输赢状况的条件期望都等于当前值：

$$E[S_i \mid S_j, j < i] = S_j$$

这个性质被称为**鞅性质**（martingale property）。

4.5 二次变差

下面给出随机游走的**二次变差**（quadratic variation）的定义：

$$\sum_{j=1}^{i} (S_j - S_{j-1})^2$$

因为每次投掷之后输赢的变化量总为 1 美元，$|S_j - S_{j-1}| = 1$，所以二次变差的值总等于 i：

$$\sum_{j=1}^{i} (S_j - S_{j-1})^2 = i$$

接下来我继续利用掷硬币试验进行说明，以引入连续时间上的随机游走。

4.6　布朗运动

现在改变掷硬币试验的规则。第一，必须在时间 t 内完成 6 次投掷，所以每次投掷所用的时间为 $t/6$。第二，每次投掷的输赢不再是 1 美元，而是 $\sqrt{t/6}$ 美元。

显然，这个新的试验同样满足马尔科夫性质和鞅性质，并且整个试验过程的二次变差为：

$$\sum_{j=1}^{6} (S_j - S_{j-1})^2 = 6 \times \left(\sqrt{\frac{t}{6}}\right)^2 = t$$

我对试验进行了特别设计，使得二次变差的值恰好等于所用时间 t。

并不是非得进行 6 次试验，所以这里再次改变规则：我们要在时间 t 内进行 n 次投掷，每次投掷的输赢改为 $\sqrt{t/n}$。这个试验依旧满足马尔科夫性质和鞅性质，二次差分仍然为：

$$\sum_{j=1}^{n} (S_j - S_{j-1})^2 = n \times \left(\sqrt{\frac{t}{n}}\right)^2 = t$$

现在让 n 不断增大，将导致的结果是：游戏的速度越来越快，每两次投掷之间的时间间隔越来越短，每次投掷的输赢也越来越小。规则中每个变量的尺度都是经过认真选择的：时间间隔以 n^{-1} 的方式减小，而输赢的大小仅以 $n^{-1/2}$ 的方式变小。

图 4-2 是一系列试验的结果，每次试验的总时长都是 1，而投掷的次数不断增加。

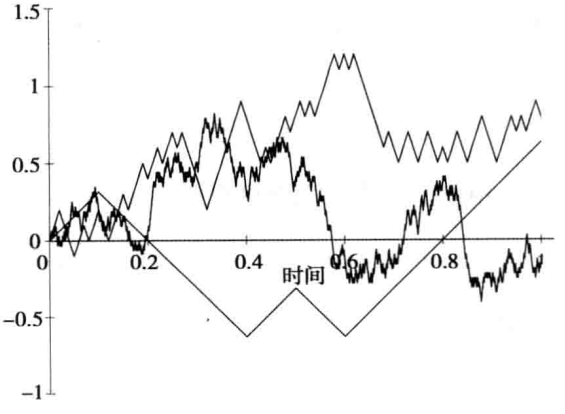


图 4-2　一系列掷硬币试验的结果，极限情况是布朗运动

在趋于极限 $n \to \infty$ 的过程中，随机游走的结果仍为有限值。在初始值为 0 的条件下，期望值为

$$E[S(t)] = 0$$

方差为

$$E[S(t)^2] = t$$

其中 $S(t)$ 表示你的总输赢，它也是经过时间 t 之后随机变量的取值。令时间间隔趋于 0，我们将这种极限下的随机游走称为**布朗运动**（Brownian motion），记为 $X(t)$。

以下是布朗运动的重要性质：

- **有限性**：如果将输赢大小或时间间隔设为其他任何形式的尺度，都会使得随机游走在有限的时间内或是趋于无穷大，或是趋于 0。增量与时间的平方根相匹配是很重要的。
- **连续性**：运动的路径是连续的，没有间断点。布朗运动是离散时间上的随机游走的极限形式。
- **马尔科夫性质**：给定直到时间 $\tau < t$ 的信息集，$X(t)$ 的条件分布只取决于 $X(\tau)$。
- **鞅性质**：给定直到时间 $\tau < t$ 的信息集，$X(t)$ 的条件期望值等于 $X(\tau)$。
- **二次变差**：如果用 $n+1$ 个时间点 $t_i = \frac{it}{n}$ 将时间 $0 \sim t$ 划分为 n 段，那么

$$\sum_{j=1}^{n} (X(t_j) - X(t_{j-1}))^2 \to t \quad （在数学上“几乎必然”）$$

- **正态性**：在有限的时间间隔下，$X(t_i) - X(t_{i-1})$ 服从均值为 0、方差为 $t_i - t_{i-1}$ 的正态分布。

在通过一系列试验了解了布朗运动的概念和性质后，我们可以忘记那些试验，只需要记住由其性质所定义的布朗运动。这些性质对金融模型非常重要。

4.7 随机积分

用以下方式定义**随机积分**（stochastic integral）：

$$W(t) = \int_0^t f(\tau) \mathrm{d}X(\tau) = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} f(t_{j-1})(X(t_j) - X(t_{j-1}))$$

其中

$$t_j = \frac{jt}{n}$$

在对其进行任何处理或是对其性质进行任何讨论之前，我想强调的是，我们

取被积函数 $f(t)$ 在左侧点 t_{j-1} 的值进行求和。被积函数的取值不能含有与之相乘的随机增量的信息，即这个积分必须是**非预知**（non-anticipatory）的，这一点至关重要。从金融意义上看，人们都是先做出决策（例如选择一个组合进行投资），然后才知道相应股价的变化。在金融领域中选择这样的积分形式是很自然的，因为它可以确保当前决策不会使用未来信息。

4.8 随机微分方程

随机积分的定义有现实意义，对任何随机微积分理论都很重要（下一节将介绍这种定义带来的一些重要性质）。不过我们常用一种简化的记法来表达随机积分，例如

$$W(t) = \int_0^t f(\tau)\mathrm{d}X(\tau) \qquad (4\text{-}1)$$

对式（4-1）进行“微分”后简化为

$$\mathrm{d}W = f(t)\mathrm{d}X \qquad (4\text{-}2)$$

这里可以将 $\mathrm{d}X$ 看作 X 的增量，即均值为 0、标准差为 $\mathrm{d}t^{1/2}$ 的正态随机变量。

式（4-1）和式（4-2）是等价的。进行这种简化的原因之一是，式（4-2）和普通的随机微分方程相似。我们不会为了让它和普通随机微分方程看起来一模一样而进一步将等式两边同时除以 $\mathrm{d}t$，否则我们又要面对如何定义 $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}$ 这一难题。

进一步讨论这种方法，请思考下式是如何得到的：

$$\mathrm{d}W = g(t)\mathrm{d}t + f(t)\mathrm{d}X \qquad (4\text{-}3)$$

它是下式的简化

$$W(t) = \int_0^t g(\tau)\mathrm{d}\tau + \int_0^t f(\tau)\mathrm{d}X(\tau)$$

具有式（4-3）形式的等式被称为**随机微分方程**（stochastic differential equation）。不过这类方程的精确定义来自等价的且在数学上更为准确的随机积分概念。本书几乎所有章节都出现了上述的简化法表示，应该不会给读者带来困惑。

把随机微分方程看作以下形式可以帮助你更好地理解：

$$\boxed{\mathrm{d}\ \underline{\text{Something}} = \underline{\text{Deterministic}}\ \mathrm{d}t + \underline{\text{Random}}\ \mathrm{d}X}$$

可以这样看：Something（某物）是你正在进行建模的东西（股价、期权价格、利率、波动率等），Deterministic（确定项）是排除了随机性之后表示“某物”如何增长的函数，而 Random（随机项）是另一个函数，表示“某物”的随机性大小。希望这样理解对你有帮助！

4.9 均方离差极限

接下来要讨论的是**均方离差极限**（mean square limit）这个专业术语，它能帮助我们对随机积分进行精确定义。我将从最简单的例子开始阐释这个概念。

考虑

$$E\left[\left(\sum_{j=1}^{n}(X(t_j)-X(t_{j-1}))^2-t\right)^2\right] \tag{4-4}$$

其中

$$t_j=\frac{jt}{n}$$

式（4-4）展开后得到

$$E\left[\sum_{j=1}^{n}(X(t_j)-X(t_{j-1}))^4+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j<i}(X(t_i)-X(t_{i-1}))^2(X(t_j)\right.$$

$$\left.-X(t_{j-1}))^2-2t\sum_{j=1}^{n}(X(t_j)-X(t_{j-1}))^2+t^2\right]$$

由于 $X(t_j)-X(t_{j-1})$ 服从均值为 0、方差为 t/n 的正态分布，那么

$$E[(X(t_j)-X(t_{j-1}))^2]=\frac{t}{n}$$

并且

$$E[X((t_j)-X(t_{j-1}))^4]=\frac{3t^2}{n^2}$$

因此式（4-4）变为

$$n\frac{3t^2}{n^2}+n(n-1)\frac{t^2}{n^2}-2tn\frac{t}{n}+t^2=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$n\to\infty$时等式两边趋于 0。因此，在“均方离差极限”的意义上，我们说

$$\sum_{j=1}^{n}(X(t_j)-X(t_{j-1}))^2=t$$

由于显然的原因，上式通常写成

$$\int_0^t (\mathrm{d}X)^2 = t$$

虽然本书后面的部分不会用到这个结果或均方离差极限的方法，但在之后的“证明”中如果提到“相等”，它们都是在均方离差极限意义下相等。

4.10 随机变量函数和伊藤引理

接下来引入随机变量函数的概念。图 4-3 显示了某个布朗运动 $X(t)$ 和函数 $F(X)=X^2$ 的一个具体的实现。

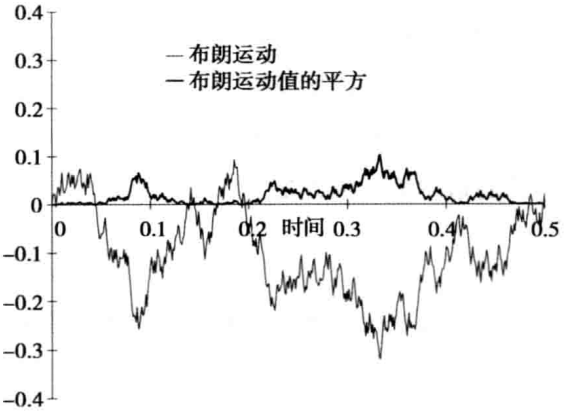


图 4-3 布朗运动及其平方的一个具体实现

显然，X 是随机的（这是我们的设定），因此 $F(X)$ 也是随机的。既然 F 是随机的，它所服从的随机微分方程应该是什么形式呢？

若 $F=X^2$，那么 $\mathrm{d}F=2X\,\mathrm{d}X$ 是否正确？

答案是否定的。普通的微积分法则通常在随机环境下不适用。那么这种环境下的微积分法则是什么呢？

下面将“推导”在随机微积分中最重要的法则，即**伊藤引理**（Itô's lemma）。推导过程简单易懂，虽然不严谨但具有启发性。这里用 $F(X)$ 代表任一函数来完成推导。

推导过程中我将引入几个不同的时间刻度。第一个时间刻度非常小，我们将它写成如下形式：

$$\frac{\delta t}{n} = h$$

这个时间刻度是如此之小，以至于函数 $F(X(t+h))$ 可以用以下泰勒级数近似

$$\begin{aligned} &F(X(t+h)) - F(X(t)) \\ &= (X(t+h) - X(t))\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}X}(X(t)) + \frac{1}{2}(X(t+h) - X(t))^2 \frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}X^2}(X(t)) + \cdots \end{aligned}$$

由此可以得到

$$(F(X(t+h)) - F(X(t))) + (F(X(t+2h)) - F(X(t+h))) + \cdots$$

$$+(F(X(t+nh))-F(X(t+(n-1)h)))$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(X(t+jh)-X(t+(j-1)h))\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}X}(X(t+(j-1)h))$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}X^2}(X(t))\sum_{j=1}^{n}(X(t+jh)-X(t+(j-1)h))^2+\cdots$$

其中用到了以下近似

$$\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}X^2}(X(t+(j-1)h))=\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}X^2}(X(t))$$

近似的误差保持在要求的精确度范围内。

等式左边可以化简为

$$F(X(t+nh))-F(X(t))=F(X(t+\delta t))-F(X(t))$$

等式右边的第一项正是

$$\int_t^{t+\delta t}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}X}\mathrm{d}X$$

的定义。第二项在均方离差极限意义下等于

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}X^2}(X(t))\delta t$$

那么，我们有

$$F(X(t+\delta t))-F(X(t))=\int_t^{t+\delta t}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}X}(X(\tau))\mathrm{d}X(\tau)+\frac{1}{2}\int_t^{t+\delta t}\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}X^2}(X(\tau))\mathrm{d}\tau$$

现在将上述结论以更长的时间刻度推广（从 0 一直增加到 t），在此过程中 F 的值一定有显著变化，我们得到

$$\boxed{F(X(t))=F(X(0))+\int_0^t\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}X}(X(\tau))\mathrm{d}X(\tau)+\frac{1}{2}\int_0^t\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}X^2}(X(\tau))\mathrm{d}\tau}$$

这就是积分形式的伊藤引理，通常被写为

$$\boxed{\mathrm{d}F=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}X}\mathrm{d}X+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}X^2}\mathrm{d}t} \tag{4-5}$$

现在我们可以回答之前的问题：如果 $F=X^2$，那么 F 满足的随机微分方程是什么？此例中有

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}X}=2X \quad 和 \quad \frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}X^2}=2$$

由伊藤引理得到

$$dF = 2X\,dX + dt$$

这与 X 是确定性变量时得到的微分方程不一样。通过积分我们得到

$$X^2 = F(X) = F(0) + \int_0^t 2X dX + \int_0^t 1 d\tau = \int_0^t 2X dX + t$$

因此

$$\int_0^t X dX = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}t$$

4.11　伊藤引理的解释

当我们开始为期权定价时，伊藤引理将会变得非常重要。如果能通过掌握一些简单的随机微积分法则来得心应手地处理随机变量，你会发现大多数期权理论都相当直观易懂。

为了帮助你达到这个目标，同时也为了让你对伊藤引理将发挥的作用有所了解，请看图 4-4。

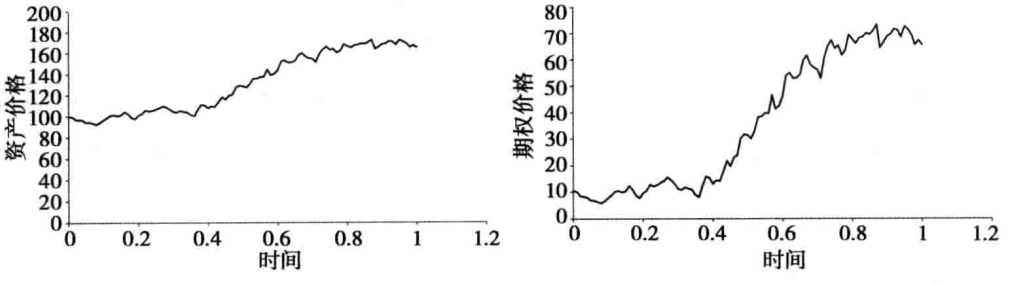


图 4-4　某只股票价格及其期权价格的模拟结果

左图是模拟得到的股票价格，它服从简单的对数正态随机游走；右图是该股票的某个期权的价格。[⊖]注意，左右两图具有一致的趋势（总体来看都在上升）并且都具有随机因素（值总是上下波动）。

它们看起来都具有随机性，而且我们也已知道股票价格满足以下随机微分方程：

$$dS = \mu S dt + \sigma S dX$$

那么，或许期权的价格（记为 $V(S, t)$）也满足如下随机微分方程

⊖　这个期权究竟是看涨、看跌还是其他更加奇异的期权并不重要，这里讨论的概念适用于所有期权。

$$dV = _____\, dt + _____\, dX$$

现在的问题是：横线内应该填什么？伊藤引理恰好可以给我们答案。

这个问题在以后讨论布莱克－斯科尔斯理论时很重要，因为只要知道了期权价格随机性的大小与股票价格的关系，我们就有了通过买入 1 份期权、卖出某个特定数量的股票来消除随机性的“处方”。

4.12 伊藤引理和泰勒级数

推导了伊藤引理之后，我们来探讨结果中隐含的直觉，让它变得更容易推导和使用。之后，再对它进行略微一般化的讨论。

如果我们完全忽略 X 的随机性并把 dX 看作 X 的微小增量，用这种“天真”的方法对 F 进行泰勒级数展开，在忽略高阶项的前提下得到

$$F(X+dX) = F(X) + \frac{dF}{dX}dX + \frac{1}{2}\frac{d^2F}{dX^2}dX^2$$

同样，我们可能会认为 $F(X+dX)-F(X)$ 就是“F 的变化”，所以有

$$dF = \frac{dF}{dX}dX + \frac{1}{2}\frac{d^2F}{dX^2}dX^2$$

上式和式（4-5）很相似（并且泰勒级数确实和伊藤引理很相似），唯一的区别是上式含有 dX^2 而没有 dt。不过由于前面我们提到过，在均方离差极限意义上

$$\int_0^t (dX)^2 = t$$

所以我们可能会认为

$$dX^2 = dt \tag{4-6}$$

虽然这种推导过程一点都不严谨（因为它本来就是错的），但最终的结果是正确的。值得庆幸的是，在平时的练习中用“经验法则”式（4-6）配合泰勒级数展开，通常都能得到正确的答案，出错的概率很小。虽然在数学上这种方法是不正确的，但几乎可以确定[⊖]用这种方法能得到正确的结果。每次需要对随机变量的函数进行微分时，我几乎都会使用这种方法。第 48 章将说明在什么情况下使用泰勒级数展开法是正确且更优的选择。

⊖ 或者应该说“几乎可以肯定”。

4.12.1 直觉

为了更好地理解伊藤引理，我们还要做以下进一步的思考。

我们在4.10节中讨论了随机积分（即把无数个随机变量进行累加的过程），它是处理随机变量的“正统”方法。

累加的结果有几个来源：随机变量的累加、随机变量的平方的累加和其他高阶项的累加。

由中心极限定理可知，如果将大量的随机变量相加，最终结果将是一个服从正态分布的随机变量。那么问题的关键是，它的均值和方差是什么？

将 N 个均值为0、标准差为 $\sqrt{\delta t/N}$ 的正态变量相加，我们将得到一个均值为0、标准差为 $\sqrt{\delta t}$ 的正态变量。这就是 $\mathrm{d}X$ 的标准差。注意，结果中不包含 N。

接下来，如果把上述 N 个正态变量（均值为0、标准差为 $\sqrt{\delta t/N}$）的平方相加，我们又可以得到一个正态变量，均值为

$$N\times\left(\sqrt{\frac{\delta t}{N}}\right)^2=\delta t$$

标准差为

$$\delta t\sqrt{\frac{2}{N}}$$

随着 N 增大，标准差趋于0。在 N 趋于无穷大的过程中，由标准差衡量的随机性逐渐消失，最后只剩下均值 $\mathrm{d}t$，因此在某种意义上我们可以判定 $\mathrm{d}X^2=\mathrm{d}t$。

其他高阶项的均值、方差太小，在 N 趋于无穷时迅速消失。

4.12.2 简单的一般化

我想通过简单的一般化来结束本节的讨论。设随机微分方程

$$\mathrm{d}S=a(S)\mathrm{d}t+b(S)\mathrm{d}X \tag{4-7}$$

其中 $a(S)$ 和 $b(S)$ 是给定的函数。如果给定一个 S 的函数 $V(S)$，那么 V 满足什么随机微分方程？答案是

$$\mathrm{d}V=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}S}\mathrm{d}S+\frac{1}{2}b^2\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}S^2}\mathrm{d}t$$

通过严谨的推导，或是通过用 $\mathrm{d}X^2=\mathrm{d}t$ 配合泰勒级数展开的“作弊”法，都能得到这个结果。如果需要，可以将 $\mathrm{d}S$ 的表达式代入式（4-7），得到 $\mathrm{d}V$ 关于纯粹布

朗运动 X 的表达式

$$\mathrm{d}V = \left(a(S)\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}S} + \frac{1}{2}b(S)^2\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}S^2}\right)\mathrm{d}t + b(S)\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}S}\mathrm{d}X$$

4.13 多维的伊藤引理

金融问题中出现的函数通常是 $V(S, t)$ 的形式，它有随机变量 S 和确定性变量 t（时间）两个自变量。若

$$\mathrm{d}S = a(S,t)\mathrm{d}t + b(S,t)\mathrm{d}X$$

那么增量 $\mathrm{d}V$ 为

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial V}{\partial S}\mathrm{d}S + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\mathrm{d}t \tag{4-8}$$

和之前一样，这个表达式仍然是正确积分形式的简化，而且结果显然是正确的。同样显然地，我们选用了偏微分而不是常微分。

有时候，函数中包含两个或者更多的随机变量以及时间，例如 $V(S_1, S_2, t)$。一个这类函数的例子是，允许你购买耐克和锐步二者中价格更高的公司股票的期权。用一般形式来描述 S_1 和 S_2

$$\mathrm{d}S_1 = a_1(S_1,S_2,t)\mathrm{d}t + b_1(S_1,S_2,t)\mathrm{d}X_1$$

及

$$\mathrm{d}S_2 = a_2(S_1,S_2,t)\mathrm{d}t + b_2(S_1,S_2,t)\mathrm{d}X_2$$

注意，现在有两个布朗运动的增量，即 $\mathrm{d}X_1$ 和 $\mathrm{d}X_2$。它们服从方差为 $\mathrm{d}t$ 的正态分布，不过它们是相关的。将这两个随机变量的相关系数记为 ρ，它同样可以是 S_1、S_2 和 t 的函数，但必须满足

$$-1 \leqslant \rho \leqslant 1$$

容易想到的“经验法则”是

$$\mathrm{d}X_1^2 = \mathrm{d}t,\ \mathrm{d}X_2^2 = \mathrm{d}t \quad \text{以及} \quad \mathrm{d}X_1\mathrm{d}X_2 = \rho\mathrm{d}t$$

因此伊藤引理变为

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial V}{\partial S_1}\mathrm{d}S_1 + \frac{\partial V}{\partial S_2}\mathrm{d}S_2 + \frac{1}{2}b_1^2\frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2}\mathrm{d}t$$

$$+ \rho b_1 b_2\frac{\partial^2 V}{\partial S_1\,\partial S_2}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}b_2^2\frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2}\mathrm{d}t \tag{4-9}$$

4.14 一些相关的例子

本节会介绍一些常见的随机游走及其性质。

我们记得，变量 S 的随机微分方程总是会满足以下结构形式：

$$dS = _____\ dt + _____\ dX$$

dt 前的横线表示确定项，dX 前的横线则表示随机项的大小。建模的过程很大程度上是选择在横线内填上什么的过程——决定确定项的函数形式和随机项的函数形式。现在让我们看一些例子。

4.14.1 带漂移的布朗运动

第一个例子类似布朗运动，但带有漂移项：

$$dS = \mu dt + \sigma dX$$

图 4-5 是对这种布朗运动进行模拟的结果。这次模拟中我们注意到，在起点附近 S 出现了负值。因此，这种随机游走模型对于包括利率和股价在内的很多金融变量都不太合适。将方程进行积分就能得到

$$S(t) = S(0) + \mu t + \sigma(X(t) - X(0))$$

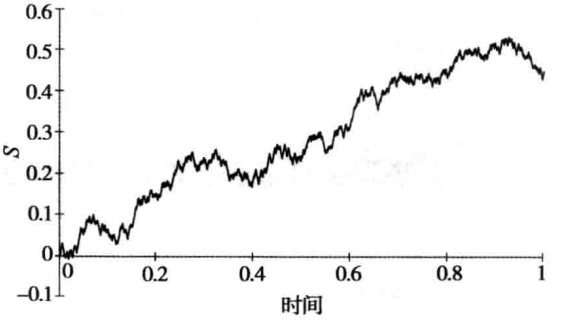


图 4-5 $dS=\mu dt+\sigma dX$ 的模拟结果

4.14.2 对数正态随机游走

第二个例子和前面的例子有些相似，但漂移项和随机项都含有 S：

$$dS = \mu S dt + \sigma S dX \qquad (4-10)$$

图 4-6 是该模型的一个模拟结果。若 S 的初始值为正，就永远不会出现负值；同时，S 越接近 0，增量 dS 就越小。因此，我不得不选择一个非 0 的数作为 S 的初始值。我们可以用伊藤引理考察函数 $F(S)=\log S$ 来更清楚地理解这个性质。由伊藤引理得

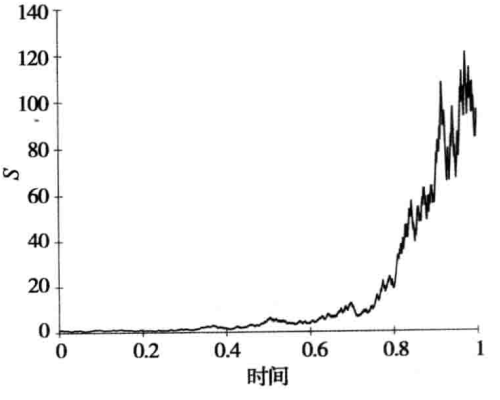


图 4-6 $dS=\mu S dt+\sigma S dX$ 的模拟结果

$$dF = \frac{dF}{dS}dS + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{d^2F}{dS^2}dt = \frac{1}{S}(\mu S dt + \sigma S dX) - \frac{1}{2}\sigma^2 dt = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dX$$

上式表明 $\log S$ 的取值范围为负无穷大至正无穷大，但在有限的时间内不会趋于无穷，因此 S 在有限的时间内不会趋于 0 或正无穷大。

图 4-6 是在一张表格中使用随机收益率计算出来的时间序列，而图 4-7 是葛兰素威康公司的真实股价，我们该如何定性地比较它们？

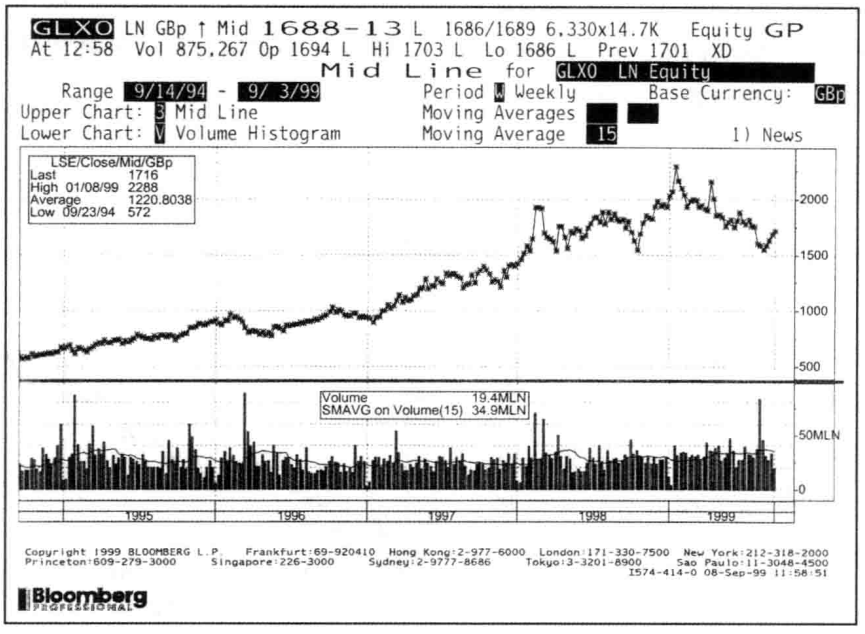


图 4-7 葛兰素威康的股价（下方为成交量）

资料来源：Bloomberg L. P.

由 $\log S$ 的随机微分方程可以推导出积分形式的 S 的方程

$$S(t) = S(0)e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma(X(t) - X(0))}$$

随机微分方程（4-10）在对许多类型的资产进行建模时非常重要。对于函数 $V(S, t)$，由伊藤引理得

$$\boxed{dV = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt} \qquad (4-11)$$

4.14.3 均值回归随机游走

第三个例子是

$$dS = (\upsilon - \mu S)dt + \sigma dX$$

图 4-8 是该模型的一个具体实现。

这种随机游走属于**均值回归**（mean-reverting）随机游走。如果 S 大于 υ/μ，则 $\mathrm{d}t$ 的系数为负，意味着平均而言 S 将减小；如果 S 小于 υ/μ，平均而言 S 将增大。在这种随机游走中，S 不会一直为正。用 r 替换式中的 S，就可以得到关于短期利率的瓦西切克（Vasicek）模型。

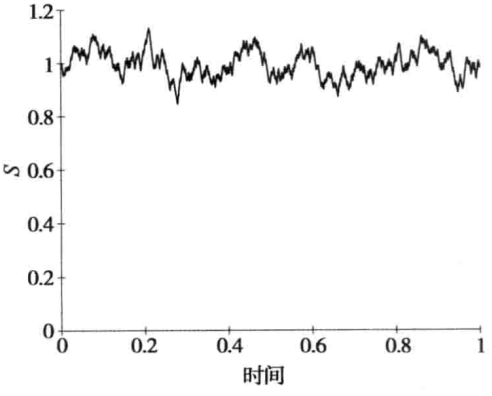


图 4-8　$\mathrm{d}S=(\upsilon-\mu S)\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}X$ 的一个实现

人们通常用均值回归模型对“不会乱跑”的随机变量建模，所以它总是被用于利率模型。图 4-9 是一只日本政府债券的收益率。

图 4-9　一只日本政府债券的收益率序列

资料来源：BLoomberg L. P.

下面考察关于即期利率 r 的瓦西切克模型

$$\mathrm{d}r=(\upsilon-\gamma r)\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}X$$

其中 γ 是回归速率，υ/γ 是均值率。

令 $W=r-\upsilon$，则 W 是以下方程的解

$$\mathrm{d}W=-\gamma W\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}X$$

这个关于 W 的随机游走是一个**奥恩斯坦 - 乌伦贝克**（Ornstein-Uhlenbeck）过程。该方程的解析解是存在的，下面就一起来推导。

引入积分因子 $I=e^{\gamma t}$，可以写出

$$d(IW) = IdW + WdI = e^{\gamma t}(-\gamma W dt + \sigma dX) + \gamma W e^{\gamma t} dt = \sigma e^{\gamma t} dX$$

在区间 $[0, t]$ 上积分后得到

$$IW = 常数 + \sigma\int_0^t e^{\gamma t} dX(s)$$

因此

$$W = W(0)e^{-\gamma t} + \sigma\int_0^t e^{\gamma(s-t)} dX(s) \tag{4-12}$$

下面用分部积分法化简式（4-12）。由于

$$\int_0^t e^{\gamma(s-t)} dX(s) = X - \gamma\int_0^t e^{\gamma(s-t)} X(s) ds$$

故式（4-12）可以写为

$$W(t) = W(0)e^{-\gamma t} + \sigma\left(X(t) - \gamma\int_0^t e^{\gamma(s-t)} X(s) ds\right)$$

因此

$$r = \upsilon + W = \upsilon + (r(0) - \upsilon)\exp(-\gamma t) + \sigma\left(X(t) - \gamma\int_0^t e^{\gamma(s-t)} X(s) ds\right)$$

4.14.4 另一个均值回归随机游走

最后一个例子和第三个例子类似，同样，我把它写为 r 的形式，但随机项有所改变

$$dr = (\upsilon - \mu r)dt + \sigma r^{1/2} dX$$

如果 r 接近 0，随机性就会降低，这样是不是能防止 r 变为负数？再好好研究一下这个例子，同时我们也将看看伊藤引理的实践运用。

令 $F=r^{1/2}$，那么 F 满足的随机微分方程是什么？由于

$$\frac{dF}{dr} = \frac{1}{2}r^{-1/2} \quad 和 \quad \frac{d^2F}{dr^2} = -\frac{1}{4}r^{-3/2}$$

我们得到

$$dF = \left(\frac{4\upsilon - \sigma^2}{8F} - \frac{1}{2}\mu F\right)dt + \frac{1}{2}\sigma dX$$

通过替换，我们将原方程中含有变量的随机项变成了常数。不过这种做法使漂移

项变得非常“狰狞”，尤其是当 $F=r=0$ 时，漂移率不存在。所以，方程在 $r=0$ 处出了点问题。

现在不再考虑 $F(r)=r^{1/2}$，我们能找到使随机微分方程的漂移项为 0 的函数 $F(r)$ 吗？为了让漂移项等于 0 我们需要

$$(\upsilon-\mu r)\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r}+\frac{1}{2}\sigma^2 r\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}r^2}=0$$

对上式进行一次积分，容易得到

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r}=Ar^{-2\upsilon/\sigma^2}\mathrm{e}^{2\mu r/\sigma^2} \tag{4-13}$$

对于任意常数 A 都成立。我不想再进一步展开，这里最后讨论一个问题。如果

$$\frac{2\upsilon}{\sigma^2}\geqslant 1$$

那么在 $r=0$ 时无法对式（4-13）进行积分，这使原点变得**不可到达**（non-attainable）。换句话说，如果参数 υ 足够大，它会迫使这个随机游走远离原点。

这个关于 r 的特殊随机微分方程是研究短期利率的考克斯、英格索尔和罗斯（Cox，Ingersoll & Ross）模型，对之后的讨论很重要。

我们还将讨论许多随机游走，以上只是其中的 4 个。

4.15 总结

本章介绍了该领域内最重要的工具伊藤引理。伊藤引理让我们能够处理随机变量的函数。如果我们设定了关于资产价格 S 的随机微分方程，也就是“模型”，那么就能处理与资产价格有关的函数，并最终能为包括期权在内的合约进行定价。

如果把伊藤引理当成一种工具，我们只需要知道如何使用它，不必知道它为什么成立。如文中所述，只要记住经验法则就可以用好伊藤引理。除非遇到非常复杂的情况，否则这种方法不太可能出错。

延伸阅读

- Neftci(1996) 是唯一一本适合初学者阅读的随机微积分书籍。它不要求任何知识背景，一步步带领读者了解与金融领域有关的随机微积分基础知识。
- 了解基础知识后，可以接着阅读 Øksendal（1992）和 Schuss（1980）。

第5章

布莱克－斯科尔斯模型

本章内容

- 衍生品理论的基础：Delta 对冲和无套利
- 布莱克－斯科尔斯偏微分方程的推导
- 布莱克－斯科尔斯模型的假设
- 如何针对商品期权和货币期权调整公式

5.1 引言

毫无疑问，本章是这本书最重要的一章。在本章中，我将阐述衍生品理论的基石，即 Delta 对冲和无套利原理。这两者为衍生品理论构建了比较稳固的基础，并且自 1973 年问世以来表现良好。

在本章中，我将从股票的随机微分方程开始探索股票这一资产与其期权的相互关系，以此来构建一个完全无风险的组合。之后我将运用无套利原理，在该原理下，所有无风险组合的收益率均等于无风险利率，即所谓的“天下没有免费的午餐”。

只要对上述方法进行简单调整，就能将标的资产含红利的情形纳入模型考

虑，从而这一方法也能为商品期权、货币期权和期货期权进行定价。

本章的理论性很强，但其涵盖的所有思想在业界都很常用。即使所有的假设都或多或少不符合现实，布莱克－斯科尔斯模型在理论和实践上仍然具有极其深远的重要意义。

5.2 一个非常特殊的组合

在第2章中我描述了期权和期权市场的一些特征，其中介绍了看涨期权和看跌期权的概念。看涨期权的价值显然是合约所包含的各种参数的函数，如执行价格 E 和剩余期限 $T-t$，其中 T 是到期日而 t 是当前时刻。看涨期权价值同样取决于资产本身的性质，如其价格、漂移率、波动率，以及无风险利率。[⊖] 我们可以把期权价值写为

$$V(S,t;\sigma,\mu;E,T;r)$$

注意，分号隔开的是不同类型的变量和参数：

- S 和 t 是变量。
- σ 和 μ 是与资产价格有关的参数。
- E 和 T 是与特定的合约细节有关的参数。
- r 是与资产的计价货币有关的参数。

如非必要，我不会一直用这么多参数。现在，我暂时用 $V(S, t)$ 表示期权价值。

容易观察到：看涨期权价格随标的资产价格上升而上升，亦随标的资产价格下降而下降。这是显然的，因为在到期日标的资产的价格越高，看涨期权的回报也就越大。这是两种金融工具的**相关性**（correlation）的一个例子，此看涨期权的示例中相关性为正；反过来，看跌期权与标的资产的价格则是负相关关系。我们可以利用这些相关性来构造一个非常特殊的组合。

用 Π 表示一单位期权多头和 Delta(Δ) 单位标的资产空头所构成的组合价值：

$$\Pi = V(S,t) - \Delta S \tag{5-1}$$

其中，等式右边的第一项代表期权，第二项代表标的资产空头。注意，第二项的

⊖ 事实上，我在撒谎。这几个参数中，有一个不会影响期权价值。

符号是负号。当前时刻，Δ 是人为选定的某个常量。同时假定标的资产服从以下对数随机游走：

$$dS = \mu S dt + \sigma S dX$$

人们很自然地会问：时间从 t 变动到 $t+dt$ 时，组合价值会如何改变？组合价值的变化一部分源于期权价值的改变，另一部分则源于标的资产价值的改变：

$$d\Pi = dV - \Delta dS$$

注意，Δ 在这一时间段中没有变化；同时，我们事先并不预知 S 会变化多少。

由伊藤引理，我们得到：

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt$$

所以组合价值的变化为

$$d\Pi = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt - \Delta dS \tag{5-2}$$

5.3 消除风险：Delta 对冲

式（5-2）的右边包含两项：确定项和随机项。确定项指含有 dt 的项，随机项则是含有 dS 的项。假设现在我们知道 V 及其导数的值，那么式（5-2）右边的其他项都已知，只剩下 dS 的值未知，并且我们永远无法提前预知这个值是多少。

这些随机项就是我们组合中的风险。有没有办法减少甚至消除这种风险呢？在理论上（实践中也几乎可以），只要小心地选择 Δ 的值就能做到这一点。式（5-2）中的随机项为

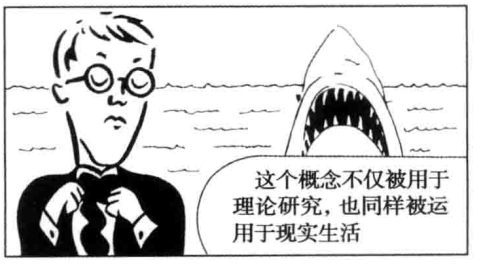
$$\left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta\right)dS$$

如果我们令

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S} \tag{5-3}$$

那么不确定性将降为 0。

不论不确定性是来源于股票市场的波动或是来源于一场赌马的结果，任何降低不确定性的行为通常都被称做**套保**（或对冲，hedging）。利用两种金融工具（此示例中为期权和标的资产）的相关性来完全



消除风险的行为，通常被称做 **Delta 对冲**（delta hedging）。

Delta 对冲是**动态对冲**（dynamic hedging）策略的一种。随着时间的变化，$\frac{\partial V}{\partial S}$ 的值将不断改变，因为它和 V 一样，都是 S 和 t 两个始终在变化的变量的函数。这意味着实现完美的对冲必须连续地对组合进行调整。在之后的章节中我们会看到静态对冲的例子，即对冲组合的头寸不随所涉变量的改变而改变。

Thorp & Kassouf（1967）最早详尽地说明了 Delta 对冲（在第 17 章中，我们将赌场中一种赌博游戏“黑杰克”视为一项投资进行讨论，届时我们将看到更多索普的研究成果）。

5.4 无套利

按上一节的方法确定 Δ 的值之后，我们持有的组合价值将变动

$$\mathrm{d}\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)\mathrm{d}t \tag{5-4}$$

这种变化是完全无风险的。如果我们能从价值为 Π 的组合中得到完全无风险的价值变化 $\mathrm{d}\Pi$，那 $\mathrm{d}\Pi$ 应当等于我们把等量现金投资于无风险的付息账户所能得到的收入

$$\mathrm{d}\Pi = r\Pi\mathrm{d}t \tag{5-5}$$

这就是**无套利**（no arbitrage）原理的一个例子。

为了说明为什么以上原理成立，让我们反过来考虑：如果组合的收益比无风险利率更高或更低会发生什么。一方面，如果我们确定能从 Delta 对冲组合中得到比 r 更高的回报率，那么可以以利率 r 向银行借款，投资于无风险的期权－股票组合并获得利润。另一方面，如果组合回报率比无风险利率低，我们可以卖空期权并进行 Delta 对冲，然后将现金存进银行。不管哪种情况发生，我们获得的无风险利润率都要高于无风险利率。因此，在其他条件都相同的情况下，投资者通过买入和卖出行为来追逐套利机会的过程将使期权的市场价格向没有套利机会的方向运动。

5.5 布莱克－斯科尔斯方程

将式（5-1）、式（5-3）和式（5-4）代入式（5-5），我们得到

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\ \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)\mathrm{d}t = r\left(V - S\ \frac{\partial V}{\partial S}\right)\mathrm{d}t$$

将等式两边除以 $\mathrm{d}t$ 并进行整理，我们得到

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\ \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+rS\ \frac{\partial V}{\partial S}-rV=0} \tag{5-6}$$

这就是**布莱克 - 斯科尔斯方程**（Black-Scholes equation）。该方程最早写于 1969 年，但直到几年后，在费希尔·布莱克（Fischer Black）和迈伦·斯科尔斯（Myron Scholes）证实了模型的正确性之后，该方程才得以发表。它的推导过程最终在 1973 年公开发表，此时看涨及看跌期权定价公式早已在一年前问世。[⊖]

布莱克 - 斯科尔斯微分方程是一个**线性抛物型偏微分方程**（linear parabolic partial differential equation）。实际上，几乎所有金融领域中的偏微分方程都是类似的形式——它们几乎都是线性的（也就是说如果你找到方程的两个解，那么它们的和也是该方程的解）；或者说，至少直到近些年它们通常都是线性的。在本书第五部分我会介绍一些推导出非线性方程的模型。金融领域的方程也通常是抛物形的，这意味着它们和力学中的热传导或扩散方程有关。这些方程的好处之一是其较容易用数值方法求解。

布莱克 - 斯科尔斯方程包含了所有的显性变量和参数，比如标的资产、时间和波动率，唯独没有提到漂移率 μ。这是为什么？其实在我们消除组合价值中含有 $\mathrm{d}S$ 的项时，漂移率的影响就被消除了。经济上的理由是，既然我们能用标的资产对期权进行完美的套保，就没有理由因承担不必要的风险而索取风险溢酬，因此方程中只有无风险利率 r。这意味着：只要对波动率的大小达成共识，即使对某项资产的漂移率的估计不同，我们也能对其衍生品的价值达成共识。

我们可以从另一个角度来考察对冲策略：持有一个只含有 Δ 单位的股票以及现金的组合会发生什么？不难发现，如果 Δ 是某个期权价值的偏导数，那么该组合在到期时将产生和该期权相同的回报。换句话说，同样利用布莱克 - 斯科尔斯

⊖ 埃德·索普更是早就利用这个定价公式开始赚钱了。

的思路，我们能仅仅通过买卖标的资产来**复制**（replicate）一个期权。这就引出了**完全市场**（complete market）的概念。在一个完全市场中，期权因为可以被标的资产所复制而变得冗余。或许你会问：如果能够通过交易标的资产获得和期权相同的回报，为什么要购买期权呢？其实，许多因素的共同作用导致了市场的不完全，在之后的章节中我们将讨论其中的一些因素，如交易成本和随机波动率等。

由于布莱克－斯科尔斯方程的重要性，下面花一点时间介绍本书其他部分与布莱克－斯科尔斯方程相关联的一些概念和模型。

在本书第一部分余下的内容中，我将解释布莱克－斯科尔斯偏微分方程的含义以及在一些特例中的求解方法。我会略将模型进行一般化（但不会非常一般化），同时也会说明在允许期权提前执行时方程的变化。表面上看，提前执行期权并没有带来太大的不同，但实际上它将改变问题的整个本质。

本书的第二部分将讨论一些重要的用于对奇异衍生品合约定价的一般化模型。这些扩展可能会被划分在“经典模型”的范畴中，它们并不特别，也没有超出“布莱克－斯科尔斯世界”。

在第三部分关于利率产品的探讨中，我们将看到许多布莱克－斯科尔斯的思想和一些新的思想。由于一些技术上的原因，固定收益类产品比股票、货币、商品类衍生品更难以处理。然而，*Delta* 对冲和无套利原理依旧发挥作用。

信用风险管理是第四部分的主题。在该领域中我们通常无法进行 *Delta* 对冲。

第五部分将讨论一些更加重要的一般化模型以及一些更高级的主题。其中一部分拓展来自对布莱克－斯科尔斯世界的细微修改，仍然可以视为经典模型。它们只是对拓宽布莱克－斯科尔斯世界、放松某些假设进行尝试。另一部分模型则带领我们离开布莱克－斯科尔斯世界，去探索新的、未知的领域。在此类模型中，*Delta* 对冲和无套利原理可能不再如前述的那么直白。你可以选择相信或质疑其中任何一个模型，但我确实希望你能重视和领会它们。

在第六部分，我会说明如何在数值上求解布莱克－斯科尔斯方程及相关的方程。我将介绍两种主要的数值方法：有限差分法和蒙特卡罗模拟。书中涵盖了相应的 *Visual Basic* 代码，帮助阐释其中的许多方法。这些方法都不难，在这个问题上我们是很幸运的：我们所用的控制方程通常都是数值上易于求解的抛物型方程。

5.6 布莱克 - 斯科尔斯假设

刚才提及的“假设”都是些什么呢？以下是部分清单以及相应的讨论。

- **标的资产遵循对数正态随机游走**：这并不是绝对必需的。为了获得显性解，我们需要随机微分方程中的随机项与 S 成比例。“因子”σ 不必是常数，但其只能是时间的函数（详见第 7 章）。波动率如果同时是资产价格的函数，布莱克 - 斯科尔斯方程的有效性并不受影响，但这会导致方程要么有非常复杂的显性解（如果确实有），要么只能用数值方法求解。接下来就是关于漂移项 μS 的问题。既然它在方程中没有出现，我们需要假设漂移项遵循对数正态随机游走形式吗？这其实是一个技术性的细节，因为不管资产价格 S 遵循的随机微分方程是什么，其取值范围必须是 0 到正无穷大。我不会深入讨论这个技术处理，但它意味着另一个无套利问题。我们可能通过选择一个漂移率使资产价格限定在一定的区间内，而这个漂移率带来了套利的机会。

- **无风险利率是关于时间的确定性函数**：这个限制仅仅是为了帮助找到显性解而做出的又一个假设。如果 r 是常数，显性解甚至更容易找到。在实际操作中，利率经常被设定为时间的函数，但事前已知。在这样的假设下，简单合约的价格的显性公式仍然存在，我会在第 8 章讨论这个问题。现实中，利率 r 并不能事前确定，它本身也是随机的，至少从历史数据上来看是这样。我们将在第三部分讨论随机利率。另外，我们还假定借款和贷款的利率相等。放松这个假设并不难，这将与第 52 章中的一些问题有关。
- **标的资产没有分红**：稍后我会放弃这个假设。在第 8 章我会对这个主题进行更一般化的讨论。
- **Delta 对冲是连续进行的**：在现实中这是绝对不可能的。对冲行为只能离散操作。再次对冲的时间间隔通常取决于标的资产交易成本的高低：成本越低，对冲越频繁。关于这个问题的深入讨论见第 47 章。
- **标的资产无交易成本**：事实上 Delta 对冲是一项成本高昂的业务，因为大多

数标的资产都有买卖价差。在一些市场上，买卖价差对于对冲的影响不容忽视；而在另一些市场上则影响不大。第48章将讨论这些问题。

- **没有套利机会**：这看起来很美好。当然现实中总有套利机会，很多人从中赚了大钱。[⊖]不过这里绝对需要强调的是，我们假设的是不存在依赖于模型的套利机会。这种假设其实不太可靠，因为这首先要求我们设定了正确的模型，而这是不可能的。我更愿意假设不存在独立于模型的套利机会，例如，完全相同的现金流却具有不同的价值。但即使如此，我们依然会招致批评。

还有更多的假设没有列出，但以上这些是最重要的假设。在本书的其他部分中会放弃这些假设，或者至少把它们放松一点点。

5.7 终值条件

布莱克－斯科尔斯方程式（5-6）丝毫没有涉及我们在为哪种期权定价，既不论期权是看涨还是看跌，也没有提及其执行价格和到期日。这些方面将通过**终值条件**（final condition）来刻画。在到期时刻 T，我们必须将期权价值 V 明确表示为到期标的资产价格的具体函数。也就是说，我们必须明确定义到期回报 $V(S, T)$。

例如，如果我们有一个看涨期权，那么

$$V(S,T) = \max(S-E,0)$$

对于看跌期权，我们有

$$V(S,T) = \max(E-S,0)$$

对于两值看涨期权，有

$$V(S,T) = \mathcal{H}(S-E)$$

对于两值看跌期权，则有

$$V(S,T) = \mathcal{H}(E-S)$$

其中$\mathcal{H}()$是**Heaviside函数**（Heaviside function），在自变量为负时取0，在自变量为正时取1。

我会在第6章和第7章解释终值条件的必要性，并在第六部分对其在数值方

⊖ 生活，和生活中的所有事物，都有赖于套利机会和对套利机会的发掘才得以继续。我总想不明白：在知道“天下没有免费的午餐”的情况下，怎么会有那么多学生进银行工作并希望得到6～7位数的奖金？他们觉得这笔钱会从哪儿来？

法上的应用加以说明。

另外，请注意资产价格 S 和“银行里的钱” e^{rt} 都满足布莱克 - 斯科尔斯方程。

5.8 分红股票的期权

我们讨论的第一个一般化问题是：如何对支付红利的股票期权进行定价。这只是布莱克 - 斯科尔斯模型最简单的拓展。为了保持问题的简单性（我会在第 8 章考虑更复杂的情形），我们假设股票有连续且恒定的红利率 D。因此在一个 dt 时间内，每单位股票得到分红 $DSdt$，这部分必须被纳入布莱克 - 斯科尔斯偏微分方程的推导中。我从布莱克 - 斯科尔斯的推导中考察组合价值变化的那一步入手：

$$d\Pi = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt - \Delta dS - D\Delta S dt$$

右边的最后一项是每单位股票的红利 $DSdt$ 与持有的股票数量 $-\Delta$ 之积。Δ 仍然是期权价值对标的资产价格的变化率，经过简单的代换后我们得到：

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \tag{5-7}$$

5.9 货币期权

货币期权可以用完全相同的方式来处理。持有外汇时我们以外国利率 r_f 收取利息，这和收到连续分红一样。这里跳过推导过程，容易得到：

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - r_f)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \tag{5-8}$$

5.10 商品期权

商品资产的一个特征需要我们对布莱克 - 斯科尔斯微分方程进行调整：商品具有**持有成本**（cost of carry）。也就是说，商品的存储并不是无成本的。用 q 表示商品的持有成本对其总价值的比例。这意味着即使商品价格保持不变，持有商品也会导致财富逐渐缩水。说得精确些，在很短的时间 dt 内持有一单位的商品将需要支付 $qSdt$ 的持有费用。这就像获得一个负的红利，因此我们有

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+(r+q)S\frac{\partial V}{\partial S}-rV=0 \tag{5-9}$$

5.11 期货期权

本章最后一个对布莱克－斯科尔斯模型的修改是为了对期货期权进行定价。回忆一下，无分红股票的期货价格 F 与现货价格的关系为

$$F=\mathrm{e}^{r(T_F-t)}S$$

其中，T_F 是期货合约到期日。我们可以很容易地进行变量替换，使得 $V(S,t)=\mathcal{V}(F,t)$。可以得到

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 F^2\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial F^2}-r\mathcal{V}=0 \tag{5-10}$$

可以看到，关于期货期权的微分方程实际上比布莱克－斯科尔斯微分方程更简单。

5.12 推导布莱克－斯科尔斯方程的其他方法

以上是布莱克－斯科尔斯方程的经典推导过程，和最早提出的布莱克－斯科尔斯推导过程接近。还有其他方法能够得到相同的结果，以下是一些简单的介绍。详细的推导和更多实例请见延伸阅读中的参考文献。

5.12.1 鞅方法

期权的价值可以被视为一个期望值。它不是现实世界中的期望，而是一个特殊的风险中性期望。在之后的章节中我们将见到更多关于这个话题的探讨。这是一个有用的结论，因为它奠定了通过模拟方法进行定价的基础，详见第 80 章。偏微分方程可以从期望推导出，详见第 10 章。这一推导过程依然用到了对冲和无套利的概念。

5.12.2 二项模型

二项模型在离散时间和离散资产价格的框架下，同样使用对冲和无套利原理推导出一个为期权定价的算法。我们将在第 15 章讨论更多的细节。通过让时间间隔趋于 0，我们同样能得到连续时间的布莱克－斯科尔斯方程。

5.12.3 CAPM/效用

我们之后会再次见到资本资产定价模型（capital asset pricing model）。现在你只需要知道它是一个关于风险资产行为的模型，同时也是一个定义和寻找在不同资产中分配财富的最优方法的法则。人们用风险（收益率的标准差）和回报（预期增长率）来描述资产组合。如果你在这个框架中加入期权，风险和回报的组合的种类并不会增加，因为期权在某种意义上仅仅是标的资产的函数（这就是完全市场的特性）。期权和标的资产的风险和回报是相关的，由此才会得到布莱克－斯科尔斯方程。

5.13 总结

本章很重要，但并不太难。本章介绍了一些十分强有力而又优美的概念，如Delta对冲和无套利。这两个基本原理导致了布莱克－斯科尔斯期权定价方程的产生。之后的所有讨论或者基于这些思想，或者受这些思想的启发而产生。

延伸阅读

- 自布莱克－斯科尔斯以来期权理论的历史，见Briys，Mai，Bellalah和de Varenne（1998）的著作。
- 关于推导布莱克－斯科尔斯偏微分方程的故事，见1997年12月出版的《风险》杂志（*Risk*）10周年纪念特刊，作者为Bob Whaley。
- 当然，你还必须阅读布莱克－斯科尔斯的原作，见Black和Scholes（1973）及Merton（1973）的著作。
- 关于期货期权的定价，见Black（1976）；关于外汇期权的定价，见Garman和Kohlhagen（1983）的著作。
- 用其他方法推导布莱克－斯科尔斯偏微分方程的细节，见Andreasen，Jensen和Poulson（1998）的著作。

第 6 章

偏微分方程

本章内容

- 抛物型偏微分方程的性质
- 布莱克 - 斯科尔斯方程中各项的含义
- 一些求解技巧

6.1 引言

分析和求解偏微分方程是一个非常宏大的课题，本书涉及的内容只是沧海一粟。如果你觉得对该课题的内容有疑惑，本章章末的延伸阅读书目应该会有所帮助。如果只是想要理解金融或要用数值方法求解偏微分方程，并不需要太过深入的理解。本章的目的是提供恰好足够的背景知识，让任何数学水平一般的读者都有能力理解本书后面的内容；我希望进入这个课题的门槛越低越好。

6.2 布莱克 - 斯科尔斯方程的前世今生

布莱克 - 斯科尔斯偏微分方程涉及两个维度，即 S 和 t。这个方程是抛物型的，也就是说含有对变量 S 的二阶导数和对变量 t 的一阶导数。这种类型的偏微分方程

通常被称为**热传导方程**（heat equations）或**扩散方程**（diffusion equations）。

扩散方程最简单的版本几乎可以追溯到19世纪初期。该方程已经成功地用于为以下现象建模：

- 一种物质在另一种物质中的扩散，如烟雾颗粒在空气中的扩散。
- 热量在某一物体的不同部分间的流动。
- 化学反应，如展现了美妙的波动结构的Belousov-Zhabotinsky反应。
- 有机体细胞膜上的生物电活动，如Hodgkin-Huxley模型。
- 人口分布，如个体随机迁移和避开人口密集区迁移的模型。
- 捕食者－被捕食者系统中的捕猎与躲避行为。
- 动物皮毛图案的形成，如斑马纹的形成。
- 水流中污染物的扩散。

多数情况下得到的方程比布莱克－斯科尔斯方程更复杂。

对于条形物体的温度传导问题，最简单的热传导方程通常写为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{6-1}$$

其中u为温度，x为空间坐标，t为时间。这个方程根据热量平衡列出。考虑该条形物体的一小段热量流入和流出的情况，沿条形物方向的热量流入与温度的空间梯度

$$\frac{\partial u}{\partial x}$$

成比例。对流入热量再求导，得到温度对空间位置的二阶导数，就是这一小段保留下来的热量，即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

而该区域保留的热量造成了温度的上升，其数学表达式为

$$\frac{\partial u}{\partial t}$$

x的二阶导和t的一阶导构成了热传导方程，即式（6-1）。（方程中应还有一个取决于物体材质属性的系数，此处设为1。）

6.3 布莱克－斯科尔斯方程中各项的含义

布莱克－斯科尔斯方程可以被准确地解读为一个反应－对流－扩散方程。

基本的扩散方程是对 t 的一阶导数和对 S 的二阶导数的组合：

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\ \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$$

如果布莱克－斯科尔斯方程中仅有这些项，那么它会表现出平滑效应，即到期回报的不连续点都会立刻扩散消失。布莱克－斯科尔斯方程中的这两项与基本热扩散方程中对应项的唯一区别是，布莱克－斯科尔斯方程扩散项的系数是自变量 S 的函数。因此我们在布莱克－斯科尔斯方程中面对的实际上是非均匀介质中的扩散问题。

S 的一阶导数项

$$rS\ \frac{\partial V}{\partial S}$$

可以看作对流项。如果这个方程代表某个物理系统，如烟雾颗粒在空气中的扩散，那么对流项就可能来源于一阵微风，向着特定方向吹动了烟雾。

最后一项

$$-rV$$

是反应项。这一项和 V 对 t 的导数构成的方程描述了一个半衰期与 r 有关的放射性物体的衰减。

图 6-1 展示了看涨期权的回报在以下三种情况下会如何变化：①只有扩散项；②只有对流项；③只有反应项。

将这些项组合在一起，我们就得到一个反应－对流－扩散方程。几乎同样的方程也适用于污染物沿着河流分散并被泥沙吸收的过程。在这个过程中，污染物的分散就是扩散项，河水的流动就是对流项，泥沙的吸收就是反应项。

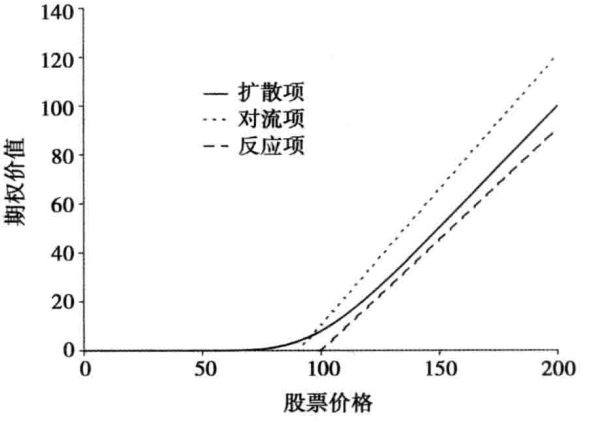


图 6-1 到期前的看涨期权价值

6.4 边界和初值/终值条件

要唯一地确定研究的问题，我们必须给出**边界条件**（boundary conditions）及**初**

值条件（initial condition）或**终值条件**（final condition）。边界条件是在任意时刻，资产价格取某些特定值时方程的解必须满足的条件。在金融问题中，我们通常设定的是 $S=0$ 及 $S\to\infty$ 时的边界条件。我们还要决定如何开始求解。布莱克－斯科尔斯方程是个后向方程，即当 t 的一阶导数和 S 的二阶导数写在等式的同一侧时，它们的符号相同。因此我们必须给出终值条件，通常为到期回报函数。

布莱克－斯科尔斯方程的基本形式是齐次线性的，因此它满足叠加原理：两个解之和仍是方程的解。对非线性方程来说这个原理不成立。线性扩散方程有一些非常好的性质。即使我们从终期数据的一个不连续点入手（这源于到期回报的不连续性），这种不连续性也会立刻被平滑化，这是由方程扩散本质决定的。另一个好的性质是解的唯一性。只要规定 S 趋于无穷时解函数的值不要增长得过快，这个解就是唯一的。由于我们将要遇到的问题都不需要考虑唯一性问题，所以不用深究“过快”这一概念的精确定义。

6.5 一些求解方法

我们不会花太多时间来讨论布莱克－斯科尔斯方程的精确解。精确解虽然重要，但目前的市场现状决定了使用的模型会具有一些特性让我们无法找到精确解。后面两章将介绍实际操作中经常使用的仅有的几个显性闭式解。

6.5.1 变换为常系数扩散方程

有时候通过变量代换将布莱克－斯科尔斯方程进行略微的化简是有用的。如果我们令

$$V(S,t) = \mathrm{e}^{\alpha x+\beta\tau}U(x,\tau)$$

其中

$$\alpha = -\frac{1}{2}\left(\frac{2r}{\sigma^2}-1\right),\ \beta = -\frac{1}{4}\left(\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)^2,\ S=\mathrm{e}^x \text{ 和 } t = T-\frac{2\tau}{\sigma^2}$$

那么 $U(x,\tau)$ 满足基本扩散方程

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{6-2}$$

这个简化的方程比布莱克－斯科尔斯方程更容易处理。有时这种处理非常重要，如在寻找闭式解或使用一些简单的数值方法的时候。后文将不会再深入讨论这一方法。

6.5.2 格林函数

布莱克 - 斯科尔斯方程对于任意 S' 都成立的一个解为

$$V'(S,t)=\frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma S'\sqrt{2\pi(T-t)}}e^{-\left(\log(S/S')+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right)^2/2\sigma^2(T-t)} \tag{6-3}$$

(你可以将它代入方程进行验证，在下一章我们会看到其推导过程。) 这个解很特别，除了 $S=S'$ 这一点外，它在 $t\to T$ 时处处为 0。趋于此极限时该解成了一个 **Dirac delta 函数** (Dirac delta function)。想象这样一个函数：它在某一点上取值为无穷大，在其他点外处处为 0，但是函数积分值却等于 1。这样的函数对我们有什么用呢?

式 (6-3) 是布莱克 - 斯科尔斯方程对任意 S' 的一个解。根据叠加原理，我们可以将式 (6-3) 乘以任意常数得到另一个解；同样也可以通过将 S' 取不同值时得到的式 (6-3) 相加来得到新的解。将积分看作一种累加的形式，再综合以上两点，我们发现

$$\frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_0^\infty e^{-\left(\log(S/S')+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right)^2/2\sigma^2(T-t)}f(S')\frac{dS'}{S'}$$

也是布莱克 - 斯科尔斯方程对任意函数 $f(S')$ 的一个解。(不信你把它代入布莱克 - 斯科尔斯方程试试。)

由于被积函数在 $t\to T$ 时的性质 (即除 S' 点外处处为 0、积分值等于 1)，如果我们任选一个函数 $f(S')$ 作为到期回报函数，那么该表达式就成为如下问题的解

$$V(S,t)=\frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_0^\infty e^{-\left(\log(S/S')+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right)^2/2\sigma^2(T-t)}$$

$$\text{回报}(S')\frac{dS'}{S'}$$

式 (6-3) 所定义的 $V'(S,t)$ 被称为**格林函数** (Green's function)。

6.5.3 级数解法

有时我们在两个有限 (且非零) 的 S 值处设定边界条件，如 S_u 和 S_d (在第 23 章中有具体的例子)。对于这种类型的问题，我们假设所求的布莱克 - 斯科尔斯方程的解可以写为无穷个某种特殊函数的和。

首先，将方程变换，变成用 x 和 τ 表示的更简洁的基本扩散方程。设解的形式为

$$e^{\alpha x+\beta t}\sum_{i=0}^{\infty}a_i(\tau)\sin(i\omega x)+b_i(\tau)\cos(i\omega x)$$

其中参数 ω 及函数 a、b 的形式待定。根据方程的线性性质，我们可以将不同的解进行累加。通过变量代换可以很容易证明，要满足布莱克 - 斯科尔斯方程，必须有

$$\frac{da_i}{d\tau}=-i^2\omega^2a_i(\tau)\quad 及\quad \frac{db_i}{d\tau}=-i^2\omega^2b_i(\tau)$$

可以解得

$$a_i(\tau)=A_ie^{-i^2\omega^2\tau}\quad 及\quad b_i(\tau)=B_ie^{-i^2\omega^2\tau}$$

故布莱克 - 斯科尔斯方程的解为

$$e^{\alpha x+\beta t}\sum_{i=0}^{\infty}e^{-i^2\omega^2\tau}(A_i\sin(i\omega x)+B_i\cos(i\omega x)) \tag{6-4}$$

至此我们已经完成求解，之后只需要让它满足边界和初值条件即可。

考虑以下例子：$\tau=0$ 时刻的回报为 $f(x)$（当然也可以用之前的变量形式来表示），但如果在任意时刻 $x=x_d$ 或 $x=x_u$，合约就会失效（价值变为 0）。[⊖]

将式（6-4）大括号中的项重新写为

$$C_i\sin\left(i\omega'\frac{x-x_d}{x_u-x_d}\right)+D_i\cos\left(i\omega'\frac{x-x_d}{x_u-x_d}\right)$$

为了保证在 x 取上述两个值时合约价值为 0，只需选择 $D_i=0$ 及 $\omega'=\pi$，边界条件就满足了。接下来只需选择 C_i 的值来满足终值条件：

$$e^{\alpha x}\sum_{i=0}^{\infty}C_i\sin\left(i\omega'\frac{x-x_d}{x_u-x_d}\right)=f(x)$$

这也很简单。将两边同时乘以

$$\sin\left(j\omega'\frac{x-x_d}{x_u-x_d}\right)$$

并在 x_d 到 x_u 的区间上积分，就得到

$$C_j=\frac{2}{x_u-x_d}\int_{x_d}^{x_u}f(x)e^{-\alpha x}\sin\left(j\omega'\frac{x-x_d}{x_u-x_d}\right)dx$$

这种可进一步扩展的解法叫做**傅立叶级数法**（Fourier series method）。在将不连续函数用三角函数的无穷级数表示的过程中，会遇到一些问题。另外，在用

⊖ 这是一个双边敲出期权的例子，见第 23 章。

有限级数作为近似解时会出现振荡，这被称为**吉布斯效应**（Gibbs phenomenon）。

6.6 相似性化简

在上述方法中，本书只用到格林函数法，我们甚至极少求出显性解。不过有一个对我们有用的方法，那就是**相似性化简**（similarity reduction）。我将用基本扩散方程来阐述这种方法，并在之后解决许多更复杂的问题时用到它。

基本扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{6-5}$$

是 u 的方程，而函数 u 依赖于 x 和 t 两个自变量。有时，在一些非常特殊的情形中，我们可以把解写为仅有一个自变量的函数。下面给出一个例子。

很容易验证函数

$$u(x,t) = \int_0^{x/t^{1/2}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\xi^2}\,\mathrm{d}\xi$$

满足式（6-5）。但在这个函数中，x 和 t 只以以下组合形式出现

$$\frac{x}{t^{1/2}}$$

因此，u 可被看作只含有一个自变量的函数。

一个稍微一般化的例子同样展示了相似性求解。寻找一个形式如下的解

$$u = t^{-1/2} f(\xi) \tag{6-6}$$

其中

$$\xi = \frac{x}{t^{1/2}}$$

将式（6-6）代入式（6-5），得到 f 的解为

$$f = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\xi^2}$$

因此

$$t^{-1/2}\,\mathrm{e}^{-(1/4)(x^2/t)}$$

也是扩散方程的一个特解。

注意，我们并不总能找到相似解：相似解的存在不仅要求方程有某种特别的结构，而且这种相似性形式还必须与所有的初值或边界条件一致。

6.7 其他分析技术

另外两种解线性偏微分方程的主要方法是傅立叶变换和拉普拉斯变换。这两种方法本身都是庞大而技术化的课题，限于篇幅我们无法给出其原理的说明。近年来，这些方法应用于一些高维模型中，例如考虑了随机波动率的模型。

6.8 数值解法

即便有上述各种求解技术，绝大多数情况下我们只能用数值方法求解布莱克 - 斯科尔斯方程。幸运的是，抛物型微分方程几乎是最容易用数值方法求解的一类方程。虽然复杂的解法不计其数，但坚持最简单的方法，总不至于犯下大错。在第 15 章、第 77 章和第 78 章我们会详细讨论这些方法。需要强调的是：从现在开始我们会推导出很多偏微分方程，看完本书后我们会明白如何求解它们。

6.9 总结

本章篇幅较短，只是偏微分方程的入门介绍。如果需要深入了解这个主题，请参考以下书籍及文章。

延伸阅读

- Grindrod（1991）讨论了反应 - 扩散方程，包括其起源和分析，涵盖了上文提到的许多物理模型。
- Murray（1989）也包含了许多反应 - 扩散方程的内容，但集中于生物系统的模型。
- Wilmott 和 Wilmott（1990）描述了在对流和河床吸收的条件下污染物的沿河扩散。
- 扩散方程领域的经典参考文献有 Crank（1989）和 Carslaw 和 Jaeger（1989）。也可参考 Sneddon（1957）关于偏微分方程的书籍和 Strang（1986）关于一般应用数学方法的书籍。

第7章

布莱克－斯科尔斯期权定价公式和“希腊字母”

本章内容

- 看涨期权、看跌期权和简单数值期权的布莱克－斯科尔斯期权定价公式的推导
- 希腊字母 Delta、Gamma、Theta、Vega 和 Rho 的意义和重要性
- 对自变量和参数求微分的区别
- 看涨期权、看跌期权和简单数值期权的希腊字母公式

7.1 引言

对于看涨期权、看跌期权和另一些合约，布莱克－斯科尔斯方程有较为简单的解。本章将一步步带你推导这些公式。在本书中我很少推导公式，本章是一个例外。我不常推导公式的原因是，大多数金融合约的理论价值都没有显式解。因此我将大部分重点放在寻找布莱克－斯科尔斯方程的数值解上面。

我们已经看到过 Delta（也就是期权价格对标的资产价格的一阶导数）在推导布莱克－斯科尔斯方程时发挥的重要作用。本章将阐述期权价格其他导数的重要性，其中包括对自变量（标的资产价格和时间）和某些参数的导数。这些导数在对冲期权头寸时十分重要，因而在风险管理中扮演重要角色。可以这么说，做正确的对冲比做精确的定价更为重要。这样说的理由是，如果你做的是准确的对

冲，自然能够减少或消除未来的不确定性，未来的利润（或损失）在买卖合约的那一刻就确定了；但如果对冲是不准确的，那么最初计划买卖合约时所预想的利润就变得不重要了——未来不确定性的影响可以轻易地超越最初的利润。而现实生活没那么简单，在现实中我们要面对模型误差，它能让我们所做的全部都成为徒劳之功。因此，做“正确的对冲”非常重要，这也是我们引入希腊字母的原因。

7.2 看涨期权、看跌期权和简单数值期权的公式推导

布莱克－斯科尔斯方程是

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV=0 \tag{7-1}$$

这个方程必须用关于合约回报的终值条件来求解。每一份合约在到期日 $t=T$ 时的价值都会事先用不同的函数形式规定好，具体形式取决于这份合约是看涨期权、看跌期权还是更奇异的合约。我们必须用这样的终值条件来保证解的唯一性。在讨论终值条件之前，我们先来看看如何将式（7-1）变得更容易求解。

第一步处理是将现值转换为终值。回忆一下，我们在 T 时刻收到回报，而现在我们要为 t 时刻的期权进行定价，于是

$$V(S,t)=\mathrm{e}^{-r(T-t)}U(S,t)$$

方程变为

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}+rS\frac{\partial U}{\partial S}=0$$

第二步则非常琐碎。因为我们要解的是一个后向方程（在第 6 章中讨论过），令

$$\tau=T-t$$

方程变为

$$\frac{\partial U}{\partial \tau}=\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}+rS\frac{\partial U}{\partial S}$$

之前对股票价格进行建模时，我们用到了与资产收益率有关的直觉来构建随机微分方程模型。现在再一次考虑资产的收益率，令

$$\xi=\log S$$

有了这个新变量，我们得到

$$\frac{\partial}{\partial S}=\mathrm{e}^{-\xi}\frac{\partial}{\partial \xi} \quad 和 \quad \frac{\partial^2}{\partial S^2}=\mathrm{e}^{-2\xi}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}-\mathrm{e}^{-2\xi}\frac{\partial}{\partial \xi}$$

现在布莱克－斯科尔斯方程变为

$$\frac{\partial U}{\partial \tau}=\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{\partial U}{\partial \xi}$$

这些变形对我们来说有什么用？它把关于$0\leqslant S<\infty$的方程转化为关于$-\infty<\xi<\infty$的方程。更重要的是，现在方程中的系数均为常数，与标的资产无关。正是因为标的资产价格服从对数正态分布，我们才能有这一重大突破。

最后一步较为简单但不容易想到。令

$$x=\xi+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau$$

和$U=W(x,\tau)$。这一步其实是坐标系变换。从原理上说，有点像是把资产的远期价格而不是现货价格看作自变量。进行这一步变量替换之后，布莱克－斯科尔斯方程变得更简单了

$$\frac{\partial W}{\partial \tau}=\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \tag{7-2}$$

最后，

$$V(S,t)=\mathrm{e}^{-r(T-t)}U(S,t)=\mathrm{e}^{-r\tau}U(S,T-\tau)=\mathrm{e}^{-r\tau}U(\mathrm{e}^{\xi},T-\tau)$$

$$=\mathrm{e}^{-r\tau}U\left(\mathrm{e}^{x-\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau},T-t\right)=\mathrm{e}^{-r\tau}W(x,\tau)$$

对于已经知道看涨期权、看跌期权的布莱克－斯科尔斯期权定价公式的读者，应该对变量x不陌生

$$x=\xi+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau=\log S+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)$$

在将原始的布莱克－斯科尔斯方程化为简单得多的形式之后，先休息一下，让我来介绍接下来要做什么。

我将推导出一个关于期权价格的公式，它适用于任意一个到期回报是标的资产价格的已知函数的期权（包括看涨、看跌和数值期权）。这个公式是用积分表示的。对于一些特例，我会说明如何将积分形式改写为正态分布的累积分布函数的形式。这一步对我们很有帮助，因为这个函数可以在电子表格、计算器和附在某些书后的表格中找到。但在写出积分形式之前还有两个步骤。

第一步是找出式（7-2）的一个特解，叫做基本解。这个解的某些性质对我

们有帮助。第二步是利用方程的线性特征和特解的某些性质找到方程的通解。

我要找到式（7-2）以下形式的特解

$$W(x,\tau)=\tau^{\alpha}f\left(\frac{(x-x')}{\tau^{\beta}}\right) \tag{7-3}$$

其中 x' 是任意常数。将这个特解记为 $W_f(x,\tau;x')$。注意，这个未知函数只取决于一个变量 $(x-x')/\tau^{\beta}$。在求函数 f 的同时，我们也要求出常系数 α 和 β。可以想象，如果这种方法奏效，那么 f 的方程将是一个常微分方程，因为该函数只含有一个自变量。这种降维方法就是我们在第 6 章讨论的相似性化简法的一个例子。

将式（7-3）代入式（7-2）得到

$$\tau^{\alpha-1}\left(\alpha f-\beta\eta\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta}\right)=\frac{1}{2}\sigma^2\tau^{\alpha-2\beta}\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}\eta^2} \tag{7-4}$$

其中

$$\eta=\frac{x-x'}{\tau^{\beta}}$$

考虑到式（7-4）两端都取决于 τ 和 η，方程存在解将要求

$$\alpha-1=\alpha-2\beta \quad 即 \quad \beta=\frac{1}{2}$$

现在要确保这个“特解”有如下性质：它在所有 ξ 取值范围上的积分与 τ 无关。稍后你会知道其中的原因。为了保证这一点，我要求

$$\int_{-\infty}^{\infty}\tau^{\alpha}f((x-x')/\tau^{\beta})\mathrm{d}x$$

必须是常数。将其改写为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\tau^{\alpha+\beta}f(\eta)\mathrm{d}\eta$$

因此必须有

$$\alpha=-\beta=-\frac{1}{2}$$

现在 f 满足

$$-f-\eta\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta}=\sigma^2\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}\eta^2}$$

将其化为

$$\sigma^2\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}\eta^2}+\frac{\mathrm{d}(\eta f)}{\mathrm{d}\eta}=0$$

将上式积分一次后得到

$$\sigma^2 \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta} + \eta f = a$$

其中 a 为常数。对于这个特解，可令 $a=0$。将方程再次积分可得

$$f(\eta) = b\mathrm{e}^{-\eta^2/(2\sigma^2)}$$

我们可以选择 b 的值，使 f 从负无穷大到正无穷大的积分结果等于 1：

$$f(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\eta^2/(2\sigma^2)}$$

这就是我一直在寻找的特解：[⊖]

$$W_f(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}\sigma}\mathrm{e}^{-((x-x')^2/2\sigma^2\tau)}$$

下面解释为什么它对布莱克－斯科尔斯期权定价公式的探索之旅有帮助。

图 7-1 是 τ 取不同值时 W_f 作为 x' 的函数画出的函数图像。注意，函数在中间突起而在两端衰减。随着 $\tau \to 0$，这种现象愈发明显。处在最“中间”的那一点是 $x=x'$。随着 $\tau \to 0$，函数在中间点上无限增大，在其他点衰减为 0。虽然函数被限制在一个越来越狭窄的区域内，但其面积始终等于 1。当 $\tau \to 0$ 时，若某函数具备以下性质：在某一点函数值无界、在其他点函数值衰减为 0 并且函数图像的面积

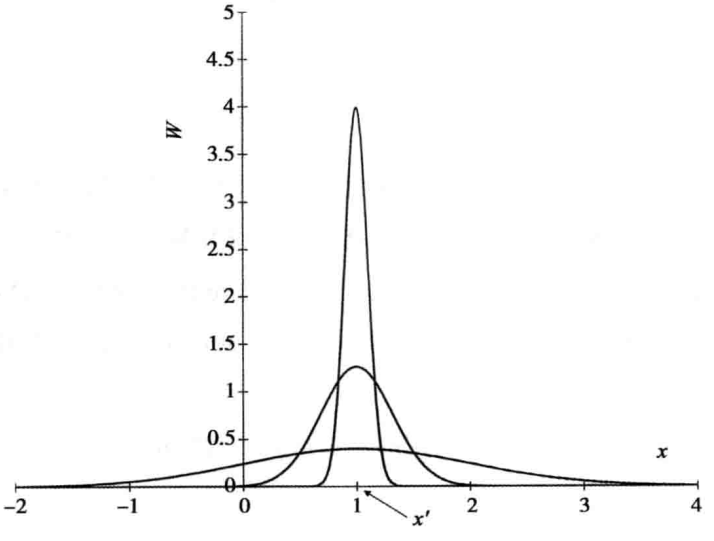


图 7-1　基本解

⊖ 它就是一个均值为 0、标准差为 σ 的正态随机变量的概率密度函数。

为常数，我们称这种函数为 **Dirac delta 函数**（Dirac delta function）$\delta(x'-x)$。Delta 函数有一个重要性质，即

$$\int \delta(x'-x)g(x')\mathrm{d}x' = g(x)$$

其中积分范围为小于 x 的任意一点到大于 x 的任意一点。因此，Delta 函数在其奇点（即 $x'=x$ 这一点）“选出”了 g 的值。取极限 $\tau \to 0$ 时，函数 W_f 在 $x'=x$ 点成为一个 Delta 函数。这意味着

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x'-x)^2}{2\sigma^2\tau}} g(x')\mathrm{d}x' = g(x)$$

这个特解的性质加上布莱克 - 斯科尔斯方程的线性性质，足以帮助我们找到显性解。

现在该考虑期权的回报了，将其记为

$$\text{回报}(S)$$

它是期权在 $t=T$ 时刻的价值，同时也是满足布莱克 - 斯科尔斯方程的函数 V 的终值条件：

$$V(S,T) = \text{回报}(S)$$

用新的变量进行替换，终值条件变为

$$W(x,0) = \text{回报}(\mathrm{e}^x) \tag{7-5}$$

$\tau > 0$ 时方程的解为

$$W(x,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} W_f(x,\tau;x')\ \text{回报}(\mathrm{e}^{x'})\mathrm{d}x' \tag{7-6}$$

要证明它是一个解，只要验证它是否满足式（7-2）和终值条件式（7-5），而两者验证的方法都很简单。对 x' 进行积分就像一个求和的过程，既然参与求和的每个部分都满足给定的方程，那么它们的总和/积分也同样满足。当然，你可以对式（7-6）求微分来验证它是否满足偏微分方程。通过基本解 W_f 的特殊性质可知式（7-6）满足式（7-5）。

回顾之前的步骤，将解写为最初的变量形式，我们得到

$$V(S,t) = \frac{\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\left(\log(S/S')+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right)^2/2\sigma^2(T-t)}\ \text{回报}(S')\frac{\mathrm{d}S'}{S'} \tag{7-7}$$

其中有 $x'=\log S'$。

对于具有任意回报函数的期权，上式就是期权价格的解。在下一节中我将针

对某些特殊的回报函数对其进行处理。

7.2.1 看涨期权定价公式

看涨期权的回报函数为

$$\text{回报}(S) = \max(S - E, 0)$$

式（7-7）可以改写为

$$\frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_E^{\infty} e^{-(\log(S/S')+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t))^2/2\sigma^2(T-t)}(S'-E)\frac{dS'}{S'}$$

将变量 $x'=\log S'$ 代入，可以得到

$$\frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_{\log E}^{\infty} e^{-(-x'+\log S+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t))^2/2\sigma^2(T-t)}(e^{x'}-E)dx'$$

$$=\frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_{\log E}^{\infty} e^{-(-x'+\log S+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t))^2/2\sigma^2(T-t)}e^{x'}dx'$$

$$-E\frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_{\log E}^{\infty} e^{-(-x'+\log S+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t))^2/2\sigma^2(T-t)}dx'$$

对于某个特定的 d，上式中两个积分都可以写成如下形式

$$\int_d^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x'^2}dx'$$

（第二个积分已经是这种形式，第一个积分只要再对 x' 配平方就能变成这种形式）。

除了一点细微的区别外，这个积分和标准正态分布[⊖]的累积分布函数很像

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\phi^2}d\phi$$

这个函数如图 7-2 所示，表示某个正态变量小于 x 的概率。

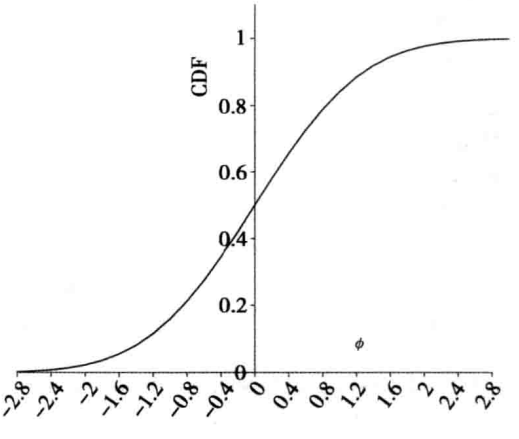


图 7-2 标准正态随机变量的累积分布函数 $N(x)$

因此，可以用正态分布的累积分布函数将看涨期权价格写为分开的两项

$$\text{看涨期权价格} = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2)$$

其中

⊖ 即均值为 0、方差为 1 的正态分布。

$$d_1 = \frac{\log(S/E) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\log(S/E) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

当标的资产有连续红利率或标的资产为货币时，有

看涨期权价格

$$Se^{-D(T-t)}N(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\log(S/E) + \left(r - D + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\log(S/E) + \left(r - D - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$= d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

图 7-3 显示的是在一个固定的剩余期限下，期权价格作为标的资产的函数是如何变化的；图 7-4 是平价期权价格作为时间 t 的函数图像，到期日为 $t=1$；图 7-5 则是看涨期权价格作为标的资产价格和时间的函数图像。

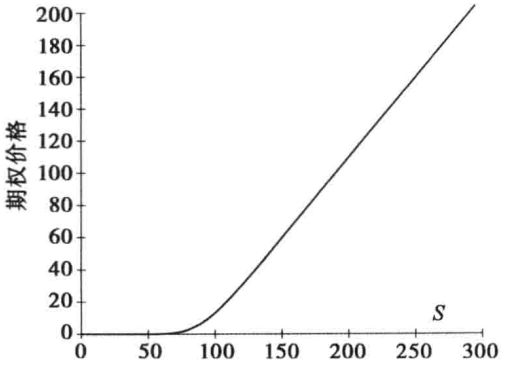


图 7-3 在固定剩余期限下看涨期权价格作为标的资产价格的函数

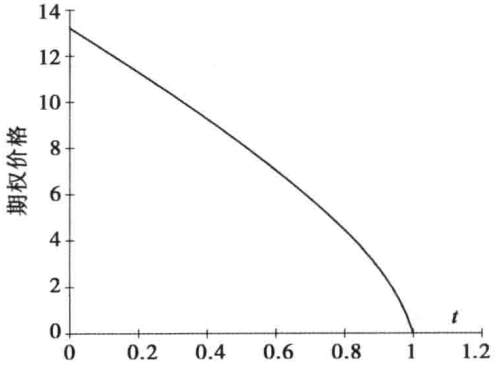


图 7-4 平价看涨期权价格作为时间 t 的函数

当资产价格满足“平价远期”时，即 $S=Ee^{-(r-D)(T-t)}$，看涨期权价格满足一个简单的近似公式（Brenner & Subrahmanyam，1994）：

$$\text{看涨期权价格} \approx 0.4Se^{-D(T-t)}\sigma\sqrt{T-t}$$

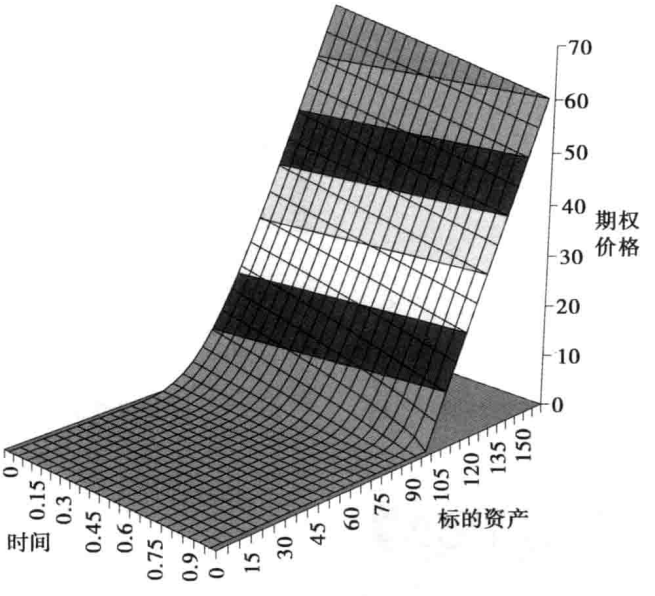


图 7-5 看涨期权价格作为标的资产价格和时间的函数

7.2.2 看跌期权定价公式

看跌期权的回报为

$$\text{回报}(S) = \max(E - S, 0)$$

看跌期权价格可以用前述方法推导，也可以用看跌期权－看涨期权平价公式推导

$$\text{看跌期权价格} = -SN(-d_1) + Ee^{-r(T-t)}N(-d_2)$$

其中 d_1 和 d_2 同上文。

当标的资产有连续红利率或标的资产为货币时，有

看跌期权价格
$-Se^{-D(T-t)}N(-d_1) + Ee^{-r(T-t)}N(-d_2)$

图 7-6 显示的是期权价格对标的资产价格的函数图像；图 7-7 是期权价格对时间的函数图像；图 7-8 则是期权价格对标的资产价格、时间两个变量的函数图像。

当资产价格满足平价远期时，看跌期权价格的近似公式（Brenner & Subrahmanyam，1994）为

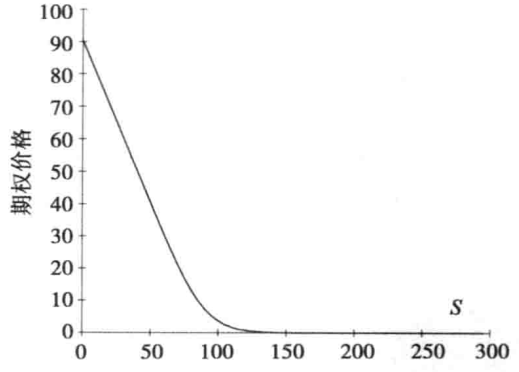


图 7-6 在固定剩余期限下看跌期权价格对标的资产价格的函数

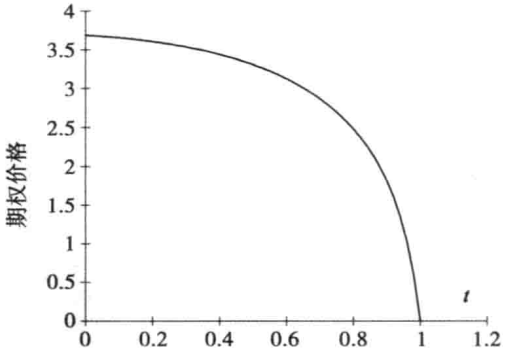


图 7-7 平价看跌期权价格对时间的函数

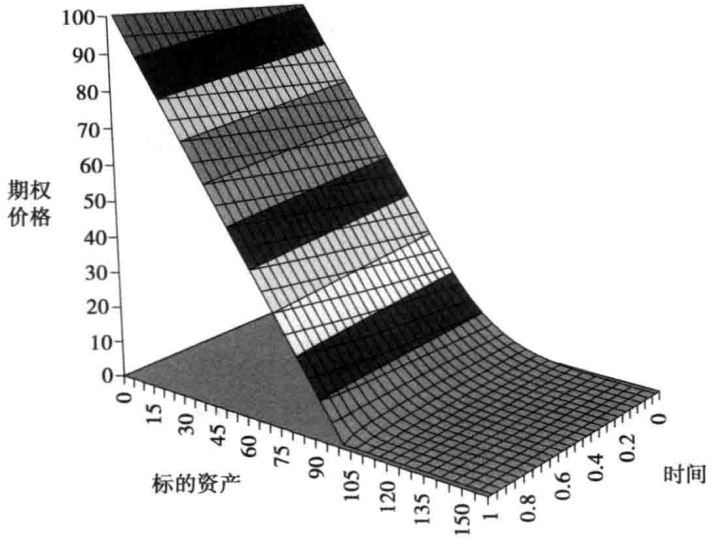


图 7-8 看跌期权价格对标的资产价格和时间的函数

$$\text{看跌期权价格} \approx 0.4\ S\mathrm{e}^{-D(T-t)}\sigma\sqrt{T-t}$$

7.2.3 二值看涨期权定价公式

二值看涨期权的回报为

$$\text{回报}(S) = \mathcal{H}(S-E)$$

其中$\mathcal{H}$是 Heaviside 函数，在自变量为正时取 1，否则取 0。

加入红利率后，期权价格可以写为

$$\frac{\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_{\log E}^{\infty}\mathrm{e}^{-(x'-\log S-(r-D-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t))^2/2\sigma^2(T-t)}\mathrm{d}x'$$

这一项正好和看涨期权公式中的第二项相同，因此

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{二值看涨期权价格}\\ e^{-r(T-t)}N(d_2)\end{array}}$$

图 7-9 是该期权的价格图像。

7.2.4 二值看跌期权定价公式

在到期时，若 $S<E$，二值看跌期权的回报为 1。因为一个二值看涨期权和一个二值看跌期权的价格之和必须等于它们在 T 时刻的回报之和的现值，即 1 的现值，所以其价格为

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{二值看跌期权价格}\\ e^{-r(T-t)}(1-N(d_2))\end{array}}$$

图 7-10 是该期权的价格图像。

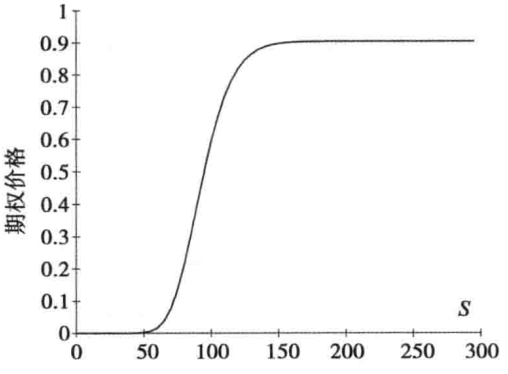


图 7-9 二值看涨期权价格

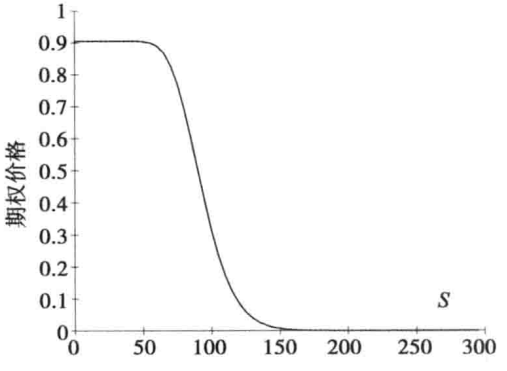


图 7-10 二值看跌期权价格

7.3 Delta

一个期权或期权组合的 Delta(Δ)，衡量的是期权或投资组合对标的资产的敏感性。它是期权或组合的价值对标的资产价格的变化率。

$$\boxed{\Delta=\frac{\partial V}{\partial S}}$$

这里 V 可以表示某一合约或整个投资组合的价值。期权组合的 Delta 就是组合

中单个期权头寸的 Delta 的加总。

我们在第 5 章介绍过 Delta 对冲这种理论上可以消除风险的工具，它不仅适用于理论，在实践中也是一个非常重要的方法。

粗略地说，金融世界可以划分为投机者和对冲者。投机者通常对某种变量的运动方向形成自己的观点（比如资产价格或是更抽象的变量如波动率），再通过某种策略来执行他们的观点。这些人可能从来不会进行对冲。

另一些人是对冲者。对冲者有两类：一些人已经持有某些头寸，希望消除特定的风险（通常使用期权来消除）；另一些人因为相信自己拥有较优的价格、能通过对冲所有的风险来获利，所以才进行期权买卖。后者才是我们说的 Delta 对冲。只有在能够消除所有由标的资产的随机波动性质带来的风险的时候，他们才能确保通过高价卖出合约赚取利润。

进行 Delta 对冲意味着在持有某种期权的同时做空 Δ 单位的标的资产。Delta 可以表示为 S 和 t 的函数（在本节的后段我会给出一些公式）。这个函数随着 S 和 t 的变化而变化，意味着持有的资产数量必须不停地变化，以保持 **Delta 中性**（Delta-neutral）的头寸，这个过程被称为**动态对冲**（dynamic hedging）。改变持有资产的数量需要持续地买卖股票，这被称为投资组合的**再次对冲**（rehedging）或**再次平衡**（rebalancing）。

在流动性很高的市场中，进行买卖的成本极低，人们可以非常频繁地进行 Delta 对冲，因此关于连续对冲的布莱克 - 斯科尔斯假设可能相当符合现实状况。在流动性不那么高的市场，买卖价差会带来很高的成本，导致人们不会频繁地进行对冲。此外，你可能根本无法按照所需的数量进行买卖。即便没有任何成本，你也无法保证对标的资产的模型设定是完全正确的。模型设定本身总是会带来一些风险。这些问题使得 Delta 对冲远没有达到完美的程度，并且在现实中标的资产的风险无法被完全对冲。本书将在第 47 章和第 48 章深入探讨离散时间对冲和交易成本的问题。

某些合约（尤其是第 23 章中的合约）的 Delta 在特定的时间或资产价格上会变得非常大，导致 Delta 对冲无法进行——如果你发现通过理论计算出的 Delta 比流通股的总量还大，那该怎么办？这种情况下，布莱克 - 斯科尔斯世界的基础崩塌了，于是任何定价公式的有效性都不复存在。如果二值期权在到期日时标的资产价格接近执行价格，这种情况就会发生。虽然我在前文中已经给出二值期权的

定价公式，在下文中也有它们的 Delta 公式，但如果我是你，我会在使用它们时格外小心。

以下是常见合约的 Delta 公式（所有公式都假设标的资产支付红利或标的资产为货币）：

常见合约的 Delta 公式

看涨期权：$e^{-D(T-t)}N(d_1)$

看跌期权：$e^{-D(T-t)}(N(d_1)-1)$

二值看涨期权：$\dfrac{e^{-r(T-t)}N'(d_2)}{\sigma S\sqrt{T-t}}$

二值看跌期权：$-\dfrac{e^{-r(T-t)}N'(d_2)}{\sigma S\sqrt{T-t}}$

$$N'(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

图 7-11 是这些函数的一些实例，其中对二值期权的价格限定了范围。

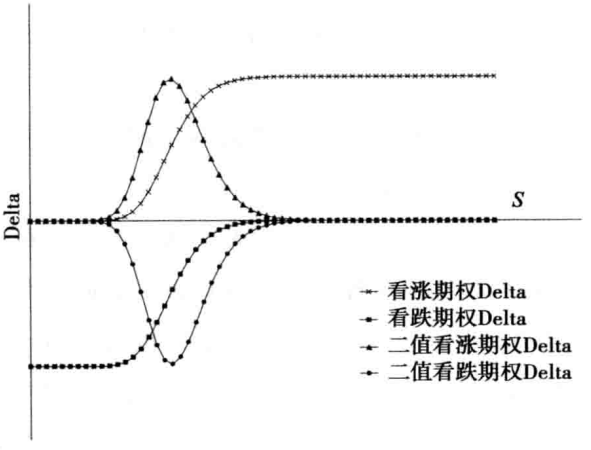


图 7-11 看涨、看跌、二值看涨和二值看跌期权的 Delta（二值期权价格的最大值限定为 1）

7.4 Gamma

期权或期权组合的 Gamma（Γ）是期权头寸对标的资产价格的二阶导数：

$$\Gamma=\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$$

Gamma 是 Delta 对标的资产价格的敏感性，它衡量的是一个头寸为了保持 Delta 中性而再次进行对冲的规模大小，或是进行再次对冲的频率大小。虽然 Delta 也随时间改变，但这种变化的影响无法与标的资产价格的布朗运动带来的变化相提并论。

在 Delta 中性头寸中，Gamma 要为投资组合的收益率与无风险利率相等（这是第 5 章中提到的无套利条件）负一部分责任。另一部分在于期权价格对时间的导数，我们将在后文中进行讨论。对冲操作在时间上的不连续性使得每次对冲之前总存在一个有限的时间段，所以现实情况比我们现在讨论的要复杂得多。只要持有的是经过 Delta 对冲得到的头寸，你必然会在其中一些对冲中盈利，在另一些对冲中亏损。在 Gamma 多头头寸（$\Gamma>0$）中，标的资产价格变动较大时你会盈利，而变动较小时你会亏损。确切地说，你将在 32% 的时间盈利，在 68% 的时间亏损，但盈利的数额要大于亏损的数额。最终结果是，你将在投资组合上获得相当于无风险收益的利润。现在你一定对这些结论摸不着头脑，在第 47 章你会知道它们是如何得出的。

在市场对波动率的看法与标的资产真实波动率的变化不符时，Gamma 也将发挥重要作用。这些内容也会在第 47 章进行讨论。

因为对冲的成本有时较高，也因为人们希望减少暴露在模型误差下的风险，很自然的做法是试着避免频繁地对投资组合进行再次对冲。由于 Gamma 衡量了对冲比率 Δ 对标的资产价格运动的敏感性，因此可以通过 Gamma 中性策略来减少对冲需求。这意味着除了买卖标的资产之外，我们还要更多地对期权进行交易。不可能只通过买卖标的资产就使所持头寸的 Gamma（标的资产的二阶导数）等于 0。我们可以在头寸中持有任意数量的期权，因此只要选择好期权和标的资产的数量，Delta 和 Gamma 就能同时为 0。要达到这个目标，至少需要持有标的资产和两种不同的期权。在现实中，人们通常不会过于频繁地调整期权头寸，因为如果标的资产的交易成本较高，其衍生品交易成本甚至会更高。

以下是常见合约的 Gamma 公式：

常见合约的 Gamma 公式

看涨期权：$\dfrac{e^{-D(T-t)}N'(d_1)}{\sigma S\sqrt{T-t}}$

看跌期权：$\dfrac{e^{-D(T-t)}N'(d_1)}{\sigma S\sqrt{T-t}}$

二值看涨期权：$-\dfrac{e^{-r(T-t)}}{\sigma^2 S^2(T-t)}d_1 N'(d_2)$

二值看跌期权：$\dfrac{e^{-r(T-t)}d_1 N'(d_2)}{\sigma^2 S^2(T-t)}$

图 7-12 是这些函数的一些实例，其中对二值期权的价格限定了范围

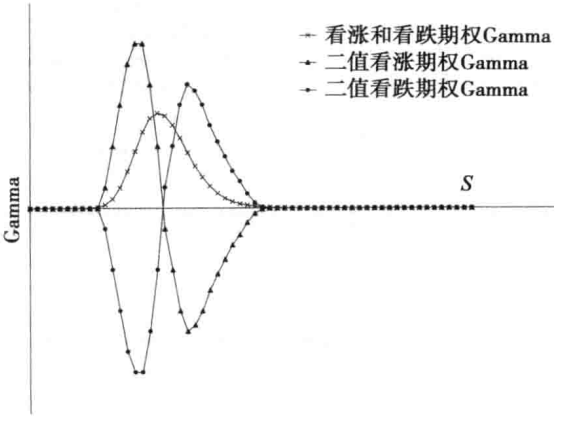


图 7-12 看涨、看跌、二值看涨和二值看跌期权的 Gamma

7.5 Theta

Theta(Θ) 是期权价格关于时间的变化率。

$$\Theta = \frac{\partial V}{\partial t}$$

Theta 通过布莱克－斯科尔斯方程与期权价格、Delta 和 Gamma 建立起相关关系。在经过 Delta 对冲的组合中，Theta 帮助确保投资组合赚取无风险收益。但它对收益的贡献是完全确定的，而 Gamma 只是在平均意义上贡献了正确的数额。

以下是常见合约的 Theta 公式：

常见合约的 Theta 公式

$$\text{看涨期权：} -\frac{\sigma S e^{-D(T-t)} N'(d_1)}{2\sqrt{T-t}} + DSN(d_1)e^{-D(T-t)} - rEe^{-r(T-t)} N(d_2)$$

$$\text{看跌期权：} -\frac{\sigma S e^{-D(T-t)} N'(-d_1)}{2\sqrt{T-t}} - DSN(-d_1)e^{-D(T-t)} + rEe^{-r(T-t)} N(-d_2)$$

$$\text{二值看涨期权：} re^{-r(T-t)} N(d_2) + e^{-r(T-t)} N'(d_2)\left(\frac{d_1}{2(T-t)} - \frac{r-D}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$$

$$\text{二值看跌期权：} re^{-r(T-t)}(1-N(d_2)) - e^{-r(T-t)} N'(d_2)\left(\frac{d_1}{2(T-t)} - \frac{r-D}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$$

图 7-13 是这些函数的实例。

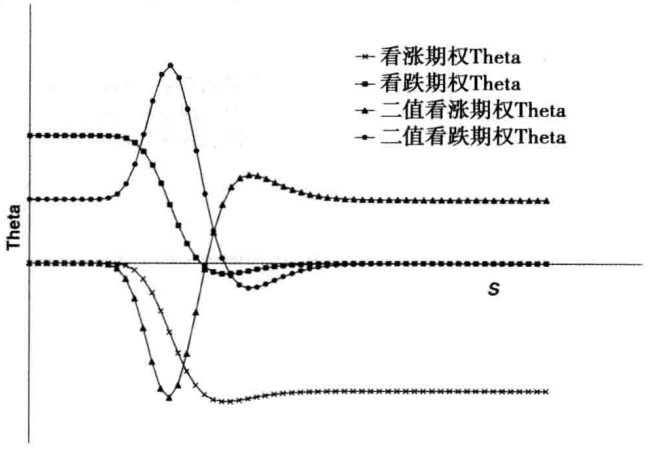


图 7-13 看涨、看跌、二值看涨和二值看跌期权的 Theta

7.6 Speed

期权的 **Speed** 是其 Gamma 对于股票价格的变化率。

$$\text{Speed} = \frac{\partial^3 V}{\partial S^3}$$

交易员使用 Gamma 来估计当股价变化时需要再次对冲的头寸大小。股价每变动 1 美元，Delta 的变化量总是等于 Gamma，不过这只是个近似估计。Delta 的实际变化可能更大，也可能更小。在股价变动很大或者在临近到期日时标的资产价格与执行价格相近的情况下，这种偏离尤其明显。因此，我们需要使用高阶泰勒级数展开中的 Speed。

以下是常见合约的 Speed 公式：

常见合约的 Speed 公式

$$\text{看涨期权：} -\frac{e^{-D(T-t)}N'(d_1)}{\sigma^2 S^2(T-t)}(d_1+\sigma\sqrt{T-t})$$

$$\text{看跌期权：} -\frac{e^{-D(T-t)}N'(d_1)}{\sigma^2 S^2(T-t)}(d_1+\sigma\sqrt{T-t})$$

$$\text{二值看涨期权：} -\frac{e^{-r(T-t)}N'(d_2)}{\sigma^2 S^3(T-t)}\left(-2d_1+\frac{1-d_1d_2}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$$

$$\text{二值看跌期权：} \frac{e^{-r(T-t)}N'(d_2)}{\sigma^2 S^3(T-t)}\left(-2d_1+\frac{1-d_1d_2}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$$

7.7　Vega

Vega 也称为 Zeta 或 Kappa，是一个非常重要却又让人困惑的量。它是期权价格对波动率的敏感性。

$$\text{Vega}=\frac{\partial V}{\partial \sigma}$$

Vega 与其他希腊字母完全不同[⊖]，因为它是一个对参数而不是对自变量进行求导的结果。这在我们对它求数值解时会导致一些变化。

在现实中，标的资产的波动率是无法确定的。不仅在任意时点衡量波动率大小非常困难，预测未来的波动率更是难上加难。假设我们将期权定价公式中的波动率设为 20%，那么期权价格对这个数字的变动有多敏感？这就是 Vega 的用途。

⊖ 它甚至不是希腊字母。在其他众多领域中，Vega 表示的可以是一种美国轿车的型号、一颗恒星（织女星）、佐罗的真名，西班牙在 16 世纪有几个叫 Vega 的作家、Vasarely 创作的一幅欧普艺术画作、电脑游戏《街头霸王》中的一个角色。另外，谁会忘记 Vincent Vega 和他的兄弟？（Vincent Vega 是美国电影《低俗小说》中颇具性格的人物。——译者注）。

合约价格对 σ 的二阶导数被称为“Vomma”，对资产价格和波动率的二阶混合偏导数被称为“Kabanga”。我怀疑它们是否全都是按照粉丝的意愿来命名的，我不会再提到它们。

同 Gamma 对冲一样，我们可以通过 Vega 对冲降低组合价值对波动率变化的敏感性。这么做可以让我们朝消除某些模型风险的方向迈出一大步，因为它降低了我们对波动率的依赖——说实话，我们无法准确地算出真实的波动率。

使用 Vega 也有不利的一面，即它只有在期权的 Gamma 的正负性始终保持不变时才有意义。例如，计算 Vega 的值对于看涨期权和看跌期权来说是有意义的，而对于二值看涨期权和二值看跌期权来说没有意义。我将二值期权合约的 Vega 公式一同列在了下面，如果真要使用它们，一定要小心。因为看涨和看跌期权的价格（以及其他 Gamma 正负性保持不变的期权）对波动率是单调的：如果看涨期权的波动率增大，在任意一点的期权价格都会上升。而对 Gamma 正负性会改变的合约，Vega 可能会等于 0，因为如果波动率增大，在一些点上合约价格上升，在另一些点上合约价格下降。这样的合约极大地暴露在波动率风险下，但这种风险却无法用 Vega 来衡量。更多细节见第 52 章。

以下是常见合约的 Vega 公式：

常见合约的 Vega 公式

看涨期权：$S\sqrt{T-t}\,e^{-D(T-t)}N'(d_1)$

看跌期权：$S\sqrt{T-t}\,e^{-D(T-t)}N'(d_1)$

二值看涨期权：$-e^{-r(T-t)}N'(d_2)\left(\sqrt{T-t}+\frac{d_2}{\sigma}\right)$

二值看跌期权：$e^{-r(T-t)}N'(d_2)\left(\sqrt{T-t}+\frac{d_2}{\sigma}\right)$

图 7-14 显示的是一个平价看涨期权的价格关于波动率的函数。到期期限为 1 年，执行价格是 100，利率是 10%并且没有红利。对看涨期权和看跌期权，无论实值或虚值的程度有多高，这条曲线总是单调上升——不确定性的增加提高了合约的价值。这条曲线的斜率就是 Vega。

图 7-15 显示的是一个虚值状态的二值看涨期权价格关于波动率的函数。到期期限为 1 年，资产价格为 88，执行价格为 100，利率为 10%并且没有红

利。注意，在波动率大约为24%时函数取得最大值，因此期权价格对波动率的变化是不单调的。之后我们将会看到为什么这一特征让人怀疑使用Vega的意义。

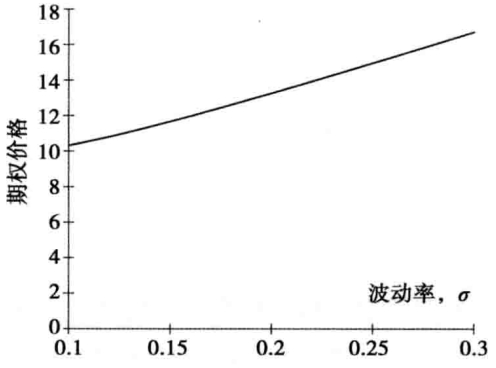


图7-14 平价看涨期权的价格关于波动率的函数

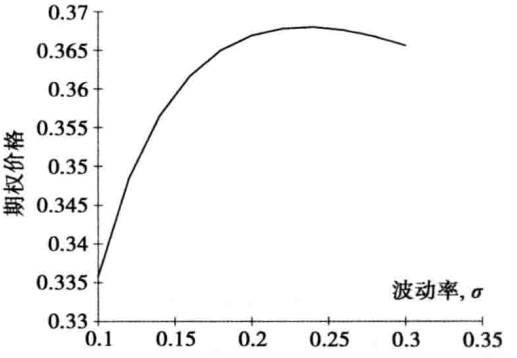


图7-15 虚值状态的二值看涨期权价格关于波动率的函数

7.8 Rho

Rho(ρ) 是期权价格对利率的敏感性，它在布莱克－斯科尔斯期权定价公式中出现过：

$$\rho = \frac{\partial V}{\partial r}$$

在实践中，人们通常使用整条利率期限结构，即把利率看作时间的函数$r(t)$。假设所有时间点上的利率平行移动，那么Rho就是对利率水平的敏感性。同Vega一样，在使用Rho时要注意它的适用范围。更多细节见第52章。

以下是常见合约的Rho公式：

常见合约的Rho公式

看涨期权： $E(T-t)e^{-r(T-t)}N(d_2)$

看跌期权： $-E(T-t)e^{-r(T-t)}N(-d_2)$

二值看涨期权： $-(T-t)e^{-r(T-t)}N(d_2)+\frac{\sqrt{T-t}}{\sigma}e^{-r(T-t)}N'(d_2)$

二值看跌期权： $-(T-t)e^{-r(T-t)}(1-N(d_2))-\frac{\sqrt{T-t}}{\sigma}e^{-r(T-t)}N'(d_2)$

以下则是常见合约对红利率或外国利率的敏感性：

常见合约对红利率的敏感性的公式

看涨期权：$-(T-t)Se^{-D(T-t)}N(d_1)$

看跌期权：$(T-t)Se^{-D(T-t)}N(-d_1)$

二值看涨期权：$-\frac{\sqrt{T-t}}{\sigma}e^{-r(T-t)}N'(d_2)$

二值看跌期权：$\frac{\sqrt{T-t}}{\sigma}e^{-r(T-t)}N'(d_2)$

7.9 隐含波动率

布莱克－斯科尔斯看涨期权定价公式将到期期限、执行价格、标的资产价格和利率以及波动率看作输入参数以计算出期权价格。其他变量都易于测量，只有波动率是个例外。我们该把什么波动率代入公式？交易员可以在他的电脑屏幕上看到如下信息：某个看涨期权到期期限还有 4 个月，执行价格为 100，期权当前价格为 6.51，标的资产价格为 101.5，短期利率为 8%。我们能不能利用这些信息呢？

现在将波动率和期权价格的关系倒过来。知道了当前的期权价格，我们可以想想："用多大的波动率可以算出这个正确的市场价格？"这就是**隐含波动率**(implied volatility)。隐含波动率是使通过布莱克－斯科尔斯期权定价公式计算出的期权理论价格等于市场价格的标的资产波动率。从某种意义上说，它是市场对于期权存续期内整体波动率水平的看法。在用看涨期权价格估计隐含波动率时，只要期权价格高于 0 且低于资产价格，我们就能求出隐含波动率的唯一解（如果期权价格超出这个范围，市场上将有巨大的套利机会）。因为无法用简单的公式将隐含波动率表示为期权价格的函数，我们必须解关于 σ 的方程：

$$V_{BS}(S_0, t_0; \sigma, r; E, T) = \text{已知值}$$

其中 V_{BS} 是布莱克－斯科尔斯期权定价公式。当前资产价格是 S_0，当前日期是 t_0，其他参数均已知，只剩下 σ 未知。以下是一个通过看涨期权的市场价格计算隐含波动率的算法，解的精度可以是任意给定的数值。所用的方法被称为**牛顿－拉普森**（Newton-Raphson）方法，它在计算中用到了期权价格对波动率的导数（也就是 Vega）。这种方法非常适用于看涨期权价格这样"乖巧"的函数。

```
Function ImpVolCall(MktPrice As Double, Strike As
         Double, Expiry As Double, _ Asset As Double,
         IntRate As Double, error As Double)
Volatility = 0.2
dv = error + 1
While Abs(dv) > error
    d1 = Log(Asset / Strike) + (IntRate + 0.5 *
         Volatility * Volatility) * Expiry
    d1 = d1 / (Volatility * Sqr(Expiry))
    d2 = d1 - Volatility * Sqr(Expiry)
    PriceError = Asset * cdf(d1) - Strike *
                 Exp(-IntRate * Expiry) _
                 * cdf(d2) - MktPrice
    Vega = Asset * Sqr(Expiry / 3.1415926 / 2) *
           Exp(-0.5 * d1 * d1)
    dv = PriceError / Vega
    Volatility = Volatility - dv
Wend
ImpVolCall = Volatility
End Function
```

在这个算法中，我们需要正态分布的累积分布函数。以下是一个能精确、快速地估计出标准正态分布累积分布函数的简单算法。

$$对于\ x \geqslant 0, N(x) \approx 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} (a_1 d + a_2 d^2 + a_3 d^3 + a_4 d^4 + a_5 d^5)$$

其中

$$d = \frac{1}{1 + 0.023\ 164\ 19x}$$

并且

$$a1 = 0.319\ 381\ 53, a2 = -0.356\ 563\ 782, a3 = 1.781\ 477\ 937, a4 = -1.821\ 255\ 978$$

$$a5 = 1.330\ 274\ 429$$

对于 $x<0$，用公式 $N(x)+N(-x)=1$ 进行计算。

```
Function cdf(x As Double) As Double
Dim d As Double
Dim temp as Double
Dim a1 As Double
Dim a2 As Double
Dim a3 As Double
Dim a4 As Double
Dim a5 As Double
d = 1 / (1 + 0.231 641 9 * Abs(x))
a1 = 0.31938153
a2 = -0.356563782
a3 = 1.781477937
a4 = -1.821255978
a5 = 1.330274429
temp = a5
temp = a4 + d * temp
```

```
temp = a3 + d * temp
temp = a2 + d * temp
temp = a1 + d * temp
temp = d * temp
cdf = 1 - 1 / Sqr(2 * 3.1415926) * Exp(-0.5 * x * x) * temp
If x < 0 Then cdf = 1 - cdf
End Function
```

在实践中，如果对同一标的资产的不同执行价格、到期期限的期权分别计算隐含波动率，我们会发现波动率不是常数。图 7-16 是一个典型的计算结果，是于 1999 年 9 月 9 日计算的标普 500 指数隐含波动率，计算所用的期权都将在当月到期。由于看跌期权 - 看涨期权平价关系，看涨期权和看跌期权算出的隐含波动率应当相等。图中出现的差异可能是由买卖价差或计算波动率的过程中存在微小的时间差导致的。

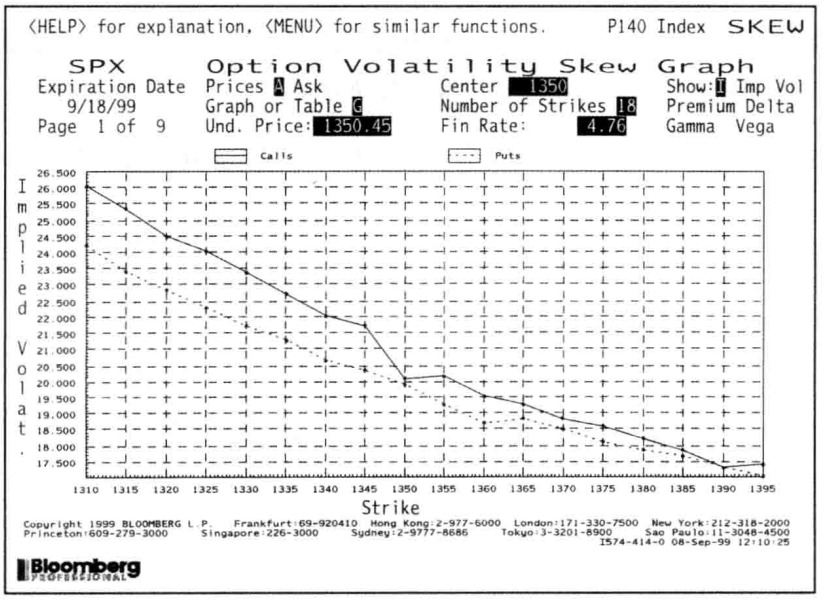


图 7-16 标普 500 指数隐含波动率

资料来源：Bloomberg L. P.

这种曲线形状通常被称为**偏斜**（skew），如果两端都上翘，则称为微笑。还有一种被称为**皱眉**（frown）的形状。图 7-16 中的曲线是一张扭曲的笑脸，向下倾斜，因此是反向偏斜。不论这条曲线是什么形状，在特定市场中，其特定形状通常保持不变，反映出该市场的某些特征。

隐含波动率与执行价格和到期期限的关系可以从很多方面解释。最简单的一种解释是它以某种复杂的方式体现了市场对未来波动率的看法（这个话题将在第 50 章中进行讨论）。还有另一种可能性，即它反映了波动率的不确定性——也许

波动率本身也是一个随机变量，详见第51章。

外汇市场的从业者通常使用的是隐含波动率对应期权Delta的图表。图7-17是股票衍生品交易员常用的隐含波动率对执行价格图，图7-18是外汇衍生品交易员常用的隐含波动率对Delta图。

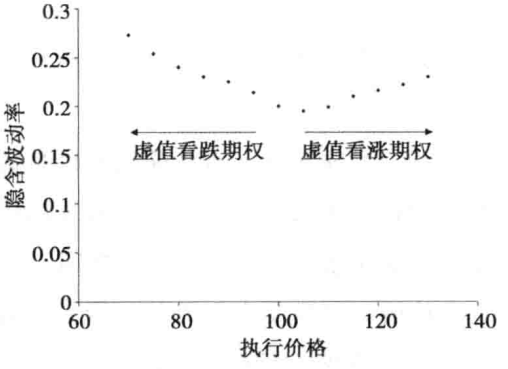


图7-17 隐含波动率对执行价格

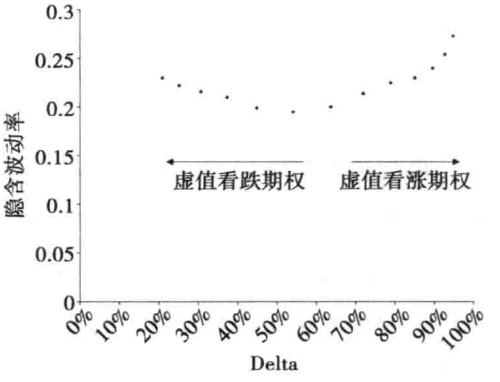


图7-18 隐含波动率对Delta

虽然这两种观察数据的方式本质上是一样的（只看期权价格对执行价格图其实也一样），但它们的确使股票和外汇市场产生了资产价格运动特征上的差别。在现实中，当标的资产价格改变时，期权价格随之改变，隐含波动率也往往随之改变。后者与现有的理论完全不相符，但却时时刻刻在发生着，我们将在之后进一步探讨这个问题。两个市场最重要的差别如下：人们通常的说法是，在股票市场上隐含波动率作为执行价格的函数保持不变，而在外汇市场上隐含波动率作为Delta的函数保持不变，它们分别被称为黏性执行价模型和黏性Delta模型。出现这种差异的部分原因可能仅仅是因为两个市场上的交易员习惯于看不同类型的图表，而不是因为股票和汇率有本质上的区别。

7.10 不同类型的对冲

7.10.1 为什么要对冲

最广义的对冲是指利用不同的风险资产（或赌约）的相关性来降低风险的行为。这个概念被广泛用于赛马业和其他体育博彩业，当然，还有金融业。人们进行对冲的原因是它可以改善风险/收益状况。

比如在经典的现代资产组合理论框架（第 18 章）中，我们通常可以构造许多具有相同的预期收益率和不同的收益率方差（也就是“风险”）的组合。显然，如果两个投资组合的预期收益相同，投资于风险更低的组合是更好的选择。

7.10.2 两种主要的分类

在各种对冲类型之间，最重要的区别也许就是模型独立对冲和模型依赖对冲之间的区别。

模型独立对冲（model-independent hedging）：看跌期权 - 看涨期权平价是这种对冲的一个例子。同一标的资产的看涨期权和看跌期权（当它们都是欧式期权并且有相同的执行价格和到期日时）、标的股票和零息票债券，这四者之间有一种简单的相关关系，并且这种关系与标的资产价格如何改变完全无关。另一个例子是现货 - 远期平价。在这两个例子中，进行对冲前我们不需要确定资产的价格变动特征，甚至都不需要确定波动率。像这样模型独立的对冲方法并不多见。

模型依赖对冲（model-dependent hedging）：大多数复杂的金融对冲策略都依赖于对标的资产建立的模型。最显而易见的例子是在对布莱克 - 斯科尔斯理论进行分析时用到的对冲，它引出了整套衍生品定价理论。通常我们在给衍生品定价时至少要知道标的资产的波动率。如果模型本身是错误的，那么算出的期权价格和任何相关对冲策略都是错误的。

7.10.3 Delta 对冲

Delta 对冲（Delta hedging）是衍生品理论的基石之一。它利用期权和标的资产，以一种聪明的对冲策略在理论上完全消除所有的风险。Delta 对冲寻找的是期权和股票的价格变动之间的完全相关关系。它是一种“动态”对冲——对冲的过程必须在持续地监控和频繁地买卖标的资产的前提下完成。由于需要频繁进行再次对冲，任何动态对冲策略都会产生由交易成本带来的损失。在某些市场中这个问题非常重要。

7.10.4 Gamma 对冲

Gamma 对冲（Gamma hedging）技术通常被用于减小每次对冲的规模和（或）加大再次对冲之间的时间间隔以降低成本。在资产价格变动幅度较小的情况下，经过 Delta 对冲的组合对价格变动不敏感。但有一个小误差，其原因在于

投资组合对标的资产价格的凸性关系。Gamma 对冲则是一种更加精确的对冲，在理论上能消除二阶项的影响。举个例子，某人用香草期权和标的资产来对冲一份奇异期权，那么他要计算好香草期权和标的资产的数量，使整个组合的 Delta 和 Gamma 在瞬间都等于 0。

7.10.5 Vega 对冲

如前面提到的，期权定价和对冲策略的好坏依赖于为标的资产建立的模型。标的资产的波动率是决定期权价格的关键参数。遗憾的是，这个参数非常难以衡量，甚至难以估计。同时，与一些简单的理论所假设的不同，它并不是一个常数。一份合约的价格显然取决于这个参数，而要保证投资组合的价值对它不敏感，我们可以进行 **Vega 对冲**（Vega hedging）。具体做法是：用标的资产和另一种期权来对冲某个期权，使得组合的 Delta 和 Vega（组合价值对波动率的敏感性）均为 0。实践中这种方法通常比较令人满意，但在理论上有些自相矛盾——我们不该用一个常数波动率模型（基本的布莱克－斯科尔斯模型）来计算因变量对某个参数（已经假定为常数）的敏感性。自变量（标的资产价格和时间）和参数（波动率、红利率、利率）之间的差异在这里显得非常重要。依靠期权价格对自变量的敏感性进行对冲是合理的，但依靠价格对参数的敏感性就没有道理了。要解决这个问题，可以独立地将波动率等参数设为自变量进行建模，这样就有可能建立一个没有矛盾的理论。

7.10.6 静态对冲

Delta 对冲在理论上和实践中都存在不少问题。在实践中，对冲必须在离散的时间下进行并且成本较高。有时要遵循理论给出的结果就必须买卖巨额的标的资产，在处理障碍期权和回报不连续的期权时就会遇到这类问题。在理论上，标的资产的模型并不完美，至少我们不能精确地测算参数的真实值。单独使用 Delta 对冲将使我们极大地暴露于模型风险中。如果我们在进行 Delta 对冲的同时采用**静态对冲**（static hedging）策略就能减少或消除这些问题的影响：通过买卖流动性更好的可交易合约来减少原始合约的现金流。静态对冲只在开始时执行操作，直到合约到期时都不需要进行再次调整。最极端的例子中，奇异衍生品合约产生的所有现金流都可以用可交易的期权匹配，那么该合约的价格就等于建立静

态对冲的成本，因此也就不需要模型来进行定价（不过如果可以这样对冲，这个奇异期权本身也就称不上“奇异”了）。

7.10.7 保证金对冲

在市场剧烈波动时，使银行和其他机构遭受损失的通常不是所持资产的账面价值变化，而是突然出现的大额保证金追加需求。近年来因保证金导致重大损失的例子有德国金属公司和长期资本管理公司。卖出期权的风险非常大。买入期权时，潜在的亏损只是最初的期权费，而潜在的盈利额可能无限大；卖出期权时，潜在的盈利有限，而潜在的亏损可能非常大。因此，为了降低不利情况发生时期权卖方的违约风险，进行期权登记和结算的清算所要求期权卖方存入保证金。有两种形式的保证金：初始保证金和维持保证金。初始保证金是在合约开始时存入的保证金。保证金的总额必须维持在事先规定的维持保证金水平之上，如果低于这个水平则必须存入更多的现金（或等值的债券、股票等）。需要存入的保证金数额取决于具体的合约。在剧烈的市场变动中，期权卖方可能突然遇到难以承受的大量保证金需求。我们可以进行**保证金对冲**（margin hedging）来防止这种情况发生。具体地说，建立一个投资组合，使得组合中某部分合约的保证金需求可以用其他合约产生的资金来抵消。在场外交易的合约通常没有相关的保证金要求，因此不会用于保证金计算中。[⊖]

7.10.8 崩盘（白金）对冲

我们讨论的最后一种对冲方法针对极端情况下的市场。市场崩盘对对冲有两个显著影响。首先，市场变动大且迅速，同时凸性的影响增大，这导致我们无法用传统方法进行 Delta 对冲。其次，市场上的相关性变得毫无意义，通常所有的相关系数都会变为 1（或 −1）。**崩盘对冲**（crash hedging）或**白金对冲**（Platinum hedging）通过利用第二种影响来尽可能降低最坏情况下投资组合遭受的损失。这种被称为崩盘度量（见第 43 章）的方法不依赖于诸如测量波动率参数之类的难题，因此是一种非常稳健的对冲策略。崩盘对冲有两种形式：组合的账面价值对冲和保证金需求对冲。

⊖ 目前越来越多的国家都建立了中央清算系统，负责场外交易的衍生品的保证金结算。——译者注

7.11 总结

本章推导了一些非常重要的公式，同时也看到了各种对冲比率的定义和描述。离开对冲，衍生品交易就和赌博没有区别。对冲的核心就是管理风险和降低不确定性。

延伸阅读

- Vega 的详细分析见 Taleb（1997）。
- 求方程根（即求隐含波动率）的常用方法见 Press 等人（1992）。
- 互联网上有许多“虚拟”期权定价商，如 www. cboe. com。
- 我不想花太多篇幅用于推导甚至是给出公式。世界上存在着 1001 本包含期权公式的书，其中甚至有一本书包含了 1001 个期权公式（Haug，1997）。
- Thorp（2002）的一系列文章，探讨了他如何在 20 世纪 60 年代后期推导出正确的期权定价公式。
- Haug（2003）讨论了一些简单方程在交易中的复杂用法。

	看涨期权	看跌期权	二值看涨期权	二值看跌期权
Value V Black-Scholes value	$Se^{D(T-t)}N(d_1)$ $-Ee^{-r(T-t)}N(d_2)$	$-Se^{-D(T-t)}N(-d_1)$ $+Ee^{-r(T-t)}N(-d_2)$	$e^{-r(T-t)}N(d_2)$	$e^{-r(T-t)}(1-N(d_2))$
Delta $\frac{\partial V}{\partial s}$ Sensivity to underlying	$e^{-D(T-t)}N(d_1)$	$e^{-D(T-t)}(N(d_1)-1)$	$\frac{e^{-r(T-t)}N'(d_2)}{\sigma S\sqrt{T-t}}$	$-\frac{e^{-r(T-t)}N'(d_2)}{\sigma S\sqrt{T-t}}$
Gamma $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ Sensitivity of delta to underlying	$\frac{e^{-D(T-t)}N'(d_1)}{\sigma S\sqrt{T-t}}$	$\frac{e^{-D(T-t)}N'(d_1)}{\sigma S\sqrt{T-t}}$	$-\frac{e^{-r(T-t)}d_1N'(d_2)}{\sigma^2S^2(T-t)}$	$\frac{e^{-r(T-t)}d_1N'(d_2)}{\sigma^2S^2(T-t)}$
Theta $\frac{\partial V}{\partial t}$ Sensitivity to time	$-\frac{\sigma Se^{-D(T-t)}N'(d_1)}{2\sqrt{T-t}}$ $+DSN(d_1)e^{-D(T-t)}$ $-rEe^{-r(T-t)}N(d_2)$	$-\frac{\sigma Se^{-D(T-t)}N'(-d_1)}{2\sqrt{T-t}}$ $-DSN(-d_1)e^{-D(T-t)}$ $+rEe^{-r(T-t)}N(-d_2)$	$re^{-r(T-t)}N(d_2)$ $+e^{-r(T-t)}N'(d_2)\times$ $\left(\frac{d_1}{2(T-t)}-\frac{r-D}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$	$re^{-r(T-t)}(1-N(d_2))$ $-e^{-r(T-t)}N'(d_2)\times$ $\left(\frac{d_1}{2(T-t)}-\frac{r-D}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$
Speed $\frac{\partial^3 V}{\partial S^3}$ Sensitivity of gamma to underlying	$-\frac{e^{-D(T-t)}N'(d_1)}{\sigma^2S^2(T-t)}\times$ $(d_1+\sigma\sqrt{T-t})$	$-\frac{e^{-D(T-t)}N'(d_1)}{\sigma^2S^2(T-t)}\times$ $(d_1+\sigma\sqrt{T-t})$	$-\frac{e^{-r(T-t)}N'(d_2)}{\sigma^2S^2(T-t)}\times$ $\left(-2d_1+\frac{1-d_1d_2}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$	$\frac{e^{-r(T-t)}N'(d_2)}{\sigma^2S^3(T-t)}\times$ $\left(-2d_1+\frac{1-d_1d_2}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$
Vega $\frac{\partial V}{\partial \sigma}$ Sensitivity to volatility	$S\sqrt{T-t}e^{-D(T-t)}N'(d_1)$	$S\sqrt{T-t}e^{-D(T-t)}N'(d_1)$	$-e^{-r(T-t)}N'(d_2)\times$ $\left(\sqrt{T-t}+\frac{d_2}{\sigma}\right)$	$e^{-r(T-t)}N'(d_2)\times$ $\left(\sqrt{T-t}+\frac{d_2}{\sigma}\right)$
Rho(r) $\frac{\partial V}{\partial r}$ Sensitivity to interest rate	$E(T-t)e^{-r(T-t)}N(d_2)$	$-E(T-t)e^{-r(T-t)}N(-d_2)$	$-(T-t)e^{-r(T-t)}N(d_2)$ $+\frac{\sqrt{T-t}}{\sigma}e^{-r(T-t)}N'(d_2)$	$-(T-t)e^{-r(T-t)}(1-N(d_2))$ $-\frac{\sqrt{T-t}}{\sigma}e^{-r(T-t)}N'(d_2)$
Rho(D) $\frac{\partial V}{\partial D}$ Sensitivity to dividend yield	$-(T-t)Se^{-D(T-t)}N(d_1)$	$(T-t)Se^{-D(T-t)}N(-d_1)$	$-\frac{\sqrt{T-t}}{\sigma}e^{-r(T-t)}N'(d_2)$	$\frac{\sqrt{T-t}}{\sigma}e^{-r(T-t)}N'(d_2)$

$d_1=\dfrac{\log(S/E)+\left(r-D+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$，$d_2=\dfrac{\log(S/E)+\left(r-D-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}=d_1-\sigma\sqrt{T-t}$，$N(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\left(\frac{1}{2}\right)\xi^2}d\xi$ 和 $N'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\left(\frac{1}{2}\right)x^2}$

第 8 章

布莱克 - 斯科尔斯世界的简单拓展

本章内容

- 复杂的红利结构
- 跳跃条件
- 时变波动率、利率和红利率

8.1 引言

本章介绍的是关于布莱克 - 斯科尔斯世界几种可能的拓展。我将讨论分红对标的资产的影响以及如何在分析框架中引入时变参数。通过对这两个问题的讨论，我们可以得到一系列有趣而重要的数学、金融结论。

这些一般化拓展都十分直观。但在本书第五部分，我要介绍一系列刻画金融世界的其他模型，这些模型已然与布莱克 - 斯科尔斯世界相去甚远。

8.2 红利、国外利率和持有成本

在第 5 章中，我阐述了如何在布莱克 - 斯科尔斯期权定价框架中考虑某些特定的红利结构。在第 7 章中，我给出了香草期权合约的定价公式，同时给出了考虑标

的资产支付红利的情形。从数学的角度来看，之前讨论的红利结构问题是再简单不过的。之前的假设是，资产所有者收到连续的、与资产价值成比例的红利。换句话来说，资产所有者在每段时间步长 $\mathrm{d}t$ 中，都会收到数量为 $DS\mathrm{d}t$ 的红利。如果标的资产是由许多会分红的股票组成的指数，且各股票的付息日平均地分布在一整年之中，那么该红利结构是符合现实的。如果标的资产是货币，这个假设依然合理。在这种情况下，我们只要简单地把国外利率当成“红利率”处理即可。同样，如果标的资产是商品资产，其持有成本与总价值成比例，那么“红利率”就是该商品的持有成本（这里要加上一个负号，因为红利可以带来利益，但是我们必须支付持有成本）。

简单概括一下，如果资产的价格为 S，且在每段时间步长 $\mathrm{d}t$ 内收到数量为 $DS\mathrm{d}t$ 的红利，我们有

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+(r-D)S\frac{\partial V}{\partial S}-rV=0$$

然而，如果标的资产是单只股票，那么恒定且连续支付的红利率假设就是不合理的。

8.3 红利结构

通常来说，美国股票市场的红利每个季度发放一次；而英国股票市场的红利每半年或每个季度发放一次。发放红利的决策由董事会在支付之前的一段时间决定，而且红利发放的数量是公开披露的。当期红利数量经常与前一次分红大致相同，但会显著反映公司的经营绩效。红利数量按照美元额度来计数，但并不与分红决策时的股价成比例。因此，现实情形和上文提及的简单模型有三方面差异：

- 直到分红前一小段时间，红利的数量都是未知的。
- 红利是按美元支付的，与股价无关。
- 红利的支付是离散的，而非全年连续。

接下来，我将对红利做出一系列的假设：

- 红利数量是已知的，可能是付息日当天资产价值的某种函数。
- 红利的支付日期已知，且红利在支付日期离散地进行支付。

我不准备使用其他的假设，因为它们将令模型变得太复杂。比如，红利的数量和（或者）日期是随机的，红利是分红决策时股价的某种函数，红利取决于股票上个季度的表现情况，等等。

8.4　分红和无套利

股票对分红应该有怎样的反应？我们换个角度思考问题，如果你可以在除息日之前或之后购买股票，你该如何抉择？

先介绍一些符号，t_i 是除息日，D_i 是分红的数量。红利可能是标的资产的函数，但必须是一个确定性函数。t_i^- 表示除息前的瞬间，t_i^+ 表示除息后的瞬间。

投资者在 t_i^- 或更早购买股票将获得分红的权利；投资者在 t_i^+ 或更晚购买股票，就不能参与此次分红。在除息日之前购买股票似乎是有优势的。当然，这种优势会被除息之后的股价下跌所抵消。除息日之后，股价以红利金额的量下跌。如果不发生这种情况，那么就会存在套利机会。我们写成：

$$S(t_i^+) = S(t_i^-) - D_i \qquad (8\text{-}1)$$

图 8-1 显示的是一个体现分红时资产价格下跌的资产价格路径图。图中下跌的幅度被夸大了。

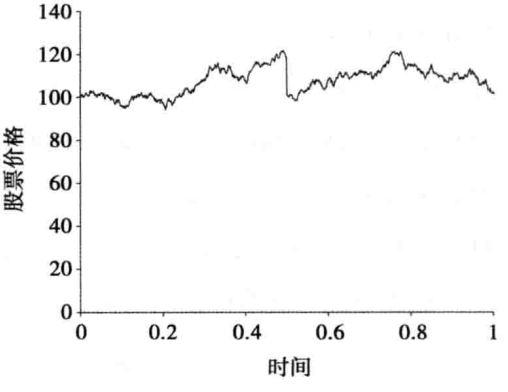


图 8-1　除息日股票价格路径

这种股价跳跃想必会对期权价值产生影响，我们将在下一章讨论。

8.5　除息时刻前后期权价值的表现

我们已经见证了在除息前后，标的资产价值以一种完全可预测的方式跳跃。

当一个自变量发生非连续变化时，**跳跃条件**（jump conditions）用于描述因变量，即期权价格，在此时的值。当前的例子中，分红使得资产价格发生非连续变化，这将如何影响期权价值？期权价格是否也发生跳跃？跳跃条件将用来描述跳跃前后（即 t_i^- 到 t_i^+）期权价值的关系。跳跃条件可以由简单的无套利原理推

导出来。

为了理解什么是跳跃条件，自然就会提出以下问题："当股价发生跳跃时，我会盈利或损失多少?"如果持有期权，你不会收到任何应支付给股票持有者的红利。如果红利的数量和除息时间是提前可知的，人们是不会对股价的下跌感到吃惊的。那么结论一定就是，期权价值在除息前后不会发生跳跃，它的路径是连续的。除息前后期权价值的连续性可以写成：

$$V(S(t_i^-),t_i^-) = V(S(t_i^+),t_i^+) \tag{8-2}$$

或者，用红利数量 D_i 表示：

$$\boxed{V(S,t_i^-) = V(S-D_i,t_i^+)} \tag{8-3}$$

可以通过图 8-2 来解释跳跃条件及其对期权价值的影响。在图中，图 8-2a 显示了付息日后股价实现下跌的情形。图 8-2b 显示了看涨期权价格相应的变化。图 8-2c 显示了在除息日前和除息日后作为股价函数的期权价值。观察图中的点 A 和点 B。点 A 是除息后的股价；点 B 是除息前的股价。在图 8-2c 中，我们可以看到与除息前后股价相联系的期权价值。这两个期权的价值是一样的，都可用 C 表示。虽然资产价值下跌了，但是期权价值不变。这是因为整条 *V-S* 曲线发生了移动。式（8-3）描述了除息前后期权价值的关系。我将给出两个例子。

假设分红与股票价格成比例，即 $D_i = DS$。在该案例中有：

$$S(t_i^+) = (1-D)S(t_i^-)$$

式（8-3）就可写成：

$$V(S,t_i^-) = V((1-D)S,t_i^+)$$

如果我们对除息后的期权价值曲线运用因子 $(1-D)^{-1}$ 向水平方向拉伸，那么除息前后的期权价值曲线就会完全一致。因此，即便期权价值在除息前后是连续的，Delta 的值也是离散变化的。

如果红利独立于股价，那么

$$S(t_i^+) = S(t_i^-) - D_i$$

其中 D_i 独立于股票价格。只要把除息前的期权价值曲线往左平移 D_i 单位，就跟除息后的曲线完全一致。

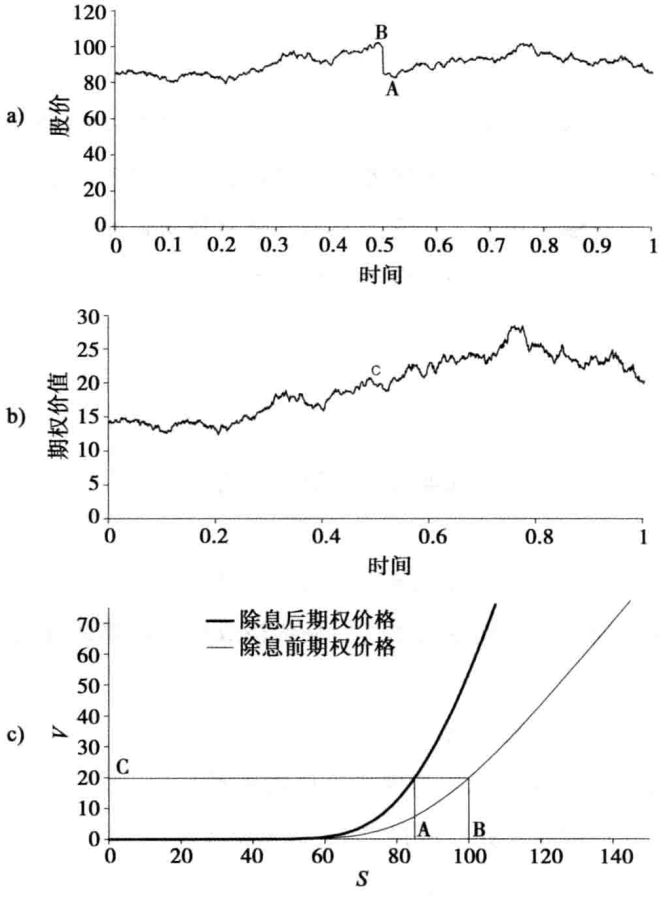


图 8-2 a）付息日后股价实现下跌的情形；b）期权价值相应的变化（以看涨期权为例）；c）期权价值作为除息日前和除息日后股价函数的情形

8.6 商品

便利收益（convenience yield）是通过持有实物商品而非其期货合约所能得到的利益或者溢价。例如，实际持有石油会带来明显的利益。这样的事实自然会使得我们想要把商品分为两类。

- 投资性商品：由于投资目的而持有的商品，例如黄金。
- 消费性商品：由于消费目的而持有的商品，例如石油或者小麦。因为该类商品可以用来消费，并具有可消费的价值，所以当其价格上涨时，人们也不会轻易出售。关键是，这使得套利行为变得单边化。

8.6.1 期货价格和套利

对现货和期货价格之间关系的一般刻画方式并不适用于消费性商品，我们只能得到期货价格的上限，这是因为消费性商品可能面临各种出售方面的限制；石油可以起到供热、运输等作用，按常理是不会轻易被出售的。

无套利定价理论依然适用于投资性商品期货。

8.6.2 储藏成本

1. 不存在储藏成本

如果没有储藏成本，现货和期货价格的关系为

$$F = Se^{r(T-t)}$$

2. 对投资性商品，储藏成本与现货价格成比例

如果存在储藏成本，且储藏成本与商品价格成比例，那么可得

$$F = Se^{(r+u)(T-t)}$$

这相当于存在一个负的红利率。

3. 对消费性商品，储藏成本与现货价格成比例

对所有的消费性商品，我们可得

$$F \leqslant Se^{(r+u)(T-t)}$$

这是因为商品持有者不会积极出售这些准备用于消费的商品（按照现货价格）。当石油的现货价格相对较低时，他们可能购买更多的石油。但是当石油现货价格较高时，他们不会出售已持有的石油，因为这样可能会导致燃料的缺乏。

8.6.3 便利收益

由于

$$F \leqslant Se^{(r+u)(T-t)}$$

我们引入**便利收益**（convenience yield）y，使得

$$F = Se^{(r+u-y)(T-t)}$$

式中 $y \geqslant 0$。对投资性商品而言，$y=0$。

8.6.4 持有成本

持有成本（cost of carry）包括储藏成本加上融资利息，再减去资产的所有

收益。

例子：通常来说布莱克 - 斯科尔斯方程的漂移系数刚好为 r，但是如果存在如下形式的持有成本，漂移系数就会改变：

- 不存在红利或其他：r；
- 红利率：$r-D$；
- 外汇：$r-r_f$；
- 商品：$r+u$。

便利收益率不包含在其中。

8.6.5　对期权的影响

如果 S 表示现货价格，那么现货期权就满足

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+(r+u)S\frac{\partial V}{\partial S}-rV=0$$

进行以下变量替换

$$F=S\mathrm{e}^{(r+u-y)(T-t)},\ H(F,t)=V(S,t)$$

可得

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 F^2\frac{\partial^2 H}{\partial F^2}+yF\frac{\partial H}{\partial F}-rH=0$$

这就是包含了持有成本和便利收益率的相关方程。

8.7　融券和回购

我已经多次提及卖空股票进行对冲，但在现实生活中，如何出售自己并不拥有的商品呢？何况商品理应以“正”的数量而不是负的数量被购买。为了使这个概念更具体，想象一下你准备卖掉一台割草机，但你手头没有可供出售的割草机，该怎么操作？很简单，只要从邻居那儿借一台并把它卖掉！当邻居找你要回割草机时，你再去买一台新的给他。如果这时候割草机已经降价，那么你就能从中获利。

在股票领域，运用相同的思路：如果你要卖空股票，就要先借入股票。但这样的操作通常是存在成本的，比如所借额度相应的利息。任何期权定价模型都应该考虑这些成本。为了对此进行定量刻画，假设你必须为融券支付利息，利率为 R，本金为所借股票的价值。现在，让我们回到布莱克 - 斯科尔斯的理论中，在

分析时考虑这些成本。

我们由股票的对数正态随机游走开始：

$$dS = \mu S dt + \sigma S dX$$

接着，我们建立一个资产组合，买入期权并卖空股票：

$$\Pi = V(S,t) - \Delta S$$

组合的变动表示为

$$d\Pi = dV - \Delta dS$$

使用伊藤引理，可得

$$d\Pi = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt - \Delta dS$$

当然，这个公式并非完全正确。由于存在利率，我们必须支付融券利息，资产组合价值会发生改变。因此，改写方程得到

$$d\Pi = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt - \Delta dS - R\max(\Delta,0)Sdt$$

让我来解释一下新增项。首先，利息是按照卖空股票的价值 ΔS 确定的。其次，此处所描述的是一种利息的比率，应体现实际支付与时间步长 dt 所成的比例。最后，有趣的是，只有在 Δ 值为正的时候，我们才会卖空股票并支付利息（记住资产组合公式中 Δ 前面的负号），从而最终得到上述形式最大化函数。

为了消除随机项，我们仍然令：

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$$

代入式子可得：

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt - R\max(\Delta,0)Sdt$$

因为该方程是确定的，我们可以令资产组合的回报率等于无风险利率

$$d\Pi = r\Pi dt$$

最后的结果是偏微分方程

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S}$$

$$-rV - RS\max\left(\frac{\partial V}{\partial S},0\right) = 0$$

这是考虑到卖空股票存在利息费用时

的衍生产品定价方程。注意，实际上这是一个非线性方程。我们将在本书后文深入讨论非线性带来的效果。

8.8 时变参数

下一个延伸阅读涉及参数的期限结构。在本节，我会介绍当利率、波动率和红利率（或者外国利率）都是时变的情形下，如何推导期权定价公式。

只要参数 r、D 和 σ 是时间的已知函数，那么布莱克－斯科尔斯偏微分方程就是有效的。在实际中，人们经常会对这些参数的未来表现有一定观点，例如，你可能想要考察市场对利率运动方向的观点。假设你在 $r(t)$、$D(t)$ 和 $\sigma(t)$ 已知时试图给期权定价。请注意，当我使用 $D(t)$ 时，我特意假设一个时变红利率。也就是说，在时间步长 $\mathrm{d}t$ 内，红利的总量为 $D(t)S\mathrm{d}t$。

现在要求解的方程为

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2(t)S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+(r(t)-D(t))S\frac{\partial V}{\partial S}-r(t)V=0 \qquad (8\text{-}4)$$

显而易见，该方程依赖于时间 t。

引入如下新变量：

$$\bar{S}=Se^{\alpha(t)},\quad \bar{V}=Ve^{\beta(t)},\quad \bar{t}=\gamma(t)$$

我们可以选择 α、β 和 γ 合适的函数形式，以便在形式上消除式（8-4）中的时变系数。完成变量替换后，式（8-4）变成

$$\dot{\gamma}(t)\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{t}}+\frac{1}{2}\sigma(t)^2\bar{S}^2\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial \bar{S}^2}+(r(t)-D(t)+\dot{\alpha}(t))\bar{S}\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{S}}-(r(t)+\dot{\beta}(t))\bar{V}=0 \qquad (8\text{-}5)$$

其中 $\dot{}=\mathrm{d}/\mathrm{d}t$。令

$$\beta(t)=\int_t^T r(\tau)\mathrm{d}\tau$$

从而使得 $\bar{V}$ 的系数为零，接着令：

$$\alpha(t)=\int_t^T (r(\tau)-D(\tau))\mathrm{d}\tau$$

从而使得 $\partial\bar{V}/\partial\bar{S}$ 的系数也为零。最后，为了消除波动项中的时变参数，令

$$\gamma(t)=\int_t^T \sigma^2(\tau)\mathrm{d}\tau$$

式（8-5）可以化简为：

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{t}} = \frac{1}{2}\bar{S}^2 \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial \bar{S}^2} \tag{8-6}$$

关于该方程重要的一点是，它的系数不依赖于时间，而且不存在 r、D 或 σ。如果用 $\bar{V}(\bar{S}, \bar{t})$ 表示式（8-6）的任意解，那么式（8-5）用原始变量表示的相应解为：

$$V = \mathrm{e}^{-\beta(t)}\bar{V}(S\mathrm{e}^{\alpha(t)}, \gamma(t)) \tag{8-7}$$

用 V_{BS} 表示布莱克－斯科尔斯方程的任意解，方程的利率 r_c、红利率 D_c 和波动率 σ_c 为常数。对于某些特定的 $\bar{V}_{BS}$ 函数，这个解可写成

$$V_{BS} = \mathrm{e}^{-r_c(T-t)}\bar{V}_{BS}(S\mathrm{e}^{-(r_c-D_c)(T-t)}, \sigma_c^2(T-t)) \tag{8-8}$$

通过比较式（8-7）和式（8-8）得出结论，即如果经过如下替换，时变参数解的问题和常参数解的问题是一样的：

$$\boxed{\begin{aligned} r_c &= \frac{1}{T-t}\int_t^T r(\tau)\mathrm{d}\tau \\ D_c &= \frac{1}{T-t}\int_t^T D(\tau)\mathrm{d}\tau \\ \sigma_c^2 &= \frac{1}{T-t}\int_t^T \sigma^2(\tau)\mathrm{d}\tau \end{aligned}}$$

这些公式给出了期权剩余期限内，利率、红利率和波动率平方的平均值。

为了把问题完全描述清楚，这里给出带有时变参数的欧式看涨期权的公式

$$S\mathrm{e}^{-\int_t^T D(\tau)\mathrm{d}\tau}N(d_1) - E\mathrm{e}^{-\int_t^T r(\tau)\mathrm{d}\tau}N(d_2)$$

其中

$$d_1 = \frac{\log(S/E) + \int_t^T (r(\tau) - D(\tau))\mathrm{d}\tau + \frac{1}{2}\int_t^T \sigma^2(\tau)\mathrm{d}\tau}{\sqrt{\int_t^T \sigma^2(\tau)\mathrm{d}\tau}}$$

$$d_2 = \frac{\log(S/E) + \int_t^T (r(\tau) - D(\tau))\mathrm{d}\tau - \frac{1}{2}\int_t^T \sigma^2(\tau)\mathrm{d}\tau}{\sqrt{\int_t^T \sigma^2(\tau)\mathrm{d}\tau}}$$

必须附上使用这些公式的若干条件，因为如果需要考虑期权的提前执行或者面对的是某些奇异期权，这些公式通常是不正确的。为了判定公式是否正确，我们要问的问题是：“经过变换后，期权的终值条件和边界条件是否保持不变？”

8.9 幂期权的公式

幂期权（power option）是回报取决于期权到期时资产价格某次幂的期权。假设回报函数为

$$\text{回报}(S^{\alpha})$$

如果回报函数为

$$\text{回报}(S) \tag{8-9}$$

的期权有简单的定价公式，我们就可以为回报函数为回报(S^{α})的期权找到简单的定价公式，因为标的资产符合对数正态分布。

令

$$\mathscr{S} = S^{\alpha}$$

引入新变量$\mathscr{S}$后，布莱克－斯科尔斯方程变成

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\alpha^2\sigma^2\,\mathscr{S}^2\,\frac{\partial^2 V}{\partial \mathscr{S}^2} + \alpha\left(\frac{1}{2}\alpha^2(\alpha-1)+r\right)\mathscr{S}\frac{\partial V}{\partial \mathscr{S}} - rV = 0$$

因此，无论回报函数为式（8-9）的期权定价公式是什么，幂回报函数的期权价值公式都可以直接通过把前者公式中的S替换成S^{α}，并对r、D和σ做出相应调整得到。

8.10 对数合约

对数合约（log contract）的回报为

$$\log(S/E)$$

该合约公平的理论价值形式为

$$a(t) + b(t)\log(S/E)$$

把这个表达式代入布莱克－斯科尔斯方程可得

$$\dot{a} + \dot{b}\log(S/E) - \frac{1}{2}\sigma^2 b + (r-D)b - ra - rb\log(S/E) = 0$$

其中$\dot{}$表示$\mathrm{d}/\mathrm{d}t$。令包含$\log(S/E)$的两项相等以及不含S的四项相等就可以得到

$$b(t) = \mathrm{e}^{-r(T-t)} \quad \text{和} \quad a(t) = \left(r - D - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\mathrm{e}^{-r(T-t)}$$

我们通过匹配期权到期回报完成了对两个积分常数的确定。

该期权的价值相当特殊，其价格对标的资产 S 和波动率 σ 的依赖是分割开的，其中一项包含 S 但不含 σ，另一项包含 σ 却不包含 S。我们简要回顾一下第 7 章中用 Vega 套保消除波动率风险的概念。虽然并非完全不可挑剔，但我们可以想象，对数合约价值的简易性使它成为对冲其他合约波动率变化的利器。话虽如此，它并不是高流动性的合约。

对数合约的回报有可能为正，也可能为负，取决于 $S>E$ 还是 $S<E$。如果我们把回报改成

$$\max(\log(S/E),0)$$

那么就得到了一个真正的“期权”，它有可能被执行，也可能不被执行。该期权的价值为

$$e^{-r(T-t)}\sigma\sqrt{T-t}N'(d_2)+e^{-r(T-t)}\left(\log(S/E)+\left(r-D-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right)N(d_2)$$

8.11 总结

在本章中，我对布莱克 - 斯科尔斯世界做了一些非常简单的扩展。我介绍了离散分红对期权价值的影响，并且通过无套利原理推导跳跃条件。通常，该条件可以数值化运用，其实现将在第 78 章进行讨论。本章还介绍了如何在给香草期权定价时引入时变参数。

延伸阅读

- 关于带有时变参数的布莱克 - 斯科尔斯公式原始推导，见 Merton (1973)。
- 关于带有随机红利的模型，见 Geske (1978)。
- 关于离散分红的现实含义在 Gemmill (1992) 中得到讨论。
- 关于对数合约的更多信息，见 Neuberger (1994)。

第9章

提前执行与美式期权

本章内容

- “提前执行”的含义
- 欧式期权、美式期货和百慕大期权的差异
- 在偏微分方程框架下为美式期权定价
- 决定何时提前执行
- 提前执行与红利

9.1 引言

美式期权是一种有可能在到期日之前被提前执行的合约。举个例子，如果我们有一个美式看涨期权，就可在任意时刻按照执行价格买进资产。这类期权与欧式期权形成鲜明的对比，因为欧式期权只能在到期日执行。大部分可交易的股权和期货期权都是美式的，但大部分指数期权都是欧式的。

随心所欲在任意时刻执行期权的权利明显是有价值的。美式期权的价值不可能低于同等指标的欧式期权。但给予持有者更多的权利的同时，也带来更多的麻烦，即应该何时执行期权？定价问题的一个关键部分就是需要决定执行期权的最

佳时机，这使得美式期权比欧式期权显得更有趣。而且，我将要提出的问题会影响其他许多金融问题。

9.2 永续美式看跌期权

这是一个关于美式期权的简单例子，使得我们可以大致领略美式期权的一般特征，这个简单例子就是**永续美式看跌期权**（perpetual American put）。为了取得看跌期权回报，该合约可在任意时刻被执行。它没有到期期限，这就是被称为“永续”期权的原因。因此，我们可以在自己决定的任意时刻卖出标的资产，得到数量为 E 的资金。回报为

$$\max(E-S,0)$$

我们想要找到的是执行前该期权的价值。

第一点要注意的是求得的解 $V(S)$ 与时间无关，它只依赖于标的资产的取值。如果存在有限解，则当合约条款均是时间齐次时，这便是永续期权的性质。当我们分析普通的非永续美式期权时，很不幸，它将不具有该性质（之所以谓之“不幸”，是因为在这个特殊的例子中该性质使得我们很容易找到解）。

第二点要注意的是期权的价值永远不会低于提前执行的回报，这对所有美式期权都是很重要的。在上例中，

$$V \geqslant \max(E-S,0) \tag{9-1}$$

考虑如果违反了该“约束条件”会发生什么情况。假设期权价值低于 $\max(E-S,0)$，我将按价值 V 买进期权，然后立即执行，即卖出价值为 S 的资产，得到资金 E。这样我得到

$$-\text{看跌期权的成本}-\text{资产的成本}+\text{执行价格}=-V-S+E>0$$

这是无风险的利润。如果我们相信不存在套利机会，那么就要相信式（9-1）。

当期权的价值严格大于回报时，必须满足布莱克-斯科尔斯方程，我将在下一节讨论这一点。回顾一下，永续期权的价值与时间 t 无关，那就必须满足

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}S^2}+rS\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}S}-rV=0$$

当期权的价值只是 S 的函数时，这就是我们得到的常微分方程。二阶常微分方程的通解为

$$V(S) = AS + BS^{-2r/\sigma^2}$$

其中，A 和 B 为任意常数。

解的第一部分（带有系数 A 的部分）只包含资产价格：资产价格本身满足布莱克－斯科尔斯方程。如果我们能找到 A 和 B，就能得到永续美式看跌期权的解。

很明显，永续美式看跌期权的系数 A 必须为零，因为当 $S\to\infty$ 时，期权的价值必须趋于零。那么 B 为多少呢？

我们猜测，当资产价值很“高”时，我们不会执行期权。但如果资产价值下跌到非常低时，我们将立即执行期权获利 $E-S$（常识告诉我们，当 $S>E$ 时，我们不会行权）。假设我们决定在 $S=S^*$ 时行权（也就是当 S 下跌触及这个值时行权），我们如何选择 S^*？

当 $S=S^*$，期权价值必须等于行权回报：

$$V(S^*) = E - S^*$$

它不能低于该值，否则会导致套利机会出现；而且也不能高于该值，否则我们不会行权。由期权价值关于回报的连续性，我们得到如下方程：

$$V(S^*) = B(S^*)^{-2r/\sigma^2} = E - S^*$$

但由于 B 和 S^* 都是未知量，我们还需要一个方程。观察作为 S^* 函数的期权价值，并通过使用上面的式子消除 B，我们发现，当 $S>S^*$ 有

$$V(S) = (E - S^*)\left(\frac{S}{S^*}\right)^{-2r/\sigma^2} \tag{9-2}$$

我们将选择 S^*，使得在行权之前的任意时刻的期权价值都最大化。换言之，怎样选择 S^* 才能使得式（9-2）中的 V 尽可能大？这样做的原因很明显，如果我们可以选择任意时刻行权，那么就会按最大化自身财富的方式去抉择。通过对式（9-2）中的 S^* 求偏导并令该表达式等于零，我们就能找到该值：

$$\frac{\partial}{\partial S^*}(E - S^*)\left(\frac{S}{S^*}\right)^{-2r/\sigma^2} = \frac{1}{S^*}\left(\frac{S}{S^*}\right)^{-2r/\sigma^2}\left(-S^* + \frac{2r}{\sigma^2}(E - S^*)\right) = 0$$

可得

$$S^* = \frac{E}{1 + \sigma^2/2r}$$

对于所有 $S\geqslant S^*$，这种选择使 $V(S)$ 最大化。对于该 S^* 以及相应的 B，图 9-1 显示了方程的解，其中 B 为

$$\frac{\sigma^2}{2r}\left(\frac{E}{1+\sigma^2/2r}\right)^{1+2r/\sigma^2}$$

细心的读者会发现这个函数有一点比较特殊：在 $S=S^*$ 处，期权价值的斜率等于回报函数的斜率。为了让大家明白这是由于所选的 S^* 所导致的，我们用期权价值减去回报函数：

$$(E-S^*)\left(\frac{S}{S^*}\right)^{-2r/\sigma^2}-(E-S)$$

对上式中的 S 求偏导，我们发现在 $S=S^*$ 处的值为零。

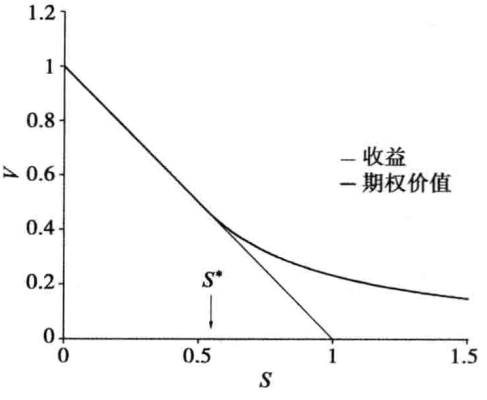


图 9-1 永续美式看跌期权的解

这个例子用不是十分严格的方式阐述了一个道理：通过精心挑选的行权策略来最大化期权价值，等价于求解关于期权价值与期权 Delta（即斜率）都连续的布莱克 - 斯科尔斯方程。这就是所谓的**高度完整性条件**（high-contact condition）或**平滑过渡条件**（smooth-pasting condition）。

> 使期权价值和期权 Delta 连续的行权策略，可以使得美式期权价值最大化。

当资产价格变化到期权价格与回报相交的位置，我们就会立即执行期权。这个位置就是 S^*，也叫做**最优执行点**（optimal exercise point）。

另外一种考察 Delta 连续性条件的方法就是考虑如下问题：如果 Delta 在执行点不连续会发生什么情况。图 9-2 显示了两种可能情形。在图 9-2 中，曲线 a 对应的执行点并非最优，因为执行得过早，期权价值低于其应有的价值；在情形 b 中明显存在套利机会。在情形 a 中，如果通过降低执行点逐渐延迟行权，那么在 Delta 连续时我们将在所有位置最大化期权价值。

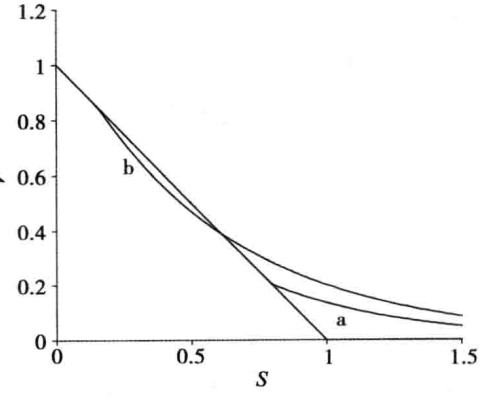


图 9-2 过早行权或过晚行权时的期权价格

当资产有连续支付且为常数的红利率，或者资产为外汇时，永续期权相应的常微分方程为：

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}S^2} + (r-D)S\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}S} - rV = 0$$

通解为

$$AS^{\alpha^+} + BS^{\alpha^-}$$

其中

$$\alpha^{\pm} = \frac{1}{\sigma^2}\left(-(r-D-\frac{1}{2}\sigma^2) \pm \sqrt{\left(r-D-\frac{1}{2}\sigma^2\right)^2 + 2r\sigma^2}\right)$$

且 $\alpha^- < 0 < \alpha^+$。则永续美式看跌期权的价值现在为

$$BS^{\alpha^-}$$

其中

$$B = -\frac{1}{\alpha^-}\left(\frac{E}{1-1/\alpha^-}\right)^{1-\alpha^-}$$

最优的行权时刻为 S 触及

$$\frac{E}{1-1/\alpha^-}$$

的时刻。

在考虑一般美式期权定价公式的问题前，我们再考虑一个特殊的例子。

9.3 付红利的永续美式看涨期权

永续美式看涨期权的解为

$$AS^{\alpha^+}$$

其中

$$A = \frac{1}{\alpha^+}\left(\frac{E}{1-1/\alpha^+}\right)^{1-\alpha^+}$$

且最优的行权时刻为 S 从下方触及

$$S^* = \frac{E}{1-1/\alpha^+}$$

的时刻。

$D=0$ 是一个有趣的特例。此时，期权的解为 $V=S$，且 S^* 趋于无穷。当标的资产不发放红利时，所有执行永续美式看涨期权的决策都不是最优的，其价值等于标的资产价格。稍后我们会看到，在不发放红利的情况下，在任何时点提前执行普通非永续美式看涨期权都不是最优的决策。

9.4 针对一般回报形式的数学公式

依照经稍稍修改的标准布莱克－斯科尔斯理论框架，下面建立具有任意回报和期限的美式合约理论。合约期限将不再是永续的，那么期权价值将是 S 和 t 的函数。

通过买入一个价值为 $V(S, t)$ 的美式期权，卖空数量为 Δ 的标的资产构建一个投资组合：

$$\Pi = V - \Delta S$$

组合价值变动超过无风险利率的部分为

$$\mathrm{d}\Pi - r\Pi\mathrm{d}t = \left(\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - r(V - \Delta S)\right)\mathrm{d}t + \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta\right)\mathrm{d}S$$

令

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$$

可得

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV\right)\mathrm{d}t$$

布莱克－斯科尔斯理论在为欧式期权定价时，我们令上式为零以消除套利机会。无论我们买入还是卖出合约，都能消除套利。当合约为美式时，多空双方的关系是不对等的。执行权的持有者可以选择提前行权，而期权的卖方只能被动接受。如果 V 是美式期权多头的价值，我们唯一能做出的判断是该投资组合最多只能赚取无风险利率。因此，我们可以得到不等式

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV \leqslant 0 \tag{9-3}$$

如果期权持有者未能在最优时刻行权，那么美式期权卖方就能赚取大于无风险利率的收入。如果期权持有者估计标的资产波动率的能力比较差，并据此估计来行权，则期权卖方也能赚取更多的利润。

对式（9-3）进行简单的调整就能描述标的资产支付红利的情况。

如果提前行权的回报为 $P(S, t)$（它可能是个时变的量），那么每个地方都应满足无套利约束条件：

$$V(S,t) \geqslant P(S,t) \tag{9-4}$$

在到期时刻的终值条件为

$$V(S,T) = P(S,T) \qquad (9\text{-}5)$$

如果期权所有者的行权操作使得 $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ 连续，那么期权价值就最大化了。

美式期权定价问题包含式（9-3）至式（9-6）。

如果将无红利的布莱克－斯科尔斯欧式看涨期权的解代入不等式（9-3），不等式依然成立，实际上等式关系也能成立。如果代入约束条件（9-4）且令 $P(S,t)=\max(S-E,0)$，约束条件（9-4）也能被满足。结论就是，当标的资产不发放红利时，美式看涨期权的价值和欧式看涨期权的价值是相同的。与前文阐述的关于永续看涨期权不应被执行的结果相同——有限期限的美式看涨期权也不应该被提前执行。在到期日之前执行期权将是“次优”策略。

如果标的资产发放红利，那么以上结论就是错的。为了验证这点，简单地把第8章的表达式再次代入约束条件。由于当 $S\to\infty$ 时看涨期权价值趋于 $Se^{-D(T-t)}$，所以欧式期权价值明显存在不满足约束条件（9-4）的点。如果存在不满足约束条件的点，那么任何点的定价问题都无法解决。我们的“解”必须在每个点上都满足不等式，这十分重要，否则这个“解”就是无效的。这是因为微分方程的扩散性质：解在任意一点出现错误，就会立即传播到所有点。

这就是美式期权著名的**自由边界问题**（free boundary problem）。在欧式期权定价问题中，我们必须对 S 取0到无穷大的值都进行求解。当期权是美式时，我们无法事先知道布莱克－斯科尔斯方程能够成立的位置，只能在求解时找到。这意味着我们无法知道提前执行边界的位置。此外，除了特殊且无关紧要的例子，这个边界的位置将会是时变的。举个例子来说明，我们应该在资产价格下跌到 $S^*(t)$ 以下时执行美式看跌期权，但是我们该如何找到 $S^*(t)$ 呢？

这个问题不但比固定边界问题（例如，在固定边界问题中，我们已知求解区间为 S 取0到无穷大）更难处理，而且将导致非线性问题出现。也就是说，如果有两个解，我们无法把它们相加从而得到另一个解。通过考虑标的资产为付红利股票的永续美式跨式组合，我们能很直观地观察到这个性质。如果被定义为一个单一合约，可以在任意时刻执行并且回报为 $\max(S-E,0)+\max(E-S,0)=|S-E|$，那么它的价值并不等于一个永续美式看涨期权与一个永续美式看跌期权

之和。再一次，这个解具有以下形式

$$V(S) = AS^{\alpha^+} + BS^{\alpha^-}$$

我建议读者自己求解。该合约并非两个美式期权之和的原因是它只有一次行权机会，而双期权合约分别具有一次行权机会。如果合约都是欧式的，那么两个期权解之和就是正确的答案，这也说明欧式期权定价问题是线性的。该合约也可以用来证明最优行权边界不只一个。按照本文定义的永续美式跨式组合，当资产价格太高或者太低时，我们就应该提前执行。通过使得期权和其 Delta 在每一点都是连续的，可以确定边界精确的位置。可以想象，如果合约有一个确实很奇怪的回报，那么它将可能存在任意数量的自由边界。由于我们无法事先知道会存在多少个自由边界（即便常识会提供一些线索），数值方法将会是一个很有用的工具，它可以在边界数量未知的情况下找到这些边界。我将会在第 78 章讨论这些问题。

图 9-3 显示的是欧式与美式看跌期权的价值，其执行价格是 100，波动率是 20%，利率为 5%，剩余期限是一年。自由边界（即最优执行点）已在图上标记出。请记住，这个点的位置是随时间变化的。

图 9-4 显示的是欧式与美式看涨期权的价值，其执行价格是 100，波动率是 20%，利率为 5%，剩余期限是一年。标的资产的常红利率为 5%（如果不支付红利，这两条曲线将会相同）。自由边界（即最优执行点）已在图上标记出。

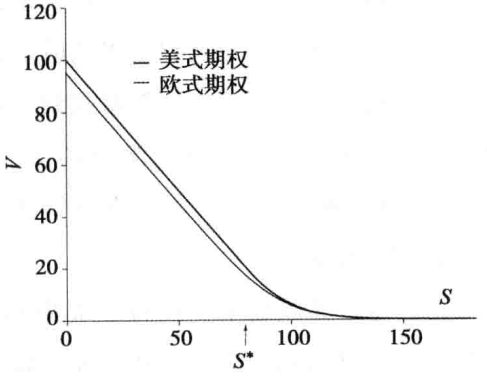


图 9-3 欧式与美式看跌期权的价值，参数值请见正文，已标出最优执行点

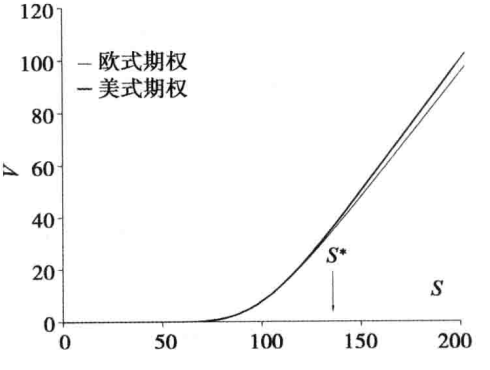


图 9-4 欧式与美式看涨期权的价值，参数值请见正文，已标出最优执行点

图 9-5 是彭博期权价值计算器，被应用于美式期权。

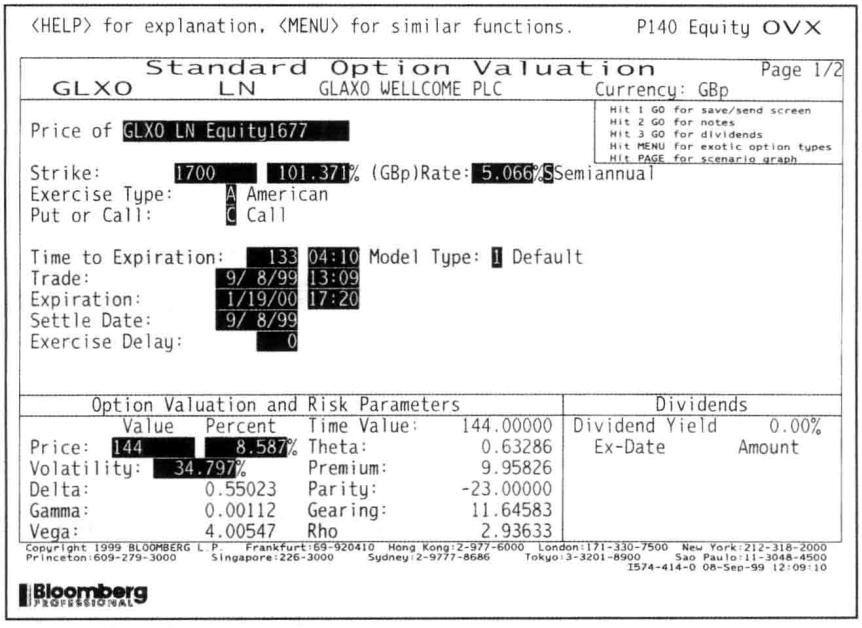


图 9-5　彭博期权估值

资料来源：Bloomberg L. P.

9.5　常红利率看涨期权的局部解

如果我们无法找到较重要问题的全局解，至少能找到局部解，就是在特定时间对一些资产价值具有较好近似的解。我们已经见过剩余期限较长且付红利的美式看涨期权的解，那么当临近到期时会怎样？我将阐述结果，但不去做很简单却冗长无趣的证明。相关的引用文献列在本章的末尾。

首先，让我们考虑 $r>D$ 的情形。对于标的资产为股票的期权，这通常是正确的，因为其红利比较少。临近到期日，最优执行边界为

$$S^*(t) \sim \frac{rE}{D}\left(1+0.9034+\cdots+\sigma\sqrt{\frac{1}{2}(T-t)}+\cdots\right)$$

如果资产价格上涨到该值以上，看涨期权应该被执行。从永续看涨期权的分析中，我们可以知道，当 $T-t\to\infty$ 时，自由边界趋近于

$$\frac{E}{1-1/\alpha^+}$$

如果资产价值上涨到该值，执行期权并接受红利的选择比继续持有期权更优。

在接近 $t=T$，$S=Er/D$ 的位置，期权价值近似为

$$V \sim S - E + E(T-t)^{3/2} f\left(\frac{\log(SD/Er)}{\sqrt{T-t}}\right)$$

其中

$$f(x) = -\frac{2r}{\sigma^2}x + 0.075 + \cdots + \left((x^2+4)e^{-\frac{1}{4}x^2} + \frac{1}{2}(x^2+6x)\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{4}s^2}\,ds\right)$$

当 $D=0$ 时，自由边界不存在，提前执行一定不是最优决策。

当 $r<D$ 时，在 $t=T$，自由边界从 $S=E$ 处“开始”。局部分析较为微妙（存在一项令人讨厌的 $\sqrt{(T-t)\log(T-t)}$）。

9.6 其他红利结构

其他红利结构并没有难点。在除息日前后，离散支付的红利对期权价值和跳跃条件确实存在有趣的影响。

在第 8 章中阐述过，离散的红利支付令资产价格以红利金额的量下跌：

$$S(t_d^+) = S(t_d^-) - D$$

如果红利使得资产价格从 $S(t_d^-)$ 变成 $S(t_d^+)$，那么我们必须在付息日 T_d 前后应用跳跃条件

$$V(S(t_d^-), t_d^-) = V(S(t_d^+), t_d^+)$$

因此

$$V(S, t_d^-) = V(S-D, t_d^+)$$

这确保了已实现的期权价值的连续性。在除息日之前，该跳跃条件的存在使美式期权的价值低于回报成为可能，而这是不容许发生的。如果确实发生了，我们必须加入无套利约束条件，即期权价值至少等于回报函数。因此，跳跃条件变成

$$\boxed{V(S, t_d^-) = \max(V(S-D, t_d^+),\ P(S, t_d^-))}$$

但这意味着已实现期权价值可能不再是连续的，这是正确的吗？是的，这没有关系。因为只有当错过本应在支付红利前的最优执行时刻完成行权的时候连续性才会丧失。

9.7 一触即付期权

在第 2 章和第 7 章，我们已经介绍过欧式二值期权。在到期时，如果资产价格高于特定的水平，二值看涨期权的回报是 1 美元。**一触即付期权**（one-touch

option）是该期权的美式版本。如果资产价格高于某个特定的水平，该合约可以在任意时刻执行，并得到一个固定的金额1美元。触发条件一旦满足，继续持有该期权就没有好处了。因此，在第一次触及触发水平时就应该立即行权，这就是“一触即付”的由来。这些合约的广为流行使它们变为“曾奇异过的芳草”族的一员。当对冲目标合约的回报也取决于特定价格水平是否被触及时，它们特别有用。

由于属于美式期权的范畴，我们必须把最优执行的时刻作为解的一部分。正如之前说过的，当特定水平被触及时，显然它们会被立即执行，这使得本应困难的自由边界问题变成相当简单的固定边界问题。对于一触即付看涨期权，我们必须解 $V(S_u,t)=1$ 的布莱克 - 斯科尔斯方程，其中 S_u 为合约的执行价格，且 $V(S,T)=0$。我们只需解 S 小于 S_u 部分。该问题的解为

$$V(S,t)=\left(\frac{S_u}{S}\right)^{2r/\sigma^2}N(d_6)+\frac{S}{S_u}N(d_1)$$

其中，d_1 定义如常，且

$$d_6=\frac{\log(S/S_u)-\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

（下标“6”是为了和下一章一致。）图9-6显示了期权价值，图9-7显示了Delta值。

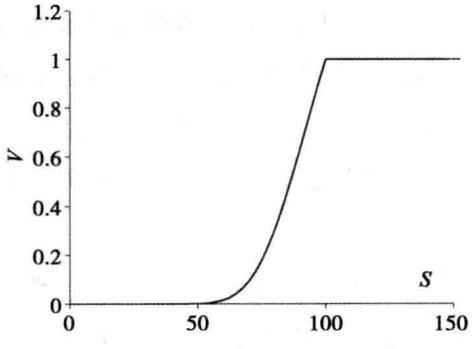


图9-6 一触即付看涨期权的价值

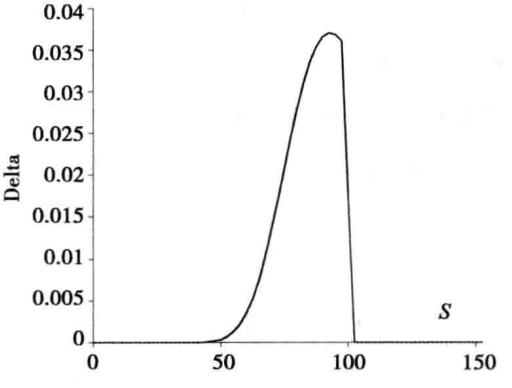


图9-7 一触即付看涨期权的Delta值

考虑一触即付看跌期权的情况。显而易见，解为

$$V(S,t)=\left(\frac{S_l}{S}\right)^{2r/\sigma^2}N(-d_6)+\frac{S}{S_l}N(-d_1)$$

其中

$$d_6 = \frac{\log(S/S_l) - \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

双边一触即付期权同时拥有上界和下界，当触及任一边界时收到 1 美元的回报。因此 $V(S_l,t)=V(S_u,t)=1$。图 9-8 显示的解能在傅立叶级数中找到（见第 6 章）。请注意，它的价值不是一触即付看涨期权和一触即付看跌期权的价值的简单加总。

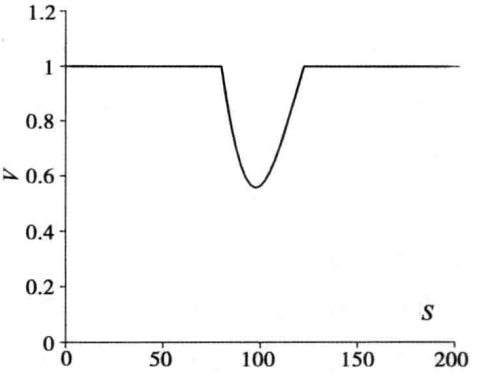


图 9-8 双边一触即付期权的价值

9.8 美式合约的其他特征

美式期权可以用许多更加有趣的方式构造，本节介绍两种可能的方式。第一种是百慕大期权的间断执行机会；第二种是行权决策和实际行权发生的时间不同的下决心特性。另外，还存在一种简单扩展叫做**以色列期权**（Israeli option），只要卖方支付罚金就可以提前取消期权。

9.8.1 百慕大期权

对于一些可提前执行的合约，可执行的时间范围被限定在一些特定时间而非到期前所有时间，这种限定规则很常见。比方说，某期权只在某段时间的星期四才能被执行。**百慕大期权**（Bermudan option）就是一种拥有间断性行权机会的期权。这在数学上意味着：约束条件式（9-4）只有在可行权日才处于“激活态”。接下来我们会看到，该合约的数值方法定价不会比任意时间都可行权的美式期权难。

如果行权日期依赖第二种资产，情形会变得更加复杂。例如，只有当第二种资产的价格高于某个水平时才可以提前行权。该合约就是多资产合约，见第 11 章。

9.8.2 下决心特性

对于某些合约，在实际行权之前必须先做出行权决策（例如两个星期），并且不能改变主意。理论上该合约的定价问题并不困难。假设需提前 τ 天给出提示，那么若在 t 时刻决定行权，我们将在 $t+\tau$ 时刻行权并收到确定数量的金额。为了

使得分析过程更直观，假设回报不是时变的，那么行权后我们收到 $P(S)$。在 τ 天前，回报的价值为 $V^{\tau}(S,\tau)$，且 $V^{\tau}(S,t)$ 为下面方程的解

$$\frac{\partial V^{\tau}}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V^{\tau}}{\partial S^2}+rS\frac{\partial V^{\tau}}{\partial S}-rV^{\tau}=0$$

其中

$$V^{\tau}(S,0)=P(S)$$

如果问题是时变的，则该方程需要略做修改。

很明显，我们有

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV\leqslant 0$$

因为 $V^{\tau}(S,\tau)$ 是做决策时的合约价值，如果我们已决定行权，那么提前执行的约束条件变成

$$V(S,t)\geqslant V^{\tau}(S,\tau)$$

举个例子，假设我们得到的回报 $P(S)$ 为 $S-E$。请注意该处没有 $\max(\cdot)$ 函数，表示我们已经说到且必须做到行权，即便资产可能处于虚值状态。显然 $V^{\tau}(S,\tau)$ 的函数表达式为 $S-Ee^{-r\tau}$，因此该**下决心美式期权**（make-your-mind-up option）满足约束条件

$$V(S,t)\geqslant S-Ee^{-r\tau}$$

如果允许人们改变主意，情况就变得更复杂。我们声明将在两周后行权，但日期临近时改变主意放弃行权；不过下一次声称要行权时就无法反悔。理论上这也不难定价。

技巧是为期权价值引入两个函数，即 $V_0(S,t)$ 和 $V_1(S,t)$。前者表示第一次决定行权前的价值，后者表示首次行权决定后改变主意时的价值。我们也需要 $V_0^{\tau}(S,t',t)$ 和 $V_1^{\tau}(S,t)$。后者就是之前情形的 V^{τ}；前者稍微复杂些，$V_0^{\tau}(S,t',t)$ 中 t' 表示期权将要行权或者放弃行权的时刻，t 表示在此之前的时刻。

V_1 的问题和基本的下决心美式期权完全一样，也就是

$$\frac{\partial V_1}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2}+rS\frac{\partial V_1}{\partial S}-rV_1\leqslant 0$$

且

$$V_1(S,t)\geqslant V_1^{\tau}(S,\tau)$$

其中

$$\frac{\partial V_0^\tau}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V_0^\tau}{\partial S^2}+rS\frac{\partial V_0^\tau}{\partial S}-rV_0^\tau=0$$

且

$$V_1^\tau(S,0)=P(S)$$

函数 $V_0^\tau(S,\ t',\ t)$ 满足

$$\frac{\partial V_0^\tau}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V_0^\tau}{\partial S^2}+rS\frac{\partial V_0^\tau}{\partial S}-rV_0^\tau=0$$

（对时间 t 求导而非 t'）且

$$V_0^\tau(S,t',0)=\max(P(S),V_1(S,t'))$$

那么我们有

$$\frac{\partial V_0}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V_0}{\partial S^2}+rS\frac{\partial V_0}{\partial S}-rV_0\leqslant 0$$

且最优约束条件为

$$V_0(S,t)\geqslant V_0^\tau(S,t+\tau,\tau)$$

很明显，如果允许改变主意且指定其次数，我们可以在求解过程中引入更多的层次。

在本系列书的第二部分，我们将会看到许多需要引入多个函数为单个合约定价的问题。

9.9 其他问题

无论从哪个角度考虑，美式期权的定价问题及其引出的所有相关问题都非常重要。我们将在这里讨论其中一些，之后也会反复提到这些重要的思想。

9.9.1 非线性

由于自由边界的存在，美式期权定价成为一个非线性问题。金融中还存在其他一些非线性问题，有些是由于自由边界问题引起的，有些是因为控制微分方程本身是非线性引起的。非线性非常重要，这有很多原因。最直观的是，非线性问题比线性问题难解，通常需要数值解。

在第 48 章考虑交易成本的定价模型、第 52 章的不确定参数模型、第 58 章的市场崩溃模型以及第 59 章的投机运用期权模型中都可以找到非线性控制方程。

9.9.2 自由边界问题

自由边界问题会在本书的其他内容中不时地出现。再次强调，它的解几乎必须由数值方法找到。举个并非美式期权（但类似）自由边界问题的例子，我们来考虑一下**分期付款期权**（instalment option）。合约的所有者为了保持合约生效，要在规定的日期一直支付期权费。如果不支付，合约就失效。考虑两种情形，第一种情形，费用逐日连续支付；第二种情形（比较符合实际），费用按离散间隔支付。判断要支付费用还是要让合约失效是求解定价问题的一部分。

首先，考虑连续支付费用的情形。如果我们在时间步长 $\mathrm{d}t$ 内支付恒定比例 $L\,\mathrm{d}t$ 使得合约有效，我们必须解

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV-L\leqslant 0$$

L 代表连续支付的现金率。但我们只会在“值得”时才支付费用。如果合约价值为正，那么我们就继续支付；如果合约价值变为负值，我们就会让它失效。然而，我们可以有更好的策略。如果我们加上约束条件

$$V(S,t)\geqslant 0$$

以及 Delta 连续的要求，并且在 $V=0$ 发生时让合约失效，那么我们使该合约具有了最高可能价值。这和美式期权问题很像，区别在于最优化的目标是停止支付费用的时机（而非最优行权时机）。

现在，让我们来考虑更为现实的离散支付情形。假设在时刻 t_i 离散支付 L（并非 $L\mathrm{d}t$）。从期权费还未支付到期权费刚刚支付完，合约的价值必定增加。原因很明显，一旦在时刻 t_i 已经支付完期权费，时刻 t_{i+1} 前都不必担心要缴纳更多金额。价值上升额刚好抵消期权费 L：

$$V(S,t_i^-)=V(S,t_i^+)-L$$

其中上标＋和－分别代表支付期权费之后和之前的瞬间。但只有在时刻 t_i^+ 合约价值大于 L，我们才会支付期权费 L。因此回到跳跃条件

$$V(S,t_i^-)=\max(V(S,t_i^+)-L,0)$$

如果 $V(S,t_i^+)\leqslant L$，停止支付期权费的决策是最优的。

在实际中，期权费 L 被确定在使合约的初始价值刚好等于 L 的水平。这意味

着初始日期面临的问题与其他任意支付日相同。

9.9.3 数值解

虽然自由边界问题必须用数值方法求解，但正如我们在后面的章节将看到的，这并不困难。我们可以通过有限差分法或者二叉树法去解决相关的方程。

还有一个我将会提到的数值方法是蒙特卡罗模拟。任何提前执行的合约特征都会使蒙特卡罗模拟变得困难。我将在第 80 章讨论这个问题。

图 9-9、图 9-10 和图 9-11 分别显示了运用显性有限差分方法为美式看涨期权、美式看跌期权和百慕大看跌期权定价的结果。你无法看到数值，但可以看到我通过运用 Excel 的条件格式展示出的期权价值与回报相等的区域。在这些区域，你应该执行期权。在这些图中，时间在最上面的一行；左边的第一长列是股价；时间从右向左流逝，所以第二长列为回报；第二行展示了当股价为零时的期权价值，因此越往下的行股价越高。

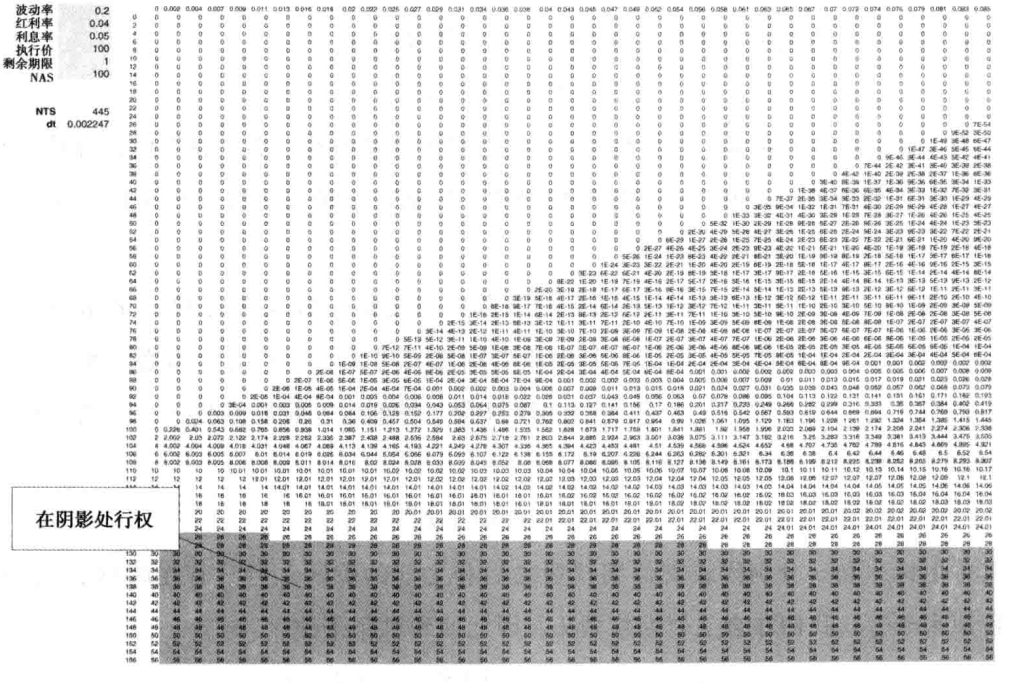


图 9-9 电子表格显示了支付红利的美式股票看涨期权的价值

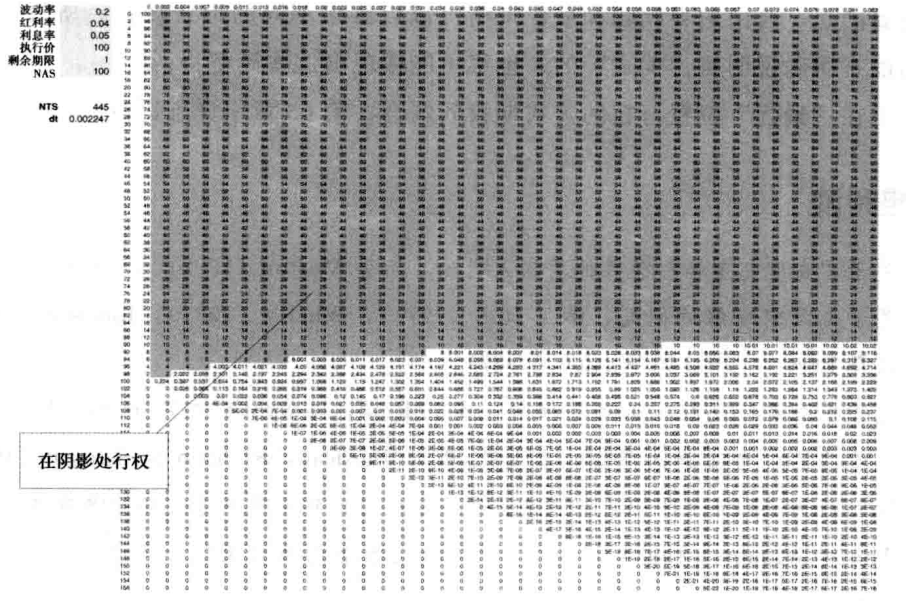


图 9-10 电子表格显示了美式看跌期权的价值

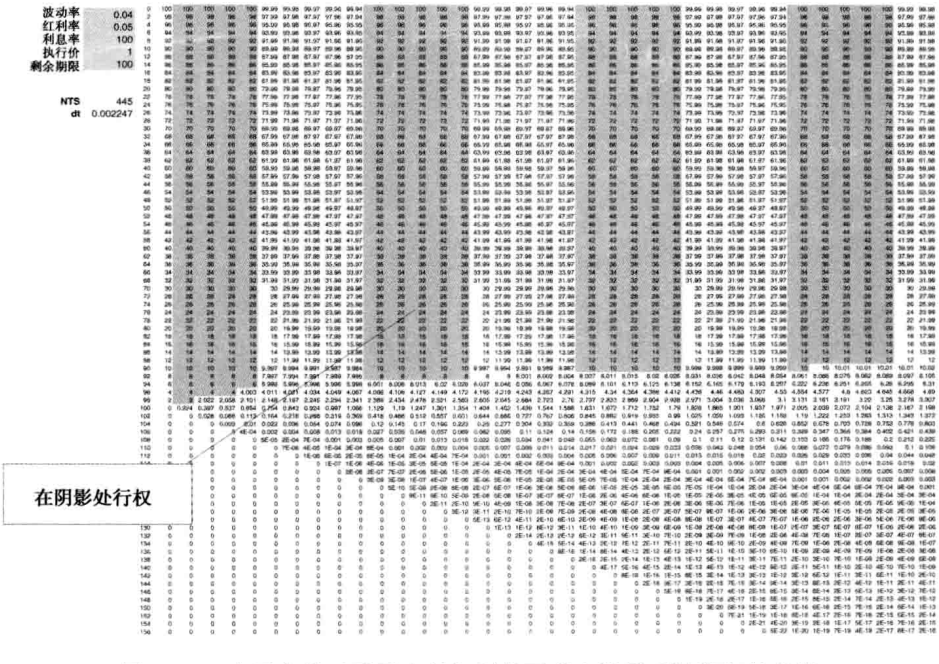


图 9-11 电子表格显示了支付红利的百慕大股票看跌期权的价值

9.10 总结

本章提出了许多问题，这对本书后面的内容很重要，读者要熟悉这些概念。

更重要的是，自由边界问题和最优策略可以以许多不同的形式存在。所以，即便合约没有明确说明是“美式”的，也很可能体现出这些模型特征。

不在“最优”位置行权的美式期权问题会在第 63 章中详细讨论。

延伸阅读

- 关于“高度完整性”条件的更深入讨论，参见 Merton (1992) 和 Duffie (1992)。
- 关于美式期权解的问题，参见 Roll (1977)，Whaley (1981)，Johnson (1983)，以及 Barone-Adesi 和 Whaley (1987)。
- 关于美式看涨期权局部解的问题，参见 Rupf，Dewynne 和 Wilmott (1993)；美式看跌期权局部解的问题，参见 Barles，Burdeau，Romano 和 Samsen (1995)。Kruske 和 Keller (1998) 也研究了看跌期权局部解问题并考虑高阶精确性。
- Ahn 和 Wilmott (1998) 讨论了美式期权持有者的执行策略，考虑它对买方和卖方利润的影响。
- 关于提前执行边界的数值解，参见 Abboud 和 Zhang (2004)。

第 10 章

概率密度函数和首次退出时间

本章内容

- 转移概率密度函数
- 如何推导转移概率密度函数的前向和后向方程
- 如何运用转移概率密度函数解决各种问题
- 首次退出时间及其与美式期权的关系

10.1 引言

现代金融理论（尤其是衍生品理论）建立在金融变量的随机运动之上，主要的基石是维纳过程和正态分布。我曾经介绍过在随机世界中推导期权价值的确定性方程，但很少谈及未来实际上可能演变出的结果。比如股价预期变化的方向是什么，或者临近到期期权是实值的概率是多少。这可能违反常情，但大部分衍生品理论都运用套保和无套利的思想去避免处理随机问题——不确定性并不讨人喜欢。但是，如果人们想要彻底理解金融市场，那么研究并确定标的资产的随机性以及判断未来可能结果的性质还是非常重要的。

10.2 转移概率密度函数

对于股票、外汇、利率或者任何根据随机微分方程演变的事物，本章的结果都很有用。我将依据变量 y 的广义随机微分方程描述这个理论

$$\mathrm{d}y = A(y,t)\mathrm{d}t + B(y,t)\mathrm{d}X \tag{10-1}$$

在对数正态的股票世界，我们有 $A=\mu y$ 和 $B=\sigma y$，然后用 S 代替 y。

为了分析随机游走的概率性质，我将引入**转移概率密度函数**（transition probability density function）$p(y,\ t;\ y',\ t')$，定义如下

$$\text{Prob}\left(\text{在时刻 } t' \mid a<y<b \mid \text{时刻 } t \text{ 的 } y\right) = \int_a^b p(y,t;\ y',t')\mathrm{d}y'$$

换言之，就是“在时刻 t 给定初始值 y，随机变量 y 在未来时刻 t' 位于 a 与 b 之间的概率”。

令 y 和 t 作为当前值，y' 和 t' 作为未来值。转移概率密度函数可用来回答以下问题：“在时刻 t 给定初始值 y，那么在时刻 t'，变量 y 处于一段确定范围的概率是多少？”

转移概率密度函数 $p(y,\ t;\ y',\ t')$ 满足两个方程。第一个被称为前向方程，涉及对未来的状态和时间（y' 和 t'）求导；另一个被称为后向方程，涉及对现在的状态和时间（y 和 t）求导。这两个抛物线偏微分方程同布莱克 - 斯科尔斯方程[⊖]没有本质上的区别。

我们将在之后的几节推导这两个方程，过程中将运用简单三叉树近似 y 的随机游走。

10.3 随机游走的三叉树模型

到现在为止，推导前向和后向方程最简单且最直接的方法是通过三叉树近似连续时间随机游走。图 10-1 显示了该近似方法。

变量 y 在经过时间步长 δt 后可以上升、下降或者保持不变，并分别对应确定的概率。我将选择相同的上、下行幅度，并选择

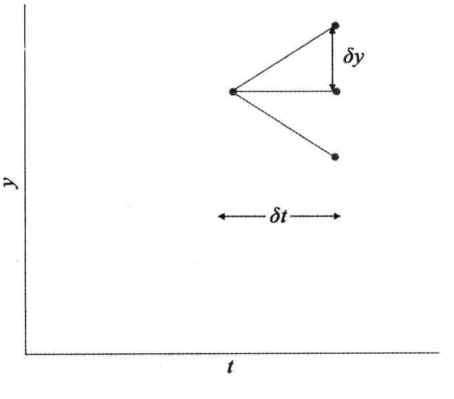


图 10-1 三叉树近似 y 的随机游走

⊖ 其中后向方程和布莱克 - 斯科尔斯方程非常像。

合适的上、下行概率使得在相同的时间步长内离散时间与连续时间模型的均值和标准差近似相等。有三个变量可供使用：跳跃幅度 δy、上升的概率和下降的概率，但只有两个目标变量需要匹配：均值和标准差（三个概率之和为固定值 1）。因此我将搁置变量 δy，何况它也不会在最终等式中出现。

我将用 $\phi^+(y, t)$ 和 $\phi^-(y, t)$ 分别表示上升和下降的概率。经过时间步长 δt 后，y 的变化的均值为

$$\phi^+ \delta y + (1 - \phi^+ - \phi^-).0 + \phi^- (-\delta y) = (\phi^+ - \phi^-)\delta y$$

由于 $\mathrm{Var}[\cdot] = E[(\cdot)^2] - E[\cdot]^2$，所以该变化的方差为

$$\phi^+ \delta y^2 + (1 - \phi^+ - \phi^-).0^2 + \phi^- (-\delta y)^2 - ((\phi^+ - \phi^-)\delta y)^2$$

$$= \delta y^2 (\phi^+ + \phi^- - (\phi^+ - \phi^-))^2$$

以上两个表达式中的 ϕ^+ 和 ϕ^- 都是 y 和 t 的函数。

在连续时间版本的随机游走模型中，变化的均值为方程（10-1）中的

$$A(y,t)\,\delta t$$

方差为

$$B(y,t)^2 \delta t$$

（只有对于主导阶数它们才是正确的，而在离散版本中这是完全正确的。）

为了匹配均值和标准差，我们令

$$\phi^+(y,t) = \frac{1}{2}\frac{\delta t}{\delta y^2}(B(y,t)^2 + A(y,t)\delta y)$$

和

$$\phi^-(y,t) = \frac{1}{2}\frac{\delta t}{\delta y^2}(B(y,t)^2 - A(y,t)\delta y)$$

即便三个未知数有两个方程，仍必须有

$$\delta y = O(\sqrt{\delta t})$$

否则就会失去问题的扩散性质。

下面我们准备为转移概率密度函数寻找方程。

10.4　前向方程

图 10-2 显示的是用三叉树表示的随机游走。变量 y 在时刻 t' 的取值为 y'，但它是如何达到那一点的呢？

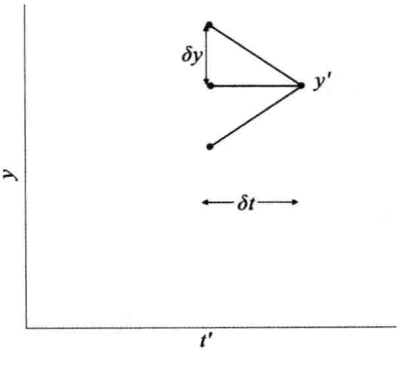


图 10-2　为得到前向方程运用三叉树近似随机游走的方法

在三叉树游走中，只能从 $y'+\delta y$、y'和 $y'-\delta y$ 三个值到达点 y'。在时刻 t'处于 y'的概率等于以下三个概率之和：在先前 $t'-\delta t$ 时刻处于 $y'+\delta y$ 并向下移动的概率，在 $t'-\delta t$ 时刻处于 y'并保持不变的概率以及在 $t'-\delta t$ 时刻处于 $y'-\delta y$ 并向上移动的概率。

$$\begin{aligned}p(y,t;\ y',t') =& \phi^{-}(y'+\delta y,t'-\delta t)p(y,t;\ y'+\delta y,\ t'-\delta t)\\ &+(1-\phi^{-}(y',t'-\delta t)-\phi^{+}(y',t'-\delta t))p(y,t;\ y',t'-\delta t)\\ &+\phi^{+}(y'-\delta y,t'-\delta t)p(y,t:\ y'-\delta y,t'-\delta t)\end{aligned}$$

我们可以在点 y'、t'对各项进行泰勒级数展开。即

$$p(y,t;\ y'+\delta y,\ t'-\delta t)\approx p(y,t;\ y',t')+\delta y\ \frac{\partial p}{\partial y'}+\frac{1}{2}\delta y^2\ \frac{\partial^2 p}{\partial y'^2}-\delta t\ \frac{\partial p}{\partial t'}+\cdots$$

忽略其他细节，结果为

$$\frac{\partial p}{\partial t'}=\frac{1}{2}\ \frac{\partial^2}{\partial y'^2}(B(y',t')^2 p)-\frac{\partial}{\partial y'}(A(y',t')p) \tag{10-2}$$

这就是**福克－普朗克方程**（Fokker-Planck equation）或称**柯尔莫戈洛夫前向方程**（forward Kolmogorov equation）。这是个前向抛物线偏微分方程，需要时刻 t 的初始条件，可用来求解 $t'>t$ 的区域。

若现在有几个特定的状态，而你想要知道接下来会发生什么，那么就可以使用这个方程。例如，已知 y 的现值，你想要知道它一段时间之后的分布。

例子

对我们来说，股价在未来的分布是最重要的例子。如果给定随机游走

$$\mathrm{d}S=\mu S\mathrm{d}t+\sigma S\mathrm{d}X$$

那么前向方程变成

$$\frac{\partial p}{\partial t'}=\frac{1}{2}\ \frac{\partial^2}{\partial S'^2}(\sigma^2 S'^2 p)-\frac{\partial}{\partial S'}(\mu S' p)$$

该方程的一个特解拥有下面 Delta 函数作为初始条件

$$p(S,t;\ S',t)=\delta(S'-S)$$

（表示变量在时刻 t 初始值确定为 S）该方程的解为

$$p(S,t;S',t')=\frac{1}{\sigma S'\ \sqrt{2\pi(t'-t)}}\mathrm{e}^{-(\log(S/S')+(\mu-1/2\sigma^2)(t'-t))^2/2\sigma^2(t'-t)} \tag{10-3}$$

图 10-3 中，该解作为 S' 的函数显示；图 10-4 中，该解作为 S' 和 t' 的函数显示。

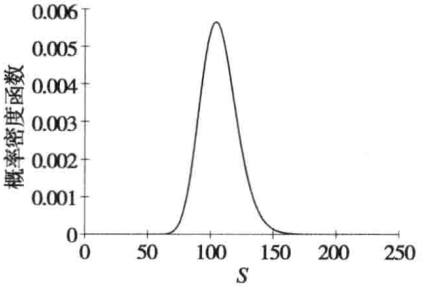


图 10-3　对数随机游走的概率密度函数

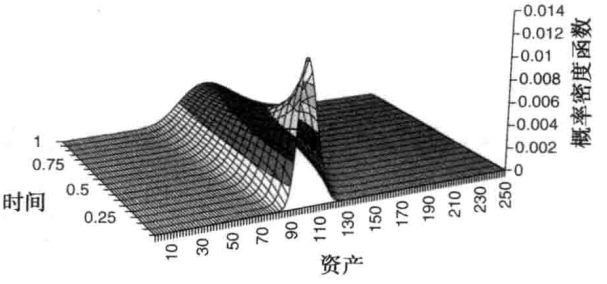


图 10-4　对数正态随机游走的概率密度函数随着时间的变化

10.5　稳态分布

某些随机游走拥有一个稳态分布。就是说，从 $t'\to\infty$ 的长期视角来看，分布 $P(y,t;\ y',t')$ 作为 y' 的函数将最终独立于初始状态 y 和时间 t。宽松地说，这就至少要求随机游走是时间齐次的（也就是说 A 和 B 独立于时间 t）。当然也存在这么一些随机游走，即便是具有独立于时间的方程，也不具有这样的稳定状态。对数正态随机游走要么无限增长要么衰减到零。

如果存在稳态分布 $p_\infty(y')$，则它满足：

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y'^2}(B_\infty^2 p_\infty)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y'}(A_\infty p_\infty)=0$$

在这个方程中，A_∞ 和 B_∞ 是 $t\to\infty$ 时的函数。在之后章节中，会多次运用该方程，有时用已知的 A 和 B 求解 $p_\infty(y')$，有时用已知的 $p_\infty(y')$ 和 B 求解 A。

10.6　后向方程

现在开始寻找后向方程。如果我们想要计算从多个初始值到达一个指定最终值的概率，关于后向方程的研究将起到很大作用。后向抛物线偏微分方程将需要未来的条件，并按时间逆向求解。下面将要推导的方程与布莱克 - 斯科尔斯方程（用于计算期权的公平价值）相当类似。的确，期权价值可以被理解为未来可能

状态的期望（关于这一点稍后会有更多介绍）。以下是推导过程。

后向方程的数学推导可能相对容易，但与前向方程相比，后向方程关于四个“节点”之间概率关系的理解会变得更加微妙。

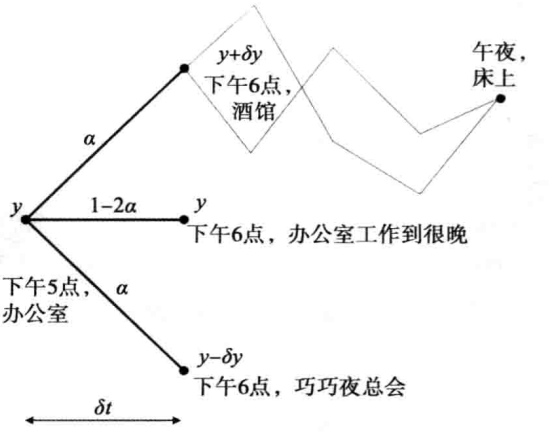


图 10-5 推导后向方程的串酒吧例子

让我们看一下具体的例子（见图 10-5）。

下午 5 点，你在办公室（就是点（y，t））。下午 6 点，你将处于三个地点之一：酒馆，依然在办公室工作到很晚，巧巧夜总会（就是点（$y+\delta y$，$t+\delta t$），（y，$t+\delta t$））和（$y-\delta y$，$t+\delta t$））。

我们想要知道你午夜最终窝在床上的概率（就是点（y'，t'））。

请记住，$p(y,t;y',t')$ 表示给定初始点（y，t）且之后达到点（y'，t'）的概率，即已知下午 5 点在办公室且午夜窝在床上的概率。下面只能经过三个途径之一才可以在午夜时回到床上，分别为在下午 6 点去酒馆，或者办公室，或者巧巧夜总会。下午 6 点后发生了什么并不重要（你可能都不记得了），我们只关心午夜时你在床上的概率，但不关心你如何到达那里。

总结：午夜在床上的概率（已知你下午 5 点在办公室）等于下午 6 点去酒馆的概率（已知你下午 5 点在办公室）加上下午 6 点在办公室工作到很晚的概率（已知你下午 5 点在办公室）加上下午 6 点在巧巧夜总会的概率（已知你下午 5 点在办公室）。

“已知你下午 5 点在办公室”在数学上表示成“；y，t）”，这是转移概率密度函数的一小部分。

我们可以用符号表示成

$$p(y,t;y',t')=\phi^{+}(y,t)p(y+\delta y,t+\delta t;y',t')+(1-\phi^{+}(y,t)-\phi^{-}(y,t))p(y,t+\delta t;y',t')+\phi^{-}(y,t)p(y-\delta y,t+\delta t;y',t')$$

泰勒级数展开可以推导出**柯尔莫戈洛夫后向方程**（backward Kolmogorov equation）

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{1}{2}B(y,t)^2\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+A(y,t)\frac{\partial p}{\partial y}=0} \tag{10-4}$$

例子

对数正态随机游走的转移概率密度函数（10-3）满足该方程，但注意自变量的不同。

10.7　首次退出时间

首次退出时间（The first-exit time）是指随机变量到达给定边界的时刻。我们可能想要知道股价触及一个特定的水平需要多长时间，或者我们可能想知道美式期权被最优执行之前有多长时间。图 10-6 给出了首次退出时间的一个例子。

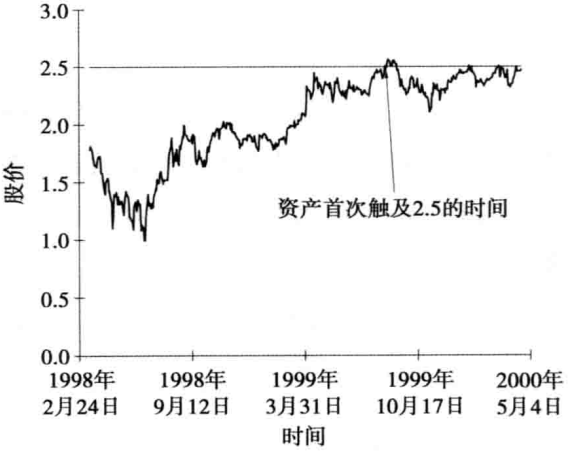


图 10-6　首次退出时间的一个例子

关于首次退出时间，常见的问题有："在给定的时刻之前，资产价格触及特定价格水平的概率是多少?"；"我们预期利息率下降到给定水平要花费多长时间?"接下来就要解决这些问题。

10.8　首次退出时间的累积分布函数

你最喜爱的资产在未来一年价值翻倍或者减半的概率是多少？简单扩散方程的解可以回答这个问题。更为一般的问题是："在给定的时间前，随机变量离开给定范围的概率是多少?"图 10-7 描述了该问题。

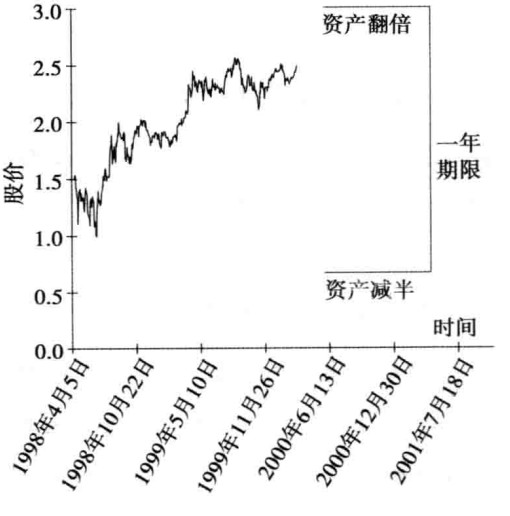


图 10-7　在给定时间前资产离开该区域的概率

让我们引入函数 $C(y,\ t;\ t')$ 表示变量 y 在 t' 时刻之前离开区域 Ω 的概率。可以将该函数当成累积分布函数。该函数也满足后向方程

$$\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{1}{2}B(y,t)^2\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}+A(y,t)\frac{\partial C}{\partial y}=0$$

该问题不同于转移概率密度函数问题的关键体现在边界条件和终值条件上。如果变量 y 确实处于区域 Ω 的边界上，那么很明显离开的概率为 1：

$$在\ \Omega\ 的边缘上\ C(y,t;t') = 1$$

另一方面，如果在 t' 时刻我们还处于区域 Ω 内部，就没有剩余时间让变量离开该区域，那么概率为 0。因此我们有

$$C(y,t;t') = 0$$

10.9 预期首次退出时间

上一节已展示了如何计算离开给定区域的概率。我们可以用该函数去寻找预期的退出时间。一旦找到 C，那么就很容易得到**预期首次退出时间**（expected first-exit time）。把预期首次退出时间记为 $u(y,\ t)$，它是描述出发状态的变量 y 和 t 的函数。

由于 C 为累积分布函数，预期首次退出时间可以写成

$$u(y,t) = \int_t^{\infty} (t'-t)\,\frac{\partial C}{\partial t'}\mathrm{d}t'$$

运用分步积分法，可得

$$u(y,t) = \int_t^{\infty} 1 - C(y,t;\ t')\mathrm{d}t'$$

函数 C 关于变量 y 和 t 满足后向方程，所以在积分符号内取完微分后，我们发现 u 满足方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}B(y,t)^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A(y,t)\,\frac{\partial u}{\partial y} = -1 \qquad (10\text{-}5)$$

由于 C 在 Ω 的边界上的值为 1，那么在该区域的边界附近 u 必须取 0。终了条件是什么？通常，我们求解的区域 Ω 在时间上是有界的，如图 10-8 显示的情况。

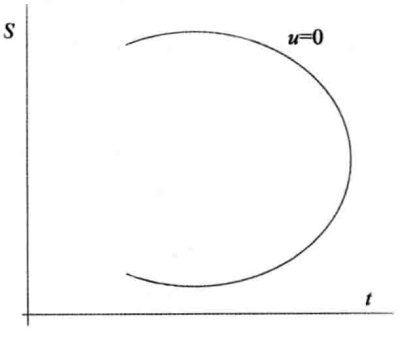


图 10-8 首次退出时间问题

例子

当随机微分方程独立于时间（也就是说 A 和 B 只是变量 y 的函数），而且区域 Ω 也是非时变的时，那么方程（10-5）可能存在稳态解。回到对数资产问题，资产离开价格范围（S_0，S_1）的预期时间是什么？以下方程的解就是该

问题的答案：

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}S^2} + \mu S \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}S} = -1$$

且

$$u(S_0) = u(S_1) = 0$$

求解得

$$u(S) = \frac{1}{\frac{1}{2}\sigma^2 - \mu}\left(\log(S/S_0) - \frac{1-(S/S_0)^{1-2\mu/\sigma^2}}{1-(S_1/S_0)^{1-2\mu/\sigma^2}}\log(S_1/S_0)\right)$$

10.10　最优停时的另一个例子

你持有一些投资，其价值上下波动。通常来说，变化无常，你应该什么时候出售呢？让我们做两个大的假设。

首先，假设你知道投资价值的统计/随机性质，那么你可以写出

$$\mathrm{d}S = \mu(S)\mathrm{d}t + \sigma(S)\mathrm{d}X$$

其中 $\mu(S)$ 和 $\sigma(S)$ 的函数形式已知（为了简化，令它们独立于时间）。

然后，假设你愿意在投资的预期价值最大化的时刻出售该投资（考虑了货币的时间价值因素）。我们用 V 表示该最大值。

由于我们要计算一个预期值，那么后向柯尔莫戈洛夫方程就是要求解的相关方程。因为随机微分控制方程具有时间齐次特征，而且不存在有限时间区间的限制，那么我们求解的 $V(S)$ 必须独立于 t：

$$\frac{1}{2}\sigma(S)^2 \frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}S^2} + \mu(S)\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}S} - rV = 0$$

左边最后一项是惯用的货币时间价值项。

该方程的解必须满足

$$V \geqslant S$$

其中 V 和 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}S$ 是连续的。该约束条件能确保预期值最大化。

例子

若拥有一个对数资产（即 $\mu(S)=\mu S$ 且 $\sigma(S)=\sigma S$），我们将得到一些有趣的结果。

二阶常微分方程通解为

$$AS^{\alpha} + BS^{\alpha-}$$

其中 A 和 B 为任意常数，且

$$\alpha^{\pm}=\frac{1}{\sigma^2}\left(-\mu+\frac{1}{2}\sigma^2\pm\sqrt{\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)^2+2r\sigma^2}\right)$$

如果 $\mu>r$（且没有时间限制），则 V 不存在有限解，那么我们永远不会出售资产。如果 $\mu<r$，则 $V=S$，我们应该立即出售资产（请记住，只有在第二个假设下这些简单结果才能应用，该头寸的内在风险并没有被纳入考虑）。

如果考虑资产支付红利，会发生什么变化？这留给读者作为练习。

10.11 期望与布莱克 - 斯科尔斯

S 服从随机游走

$$\mathrm{d}S=\mu S\mathrm{d}t+\sigma S\mathrm{d}X$$

其转移概率密度函数 $P(S,\ t;\ S',\ t')$ 满足

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2p}{\partial S^2}+\mu S\frac{\partial p}{\partial S}=0 \tag{10-6}$$

这就是后向柯尔莫戈洛夫方程。

为了计算函数 $F(S)$ 在时刻 T 的预期值，我们必须为函数 $p_F(S,\ t)$ 解方程（10-6），其中 $p_F(S,\ t)$ 满足

$$p_F(S,T)=F(S)$$

如果 $F(S)$ 表示在 T 时刻收到的资金金额，我们自然会问：预期收到的资金的现值是多少？或者说，期权回报的预期值是多少？我们通过对它乘上贴现因子以得到现值，当利息率为常数时可得

$$\mathrm{e}^{-r(T-t)}p_F(S,t) \tag{10-7}$$

该式表示若给定今天（即 t 时刻）的资产价值为 S，我们可以计算将在 T 时刻收到的预期回报在今天的现值。将式（10-7）记为 $V(S,\ t)$，它将满足什么方程呢？将

$$p_F(S,t)=\mathrm{e}^{r(T-t)}V(S,t)$$

代入方程（10-6），我们发现 $V(S,\ t)$ 满足

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2V}{\partial S^2}+\mu S\frac{\partial V}{\partial S}-rV=0$$

这看起来和布莱克 - 斯科尔斯方程很像，但有一点不同：在布莱克 - 斯科尔斯方程中没有 μ。

现在忘掉变量 μ 的存在，并在方程中用 r 代替它。产生的方程就恰好是布莱克 - 斯科尔斯方程。用 r 代替 μ 必定会使随机游走具有一些特别的性质。

$$dS = rSdt + \sigma SdX \tag{10-8}$$

这就是**风险中性随机游走**（risk-neutral random walk）。它拥有和银行存款一样的漂移率。

我们的结论是

> 标的资产遵循风险中性随机游走假设时，期权的公平价值相等。

我们可以写出

$$\text{期权价值} = e^{-r(T-t)}E[\text{回报}(S)]$$

其中，期望计算所针对的是风险中性随机游走，并非真实的随机游走。

我们可以把“风险中性”理解成“不关心风险”的意思；或者更为专业一些，“承担风险不需要额外的收益”。

该结果对金融理论的主要贡献就是众所周知的鞅定价法。它既优雅又强大，但略微缺乏可挖掘的深度。如果期权价格就是简单地将预期回报贴现，那么就不需要有关期权定价数以千计的书籍了。金融中最令人激动的领域一定是那些存在着能得到有趣结果的模型的领域。从这个角度来看，鞅方法就显得黔驴技穷了。不过我建议你读一下 Joshi（2003）的书，他把鞅方法和其他方法做了比较和对比。

在该表达式中，我们可以看到短期利息率扮演着两个完全不同的角色。首先，它被用来将回报贴现到现在（就是期望前的 $e^{-r(T-t)}$）。其次，在时间步长 dt 内，资产在风险中性世界的预期回报为 $rSdt$。

10.12　一个常见误解

你是否曾经听说 Delta 值就是到期时期权处于实值状态的概率？这是很常见的看法，但它彻底错了。让我们通过观察看涨期权来找出困惑是如何产生的，并尝试纠正它。

如果标的资产服从对数正态随机游走

$$\mathrm{d}S = \mu S\mathrm{d}t + \sigma S\mathrm{d}X$$

给定 t 时刻的初始股价 S，找到在 T 时刻股价超过特定水平 E 的概率公式。这是一个相对直接的工作，具体方法见本章前文。公式为

$$N(d_1')$$

其中

$$d_1' = \frac{\log(S/E) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

表面上这很像看涨期权 Delta 的公式。进一步观察，你会发现虽然 d_1' 和 d_1 很类似，但并不完全相同。此处有两点不同，就存在两个原因说明为什么期权的 Delta 值不是到期时期权为实值期权的概率。两个原因如下：

- 概率公式中存在 μ，但期权 Delta 值中没有 μ。我们想知道到期时期权为实值期权的真实概率，而期权价格与真实概率无关。
- 此处存在符号差别。

鉴于真实世界和风险中性世界的重大区别，再加上更为明显的正负号差异，这个误解究竟是如何产生的？到底谁是罪魁祸首？把他揪出来！

10.13 总结

即便概率论巩固了大部分金融理论，我们也可以在完全不知道转移概率密度函数概念的情况下深入金融领域的研究。不过，在很多情况下牢记不确定性的基本理念并且在概率意义上检验未来结果是很重要的。我脑海中浮现出几个直观的例子。首先，如果你拥有一个美式期权，你期望什么时候执行它？理论上，期权价值依赖于资产价格随机游走中的参数 σ，但预期的执行时间也依赖于 μ。由于进行对冲，回报可能是确定的，但你无法确定是否会持有期权到期。第二个例子是关于期权投机。如果不进行对冲会怎样呢？你的最终回报将完全取决于市场，而市场是不确定的并且只能在概率上被描述。这两个问题都可以通过转移概率密度函数解决。第 59 章将探索未对冲期权头寸的随机行为。

延伸阅读

- 一本关于概率论非常好的书，它详细地解释了转移概率密度函数的推导、含义和应用，见 Cox 和 Miller（1965）。
- Harrison 和 Kreps（1979）和 Harrison 和 Pliska（1981）是两篇关键的参考文献，它们细致地论述概率论的结论与期权价值的关系。
- Atkinson 和 Wilmott（1993）讨论了关于移动平均资产价格的转移密度。

第 11 章

多资产期权

本章内容

- 如何同时为多个资产的行为建模
- 估计资产价格运动之间的相关性
- 如何在布莱克 - 斯科尔斯理论框架下对基于多种资产的期权进行估值和套期保值
- 以支付红利资产为标的的欧式非路径依赖期权的定价公式
- 双币种期权的定价和套期保值问题以及相关系数的角色

11.1 引言

在本章中，我将通过描述基于更多标的资产的布莱克 - 斯科尔斯期权理论来介绍更高维度的思想。这一理论非常直观：唯一新的观点就是相关性随机游走的概念和相对应的伊藤引理的多因子版本。

虽然本章的建模以及涉及的数学内容很简单，但是定价和套期保值的最后一步“求解”步骤可能会非常困难。我会从数值分析角度解释，什么因素令问题变得简单，什么因素令问题变得复杂。

11.2　多维对数正态随机游走

对单一标的资产期权进行定价的基石是如下的对数正态随机游走

$$\mathrm{d}S = \mu S\,\mathrm{d}t + \sigma S\,\mathrm{d}X$$

那么，为了将定价理论扩展到具有多个（不妨设为 d 个）标的资产的情形，需要通过各个标的资产建模：

$$\mathrm{d}S_i = \mu_i S_i\,\mathrm{d}t + \sigma_i S_i\,\mathrm{d}X_i$$

其中，S_i 就是第 i 项资产的价格，$i=1$，…，d，μ_i 和 σ_i 分别是资产的漂移率和波动率。$\mathrm{d}X_i$ 是维纳过程的增量。我们仍然可以继续把 $\mathrm{d}X_i$ 视为来自均值为 0、标准差为 $\mathrm{d}t^{1/2}$ 的正态分布的随机数，因此有

$$E[\mathrm{d}X_i] = 0 \quad \text{和} \quad E[\mathrm{d}X_i^2] = \mathrm{d}t$$

但是随机数 $\mathrm{d}X_i$ 和 $\mathrm{d}X_j$ 是**相关的**（correlated）：

$$E[\mathrm{d}X_i\,\mathrm{d}X_j] = \rho_{ij}\,\mathrm{d}t$$

这里的 ρ_{ij} 是第 i 个和第 j 个随机游走的相关系数。以 ρ_{ij} 作为第 i 行、第 j 列元素的对称矩阵称为**相关系数矩阵**（correlation matrix）。比如，如果有 7 个标的资产 $d=7$，那么相关系数矩阵为：

$$\sum = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} & \rho_{15} & \rho_{16} & \rho_{17} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23} & \rho_{24} & \rho_{25} & \rho_{26} & \rho_{27} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & 1 & \rho_{34} & \rho_{35} & \rho_{36} & \rho_{37} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & 1 & \rho_{45} & \rho_{46} & \rho_{47} \\ \rho_{51} & \rho_{52} & \rho_{53} & \rho_{54} & 1 & \rho_{56} & \rho_{57} \\ \rho_{61} & \rho_{62} & \rho_{63} & \rho_{64} & \rho_{65} & 1 & \rho_{67} \\ \rho_{71} & \rho_{72} & \rho_{73} & \rho_{74} & \rho_{75} & \rho_{76} & 1 \end{pmatrix}$$

需要注意，$\rho_{ii}=1$ 和 $\rho_{ij}=\rho_{ji}$。相关矩阵是正定的，因此 $y^T\sum y \geqslant 0$，此时**协方差矩阵**（covariance matrix）为

$$M\sum M$$

其中 M 就是对角线元素为 σ_i、其他各项为 0 的矩阵。

为了得到能够处理多个随机变量的函数，我们需要多维形式的伊藤引理。如果有一个关于变量 S_i，…，S_d 和 t 的函数 $V(S_i, \cdots, S_d, t)$，那么

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}S_iS_j\frac{\partial^2 V}{\partial S_i\,\partial S_j}\right)dt + \sum_{i=1}^{d}\frac{\partial V}{\partial S_i}dS_i$$

我们可以通过使用泰勒级数和如下经验法则得到相同的结果：

$$dX_i^2 = dt \quad 和 \quad dX_i\,dX_j = \rho_{ij}\,dt$$

11.3 度量相关性

如果有全部 d 项资产时间间隔为 δt 的时间序列数据，你就能按照如下步骤计算收益率之间的相关性。首先，获取每个资产的价格序列，并且计算每一期的收益率，则第 i 项资产在时间序列中第 K 个数据点的收益率为

$$R_i(t_k) = \frac{S_i(t_k + \delta t) - S_i(t_k)}{S_i(t_k)}$$

第 i 项资产的历史波动率为：

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{\delta t(M-1)}\sum_{k=1}^{M}(R_i(t_k) - \bar{R}_i)^2}$$

其中 M 是收益率序列中数据点的个数，$\bar{R}_i$ 是该序列中所有收益率的均值。

第 i 项资产和第 j 项资产的协方差由下式给出

$$\frac{1}{\delta t(M-1)}\sum_{k=1}^{M}(R_i(t_k) - \bar{R}_i)(R_j(t_k) - \bar{R}_j)$$

那么相关系数为

$$\frac{1}{\delta t(M-1)\sigma_i\sigma_j}\sum_{k=1}^{M}(R_i(t_k) - \bar{R}_i)(R_j(t_k) - \bar{R}_j)$$

在 Excel 中，两个时间序列的相关系数可以通过 Correl 工作表函数得到，软件中函数的调用位置为工具|数据分析|协方差。

图 11-1 显示了玛莎百货公司、塞恩斯伯里超市和 IBM 之间的相关系数矩阵。

通过金融时间序列数据计算得到的相关系数是十分不稳定的。如果将数据分成相等的两组（按时间先后关系均分），并计算各组的相关系数，你可能会发现两者之间的差异非常显著。比如，你可以从几年的数据中计算 60 天的相关系数，结果可能如图 11-2 所示。若持有一份还有 60 天到期的合约，你

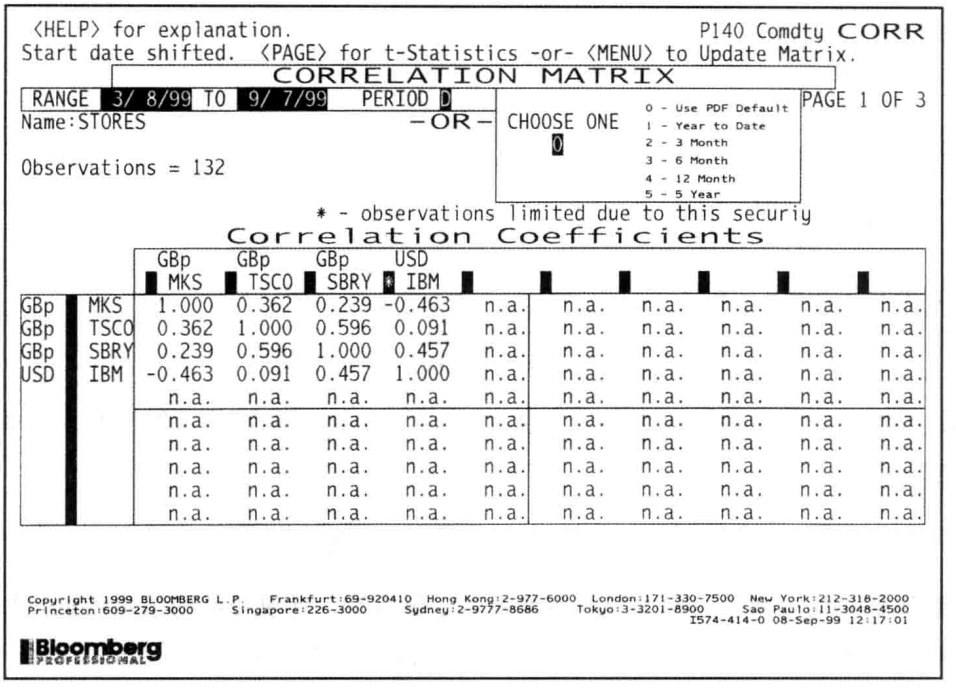


图 11-1　一些相关系数

资料来源：Bloomberg L. P.

便可能想使用历史上 60 天的相关系数。但是，如同图中见到的，使用这样的历史相关系数可要小心，因为相关系数甚至比波动率更不稳定。

另一种可能的方法是从一个金融工具的报价中反推出**隐含相关系数**（implied correlation）。这种方法的思想与隐含波动率相同，它给出了市场信息隐含的相关系数的估计。

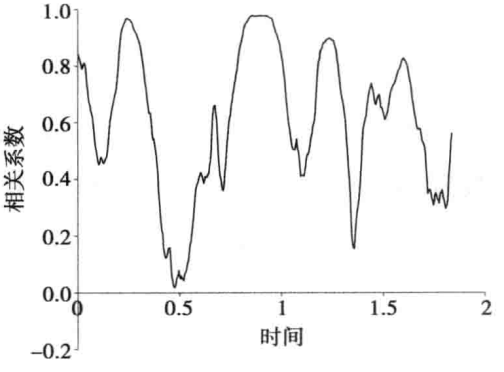


图 11-2　相关系数的时间序列

11.4　多项标的资产的期权

多项标的资产的期权称为**篮子期权**（basket options、options on basket）或者**彩虹期权**（rainbow options）。其定价和套期保值的理论直接由布莱克 - 斯科尔斯的方法给出，不同之处仅是增加了维数。

设置一个投资组合，其中包含一个篮子期权多头和对应数量为 Δ_i 单位的各资

产 S_i 的空头：

$$\Pi = V(S_t, \cdots, S_d, t) - \sum_{i=1}^{d} \Delta_i S_i$$

这个组合价值的变动由下式给定

$$\mathrm{d}\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}S_iS_j\,\frac{\partial^2 V}{\partial S_i\,\partial S_j}\right)\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{d}\left(\frac{\partial V}{\partial S_i} - \Delta_i\right)\mathrm{d}S_i$$

对于每一个资产 i，如果我们选择

$$\Delta_i = \frac{\partial V}{\partial S_i}$$

那么投资组合的风险已被对冲，是无风险的。令收益率等于无风险利率，我们得到

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}S_iS_j\,\frac{\partial^2 V}{\partial S_i\,\partial S_j} + r\sum_{i=1}^{d}S_i\,\frac{\partial V}{\partial S_i} - rV = 0 \qquad (11\text{-}1)$$

这就是布莱克 - 斯科尔斯方程的多维版本。很自然，针对分红的情形我们可以对方程做出相应的调整，当第 i 项资产具有红利率 D_i 时，我们有

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}S_iS_j\,\frac{\partial^2 V}{\partial S_i\,\partial S_j} + \sum_{i=1}^{d}(r - D_i)S_i\,\frac{\partial V}{\partial S_i} - rV = 0}$$

11.5 支付红利资产的欧式非路径依赖期权的定价方程

因为有格林函数（见第 6 章）对这个问题的支持，我们能够写出在时间 T 回报为回报（S_i，…，S_d）的欧式非路径依赖期权的价值：

$$\boxed{\begin{aligned} V &= \mathrm{e}^{-r(T-t)}(2\pi(T-t))^{-d/2}(\mathrm{Det}\sum)^{-1/2}(\sigma_1\cdots\sigma_d)^{-1} \\ &\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}\frac{\text{回报}(S_1'\cdots S_d')}{S_1'\cdots S_d'}\exp\left(-\frac{1}{2}\alpha^T\sum{}^{-1}\alpha\right)\mathrm{d}S_1'\cdots\mathrm{d}S_d' \\ \alpha_i &= \frac{1}{\sigma_i(T-t)^{1/2}}\left(\log\left(\frac{S_i}{S_i'}\right) + \left(r - D_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\right)(T-t)\right) \end{aligned}} \qquad (11\text{-}2)$$

该式包含了每个资产的常数连续红利率 D_i。

11.6 用资产换取资产：一个近似解

交换期权（exchange option）给予持有者以某种比率进行资产交换的权利。这一合约到期的回报为：

$$\max(q_1S_1 - q_2S_2, 0)$$

其中 q_1 和 q_2 是常数。

在布莱克 - 斯科尔斯理论下，该期权所满足的偏微分方程是：

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}S_iS_j\frac{\sigma^2V}{\sigma S_i\sigma S_j}+\sum_{i=1}^{2}(r-D_i)S_i\frac{\partial V}{\partial S_i}-rV=0$$

两个资产的红利率都已经包含在内。由于只有两个标的资产，它们的求和符上限最多也只是 2。

该合约的特殊之处在于它存在一个相似简化形式。我们假设解的形式为

$$V(S_1,S_2,t)=q_1S_2H(\xi,t)$$

其中新的变量为

$$\xi=\frac{S_1}{S_2}$$

如果确实是这样，我们就不用找一个含有三个变量的函数 V，而只需要找到一个含有两个变量的函数 H，这使得求解任务变得容易很多。相应地，H 的终值条件为

$$H(\xi,T)=\max\left(\xi-\frac{q_2}{q_1},0\right)$$

那么，比率 q_2/q_1 便扮演着执行价格的角色。

用 ξ 替换变量 S_1、S_2，我们必须用到以下偏导数：

$$\frac{\partial}{\partial S_1}=\frac{1}{S_2}\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial S_2}=-\frac{\xi}{S_2}\frac{\partial}{\partial\xi}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial S_1^2}=\frac{1}{S_2^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2},\frac{\partial^2}{\partial S_2^2}=\frac{\xi^2}{S_2^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{2\xi}{S_2^2}\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial^2}{\partial S_1\partial S_2}=-\frac{\xi}{S_2^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}-\frac{1}{S_2^2}\frac{\partial}{\partial\xi}$$

关于时间的偏导数没有变化，因此偏微分方程变为

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma'^2\xi^2\frac{\partial^2H}{\partial\xi^2}+(D_2-D_1)\xi\frac{\partial H}{\partial\xi}-D_2H=0$$

其中

$$\sigma'=\sqrt{\sigma_1^2-2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2}$$

你可以把这个方程视为单个标的股票的布莱克 - 斯科尔斯公式，只是用 D_2 代替了 r，用 D_1 代替了单个股票的红利率，并且波动率为 σ'。

在以上的简化基础上我们返回最初的计算，将结果写成原始变量的函数，即

$$V(S_1,S_2,t)=q_1S_1e^{-D_1(T-t)}N(d_1')-q_2S_2e^{-D_2(T-t)}N(d_2')$$

其中

$$d_1' = \frac{\log(q_1 S_1 / q_2 S_2) + (D_2 - D_1 + \frac{1}{2}\sigma'^2)(T-t)}{\sigma' \sqrt{T-t}} \quad \text{且} \quad d_2' = d_1' - \sigma' \sqrt{T-t}$$

交换期权一个有意思的方面是对冲组合的价值。注意，持有资产 S_1 的数量为

$$\frac{\partial V}{\partial S_1} = q_1 \frac{\partial H}{\partial \xi}$$

持有资产 S_2 的数量为

$$\frac{\partial V}{\partial S_2} = q_1 H - q_1 \xi \frac{\partial H}{\partial \xi}$$

如果将这些表达式代入组合价值方程，即

$$\Pi = V - \Delta_1 S_1 - \Delta_2 S_2$$

你会发现组合的价值为 0。

11.7 双币种期权

被称为**双币种期权**（quanto）的交叉货币合约是一种特殊且非常重要的多资产期权。双币种期权的回报依赖于某一国家的资产或者指数（或者利率），但是该期权的回报会转换成另一种货币进行支付。比如，用美元支付的基于日经平均指数的看涨期权，该合约暴露在美元/日元汇率以及日经平均指数的风险之下。通过假设标的资产满足相关系数为 ρ 的对数正态随机游走，我们可以直接写出该期权的微分方程。但是，我们首先还是从基本原则出发构建问题，来说明该期权应该如何套期保值。

定义 $S_\$$ 为日元/美元汇率（每日元等于多少美元[⊖]）以及 S_N 为日经平均指数水平。假设它们满足

$$dS_\$ = \mu_\$ S_\$ dt + \sigma_\$ S_\$ dX_\$ \quad \text{和} \quad dS_N = \mu_N S_N dt + \sigma_N S_N dX_N$$

它们之间的相关系数为 ρ。

构建一个包含双币种期权、日元和日经平均指数的组合，日元和日经平均指数用于进行风险对冲：

$$\Pi = V(S_\$, S_N, t) - \Delta_\$ S_\$ - \Delta_N S_N S_\$$$

⊖ 这与市场惯例正好相反：除了英镑以外，通常表示为每美元等于多少某货币。我在这个问题中这样使用只是为了使代数运算简便。

注意，该方程中的每一项都是用美元计量的。$\Delta_{\$}$是我们持有的日元空头，因此$-\Delta_{\$}S_{\$}$就是这些日元的美元价值。同样，对于$-\Delta_N S_N S_{\$}$项，我们已经把日元指数 S_N 转换成了用美元表示的值；Δ_N 是持有的指数空头。

组合价值的改变来源于其组成成分价值的改变以及收到的用日元计量的利息：

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_{\$}^2 S_{\$}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_{\$}^2} + \rho_{\$N}\sigma_N S_{\$} S_N \frac{\partial^2 V}{\partial S_{\$}\partial S_N} + \frac{1}{2}\sigma_N^2 S_N^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_N^2} \right.$$

$$\left. - \rho_{\$N}\sigma_N \Delta_N S_{\$} S_N - r_f \Delta_{\$} S_{\$} \right) dt + \left(\frac{\partial V}{\partial S_{\$}} - \Delta_{\$} - \Delta_N S_N \right) dS_{\$}$$

$$+ \left(\frac{\partial V}{\partial S_N} - \Delta_N S_{\$} \right) dS_N$$

上式中有一项是我们之前没有见过，即$-\rho_{\$N}\sigma_N S_{\$} S_N$，这归因于$-\Delta_N S_N S_{\$}$的增加。另外，还存在因持有日元而收到的利息项，这一项之前已经见过。现在我们选择

$$\Delta_{\$} = \frac{\partial V}{\partial S_{\$}} - \frac{S_N}{S_{\$}} \frac{\partial V}{\partial S_N} \quad 和 \quad \Delta_N = \frac{1}{S_{\$}} \frac{\partial V}{\partial S_N}$$

来减少组合的风险。令该无风险组合的收益率等于美元无风险利率 $r_{\$}$（因为组合 Π 的各部分均由美元计量），则收益率将满足

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_{\$}^2 S_{\$}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_{\$}^2} + \rho_{\$N}\sigma_N S_{\$} S_N \frac{\partial^2 V}{\partial S_{\$}\partial S_N} + \frac{1}{2}\sigma_N^2 S_N^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_N^2}$$

$$+ S_{\$} \frac{\partial V}{\partial S_{\$}}(r_{\$} - r_f) + S_N \frac{\partial V}{\partial S_N}(r_f - \rho_{\$N}\sigma_N) - r_{\$} V = 0$$

这使得定价方程变得完整。对于任何一个用一种货币计量标的资产但是用另外一种货币支付的合约，这个方程都有效。为了完整设定特定的双币种期权，我们必须给出 $t=T$ 时的终值条件：

$$V(S_{\$}, S_N, T) = \max(S_N - E, 0)$$

注意，就到期回报而言，我们并不太需要关心 $S_{\$}$的大小（只是需要用它进行套期保值）。我们没有用汇率乘以回报。得益于回报的简单形式，可以寻找一个独立于汇率的解。令

$$V(S_{\$}, S_N, t) = W(S_N, t)$$

我们发现

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_N^2 S_N^2 \frac{\partial^2 W}{\partial S_N^2} + S_N \frac{\partial W}{\partial S_N}(r_f - \rho_{\$N}\sigma_N) - r_{\$} V = 0$$

这是简单的单因子布莱克 - 斯科尔斯方程。如果拿这个方程与有着常数红利支付

率的布莱克 - 斯科尔斯方程比较，我们发现为双币种期权定价等同于为具有以下红利支付率的期权定价

$$r_{\$} - r_f + \rho\sigma_{\$}\sigma_N$$

交叉货币特征对期权价值唯一值得注意的影响就是红利收益率的调整，该收益率依赖于汇率的波动率以及标的资产与汇率之间的相关系数。这是简单双币种期权的普遍结果。

11.8 两个例子

图 11-3 显示了 La Tricolore 资本抵押票据的条款说明书。该合约考察三种货币兑换法郎的汇率表现，然后支付表现排在第二的货币。另外必须满足该货币相对于法郎是升值的条件，否则它将按面值支付。该合约没有任何不同寻常的特征，其价值也可以写出如式（11-2）的三重积分形式。但是回报函数又是什么呢？我想你不会利用一个偏微分方程对这个合约进行定价，而是利用第 81 章的方法直接估计多重积分。

La Tricolore资本抵押票据

发行人	× × × ×
本金	FRF100 000 000
发行价格	98.75%
到期日	自发行之日起12个月以后
息票率	0
偿付金额	如果在到期日，下列三个指数

$$\frac{\text{USD/FRF-6.0750}}{6.0750};\ \frac{\text{GBP/FRF-10.2000}}{10.2000};\ \frac{\text{JPY/FRF-0.051 20}}{0.051\ 20}$$

至少有两个为正，本票据会用升值率排第二的货币偿还本金；否则，本票据将使用法郎偿还本金。如果本票据用法郎以外的货币偿还本金，其数量为法郎本金除以该货币对法郎的票据发行日当天的即期汇率。

注：该说明书既不是用于购买或出售证券或OTC衍生产品的要约，包括期权、互换、远期合约及与OTC衍生工具类似的结构化产品凭证，也不是购买或出售证券或OTC衍生产品的宣传单。上述不是特定交易条款的完整描述，其中项目将不受限制更改。

图 11-3 La Tricolore 资本抵押票据的条款说明书

第二个例子是一篮子股票互换，其条款说明书如图 11-4 所示。这个更加复杂的高维合约，是基于 3 个月期 LIBOR 和某个指数水平的利率互换，其中指数由 20 只医药股票加权平均构成。由于该指数使用的是股票价格的时间加权平均

值，使问题变得更加复杂。

国际医药一篮子股权互换

陈述性条目

交易日期	[]
初始估值日	[]
生效日	[]
最终估值日	2002年9月26日
平均日期	2002年3月26日起每个月与初始估值日相同的日期，直到并且包括到期日
名义本金	25 000 000美元
对手方浮动数量（US $ LIBOR）	
浮动利率支付方	[]
浮动利率指数	USD-LIBOR
设定的到期期限	3个月
利差	-0.25%
日期计算方法	实际天数/360
浮动利率支付日期	每季度与生效日相同的日期
初始浮动利率指数	[]
本行固定和互动支付数量（费用，股票期权）	
固定金额支付方	× × × ×
固定支付金额	名义本金的1.3%
固定支付日期	生效日
篮子	由附录中列出的20只股票组成
初始篮子水平	在初始估值日设为100
浮动权益支付方	× × × ×
浮动权益支付金额	根据一篮子股票的表现计算，公式如下

$$（名义本金 \times \max\left[0, \left(\frac{篮子_{平均}-100}{100}\right)\right]$$

其中

$$篮子_{平均}=100\times\sum_{20只股票}\left(权重\times\frac{P_{平均}}{P_{初始}}\right)$$

其中每只股票的权重在附录中给出；$P_{初始}$是在初始估值日每只股票的本币价格；$P_{平均}$是在每个确定平均价格的日期每只股票本币价格的算术平均值。

浮动权益支付日期	到期日

附录

下述股票权重相等，均为5%：

Astra(瑞典)，Glaxo Wellcome（英国），Smithkline Beecharm(英国)，Zeneca Group(英国)，Novartis(瑞士)，Roche Holding Genus(瑞士)，Sanofi(法国)，Synthelabo(法国)，Bayer(德国)，Abbott Laba（美国），Bristhol Myers Squibb(美国)，American Home Products(美国)，Amgen(美国)，Eli Lily（美国），Medtronic（美国），Merck（美国），Pfizer(美国)，Schering-Plough(美国)，Sankyc(日本)，Takeda Chemical(日本)

注：该说明书既不是用于购买或出售证券或OTC衍生产品的要约，包括期权、互换、远期合约及与OTC衍生工具类似的结构化产品凭证，也不是购买或出售证券或OTC衍生产品的宣传单。上述不是特定交易条款的完整描述，其中项目将不受限制更改。

图 11-4　一篮子股权互换的条款说明书

11.9 其他特征

篮子期权还有许多其他我们已经看到过或将要看到的特征，其中包括提前执行以及之后也会再次讨论的——路径依赖特征。有时期权的回报具有一些基于其他资产的特征，例如某一资产是否提前执行依赖于另一种资产。这仍将是一个多因子的问题，在这个例子中有两个随机源。

继续上述例子，假设到期时回报为 $P(S_1)$，并且假设期权能够提前执行并收到该回报（但需满足条件 $S_2 > E_2$）。为了给该合约定价，必须找出满足下式的函数 $V(S_1, S_2, t)$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}S_iS_j\frac{\partial^2 V}{\partial S_i\,\partial S_j} + \sum_{i=1}^{2}rS_i\frac{\partial V}{\partial S_i} - rV = 0$$

并且

$$V(S_1, S_2, T) = P(S_1)$$

约束条件为

$$\text{当 } S_2 > E_2 \text{ 时}, V(S_1, S_2, t) \geqslant P(S_1)$$

并且 V 和 V 的一阶导数必须连续。

如果我们能为基于单一资产且有许多特征的期权进行定价和套期保值，那么理论上来说我们也能为多资产期权进行定价和套期保值。正如下面将会提到的，为多资产期权定价和套期保值将会更加困难。

11.10 为篮子期权定价的事实

决定多资产期权定价和套期保值难易程度的因素有：

- 解析解的存在与否；
- 标的资产的数量，即维度；
- 路径依赖；
- 提前执行。

除了路径依赖之外，我们已经见到了以上各种因素，在本书系列第二部分会介绍路径依赖。

我们使用的求解技术通常是以下几种之一：

- 求解偏微分方程的有限差分法；
- 数值积分；
- 蒙特卡罗模拟。

这些方法是本书系列第六部分的主题。

11.10.1　简单的问题

如果存在一个解析解，那么工作就算完成了，这时我们能轻易地得出产品的价值以及套期保值比率。这个解需要具有足够简单的函数形式，以至于可以通过电子表格函数或者其他数据库函数表示。如果是没有路径依赖的欧式合约，那么解可能具有式（11-2）的形式。如果真的是这样，则我们通常需要进行数值积分。但这并不困难，在第 81 章中将介绍几种方法，包括蒙特卡罗积分以及低误差序列的应用。

11.10.2　中等难度的问题

如果我们需要处理的是低维度的问题（比如低于三维或四维），那么有限差分法是当然的选择。虽然常以额外的维度为代价，但有限差分法确实能够很好地处理期权的提前执行特征，并且可以将许多路径依赖的特征纳入考虑。

对于更高的维度，蒙特卡罗模拟是很不错的选择，它能够处理所有的路径依赖特征。遗憾的是，它对于处理美式期权的提前执行不是很有效。

11.10.3　困难的问题

需要解决的最困难的问题是既有高维度，又提前执行的期权的问题：对于高维度特征，可以使用蒙特卡罗模拟；对于提前执行特征，可以使用有限差分法。但面对同时包含高维度和提前执行的期权问题时，目前还没有能够很好地处理这类问题的数值方法。

11.11　对篮子期权进行套期保值的事实

即使能够找出期权价值以及相关的希腊字母，它们对相关性的反映通常也会非常敏感。如前面所介绍的，相关性是非常难以衡量的量，因此套期保值比率极有可能是不准确的。如果进行 Delta 套期保值，就需要对 Delta 值进行准确的估

计，这使得对篮子期权进行的 Delta 套期保值一般难以成功。

当我们持有一个难以进行 Delta 套期保值的合约时，可以通过用其他衍生产品进行套期保值，来尽力减少合约对参变量和模型的敏感性。这是在第 7 章提到的 Vega 套期保值。我们可以试着用同样的思路来减少对相关性的敏感程度。遗憾的是，这样的操作同样存在困难，因为没有足够依赖于正确相关性的合约来交易。

11.12 相关性与协整

众所周知，金融变量之间的相关性是相当不稳定的，谁都可以很容易地抨击构建在如此不可预测的参数上的理论。我倾向于认同这样的观点。你可能会建议使用一个随机相关性模型，但是这一模型也有其自身的问题。

另一个衡量相关性的统计方法是**协整**（cointegration）。比较不严谨地说，如果两个时间序列的线性组合具有常数均值和标准差，那么这两个时间序列就是协整的。换句话说，这两个序列永远不会相互偏离太远。这可能是关于两个金融变量间联动关系的更稳健的一个度量，但是至今仍然没有基于这一概念的衍生品理论出现。

11.13 总结

本章中的新概念有多因子、多资产的相关性随机游走以及高维度的伊藤引理。这些都是简单的概念，我们也将会经常使用它们，特别是在与利率有关的问题中。

延伸阅读

- 关于相关性和协整度量的进一步细节，参见 Hamilton (1994)。
- 外汇期权问题的初步求解，参见 Margrabe (1978)。
- 关于一些其他多因子期权定价的解析结果、公式或者数值算法，参见 Stulz (1982)，Johnson (1987)，Boyle，Evnine 和 Gibbs (1989)，Boyle 和 Tse (1990)，Rubinstein (1991) 和 Rich 和 Chance (1993)。
- 参见 Emanuel Derman 自传中关于双币种期权的讨论 (Derman，2004)。
- 关于协整的细节、意义及其作用原理，参见 Alexander 和 Johnson (1992，1994) 的论文。
- Krekel 等人 (2004) 比较了为篮子期权定价的不同方法。

第 12 章

如何进行 Delta 对冲

本章内容

- 如果对波动率的预测比市场更准确，如何从中获利
- 不同的 Delta 对冲方法
- 你期望赚取多少利润

12.1 引言

在本章中，我们将大胆断言通过期权赚钱是完全可以的，这是因为期权可能被市场错误地定价，简言之就是存在套利机会。这真是令人震惊！我知道整个芝加哥大学已经厌恶地把这本书扔开了。但是，我希望剩下的你们可以享受本章的内容，因为本章向具体数学领域引入了一些很重要的思想，而这些思想目前在理论文献中的解释少得惊人。本章内容的主题是：当你对未来真实波动率的估计与市场上测得的隐含波动率不相同时，该怎样进行 Delta 对冲。

就如上面提到的，对有些人来说真实波动率与隐含波动率可以不一致的说法本身就是一个异端学说，因为这意味着套利机会的存在进而世上有免费的午餐。当然，只有在模型精确时才有免费午餐；也就是说，并不总是免费的。尽管如

此，当这种不一致存在时（波动率套利对冲基金就坚信其存在），我们也只能通过对冲来获取免费午餐；并且如果我们对波动率有两个估计，被代入到布莱克 - 斯科尔斯 Delta 公式中的应该是哪一个呢？

我们将会看到怎样通过 Delta 进行对冲，而 Delta 可以基于真实波动率或者隐含波动率。两种方法没有对错之分，它们只是具有不同的风险/收益特征。

如果你确实怀疑隐含波动率和真实波动率可以不一致的说法，看看图 12-1。这幅简图描绘了 VIX 和 SPX 滚动已实现波动率的对数分布。VIX 是依据 SPX 指数计算得到的一个隐含波动率，因此你可以想象它与 SPX 已实现波动率具有一定的相似性。但是，正如图中所看到的，它们并不完全相似。隐含波动率 VIX 看起来要比已实现波动率更高。这两个波动率都近似地服从对数正态分布（由于它们的对数看起来像是正态分布），尤其是已实现波动率。VIX 分布的左边多少有点被截断了。已实现波动率的均值大约是 15%，这显著小于 VIX 的均值 20%，但已实现波动率的标准差相对更大。

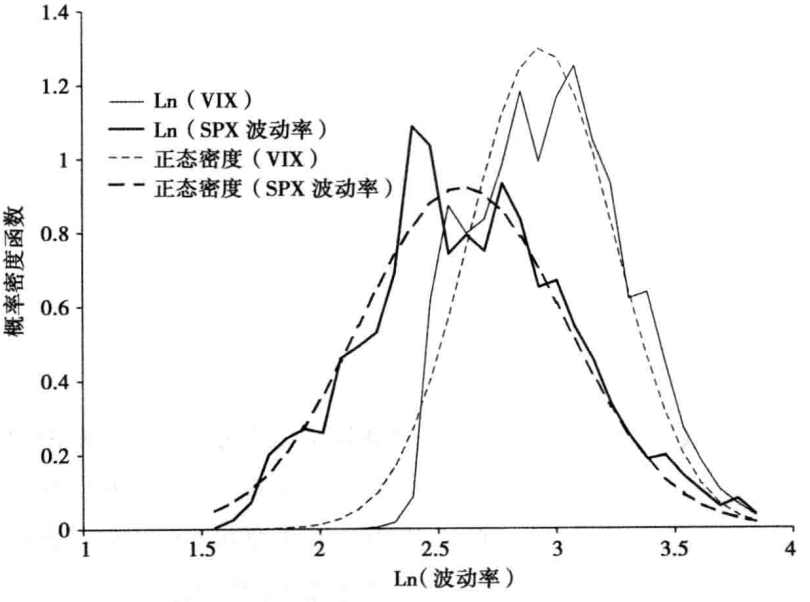


图 12-1 VIX 和滚动的 SPX 已实现波动率的对数分布
以及作为比较的正态密度函数

12.2 如果隐含波动率和真实波动率不一样，将会发生什么

真实波动率是股价中“噪声”的数量，是股票收益率模型中维纳过程的系

数，也是“真实”实现了的随机性的数量。而隐含波动率反映的是目前市场对期权的定价态度。由于市场可能并没有对未来有完美的了解，因此这两个数字将会产生差异。

真实波动率不同于隐含波动率是本章的核心思想。让我们看一个简单的例子，在这个例子中我们将通过买或卖期权而不是 Delta 对冲它们来利用两种波动率的差异。

想象一下我们对期权剩余期限内标的股票的波动率有一个预测，且将它预测成一个常数；最关键的一点是，假设这个预测最终被证明是正确的。

如果你相信真实波动率将比隐含波动率高，也许会选择购买一个跨式组合。因为股票价格在期权到期前有很大概率产生大幅度变动，以至于考虑了货币的时间价值以后，你的回报仍然会比付出的期权费大。这是一个非常简单的策略，且不需要维护。但是该策略具有一个大问题，即它是有风险的。有时候你会赢，有时候你会输。除非你能重复进行这个策略很多次，否则你仍可能大亏。即使你对真实波动率较大的判断是对的，股票仍然可能以平价结束，那么你就可能亏钱。真实波动率和资产价格运动范围之间是概率关系，高的波动率并不一定保证大幅度的资产价格运动。

如果你购买了一个接近到期的平价跨式组合，那么你能期望从这个交易策略中获得的利润近似是

$$\sqrt{\frac{2(T-t)}{\pi}}(\sigma-\bar{\sigma})S$$

这个表达式使用了我们在第 7 章中看到的接近到期和平价逼近方法。符号的含义是显而易见的：σ 代表真实波动率，被假设为常数，$\bar{\sigma}$ 是隐含波动率。注意，这是一个期望，也是现实世界中的期望。但是真实的漂移率并没有出现在这个表达式中，因为它仅在接近到期的时候才是一个有效的逼近。

利润的标准差（风险）近似为

$$\sqrt{1-\frac{2}{\pi}}\sigma S\sqrt{T-t}$$

从这个式子可以观察到，标准差依赖于真实波动率但并不依赖于隐含波动率。

标准差和期望利润的量级是等阶的，这是非常大的风险。接下来可以看到，

我们能够通过 Delta 对冲改善风险—收益状况。写出上面两个表达式的主要目的是为了说明它们和两个波动率有着怎样的线性关系。

12.3 隐含波动率与真实波动率：Delta 对冲应该使用哪个波动率

同上文一样，假设购买一个被低估的期权或投资组合。但是现在，我们将会进行 Delta 对冲直至到期以改善风险和收益。这是一个风险更小的策略。

然而，你将选用哪个 Delta 呢？基于真实波动率还是隐含波动率的 Delta？这是个总被问到的问题，看来也是个无法完全回答的问题。

情景：期权的隐含波动率是 20%，但是我们相信真实波动率是 30%。问题：如果我们的预测是正确的，怎样才能赚钱？答案：购买这个期权并进行 Delta 对冲。但是我们该使用哪一个 Delta？我们知道

$$\Delta = N(d_1)$$

其中

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{s^2}{2}}\,\mathrm{d}s$$

并且

$$d_1 = \frac{\ln(S/E) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

我们对 S、E、$T-t$ 和 r（几乎）的取值都能达成一致，但对 σ 不能。因此我们应该用 $\sigma=0.2$ 还是 0.3，是用隐含波动率还是真实波动率？在这个例子中，

σ=真实波动率，30%

$\tilde{\sigma}$=隐含波动率，20%。

哪一个应该被代入 d_1 中？

12.4 案例 1：使用真实波动率 σ 对冲

通过使用真实波动率进行对冲，就是在复制一个被正确定价的期权空头。多头期权和复制的空头期权的回报将会正好相互抵消，我们获取的利润正好是使用 30% 波动率与 20%波动率得到的布莱克 - 斯科尔斯期权价格的差值（假设布莱克 - 斯科尔斯成立）。如果 $V(S, t; \sigma)$ 表示布莱克 - 斯科尔斯公式，那么确保的利润是

$$V(S,t;\sigma)-V(S,t;\tilde{\sigma})$$

但是如何实现这个确保的利润呢？让我们在盯市的基础上做一些数学推导。

在接下来的内容里，上标 a 表示真实指标，i 表示隐含指标，这两个符号可以应用于 Delta 和期权价格上。例如，Δ^a 表示在式子中使用真实波动率得到的 Delta。V^i 表示在公式中使用隐含波动率得到的理论上的期权价值。注意，V、Δ、Γ 和 Θ 都是我们熟悉的布莱克 - 斯科尔斯公式标记。

模型依然是如下形式：

$$\mathrm{d}S=\mu S\mathrm{d}t+\sigma S\mathrm{d}X$$

现在，通过购买一个期权 V^i，并使用 Δ^a 进行对冲来建立一个资产组合。该资产组合各组成部分的价值列在表 12-1 中。

表 12-1　资产组合组成与价值（今天）

组成部分	值
期权	V^i
股票	$-\Delta^a S$
现金	$-V^i+\Delta^a S$

持有这个对冲组合到第二天，各个部分的新价值如表 12-2 所示（我已经把连续的红利率纳入其中了）。

表 12-2　资产组合组成与价值（明天）

组成部分	值
期权	$V^i+\mathrm{d}V^i$
股票	$-\Delta^a S-\Delta^a\mathrm{d}S$
现金	$(-V^i+\Delta^a S)(1+r\mathrm{d}t)-\Delta^a DS\mathrm{d}t$

因此，我们已经通过盯市赚取

$$\mathrm{d}V^i-\Delta^a\mathrm{d}S-r(V^i-\Delta^a S)\mathrm{d}t-\Delta^a DS\mathrm{d}t$$

由于期权应该被正确地定价 V^a 我们有

$$\mathrm{d}V^a-\Delta^a\mathrm{d}S-r(V^a-\Delta^a S)-\Delta^a DS\mathrm{d}t=0$$

我们可以把一个时间步长内盯市的利润写成

$$\mathrm{d}V^i-\mathrm{d}V^a+r(V^a-\Delta^a S)\mathrm{d}t-r(V^i-\Delta^a S)\mathrm{d}t$$

$$=\mathrm{d}V^i-\mathrm{d}V^a-r(V^i-V^a)\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{rt}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-rt}(V^i-V^a))$$

这是从 t 时刻到 $t+\mathrm{d}t$ 时刻的利润，其在 t_0 时刻的现值为

$$\mathrm{e}^{-r(t-t_0)}\mathrm{e}^{rt}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-rt}(V^i-V^a))=\mathrm{e}^{rt_0}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-rt}(V^i-V^a))$$

因此，从 t_0 时刻到期权到期时刻的总利润为

$$e^{rt_0}\int_{t_0}^{T} d(e^{-rt}(V^i - V^a)) = V^a - V^i$$

这就证实了我之前所说的确保的到期总利润。

我们也可以把一个时间步长内的盯市利润写成（使用伊藤引理）

$$\Theta^i dt + \Delta^i dS + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma^i dt - \Delta^a dS - r(V^i - \Delta^a S)dt - \Delta^a DS dt$$

$$= \Theta^i dt + \mu S(\Delta^i - \Delta^a)dt + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma^i dt - r(V^i - V^a)dt$$

$$+ (\Delta^i - \Delta^a)\sigma S dX - \Delta^a DS dt$$

$$= (\Delta^i - \Delta^a)\sigma S dX + (\mu + D)S(\Delta^i - \Delta^a)dt + \frac{1}{2}(\sigma^2 - \tilde{\sigma}^2)S^2 \Gamma^i dt$$

（使用布莱克 - 斯科尔斯公式并令 $\sigma = \tilde{\sigma}$）

$$= \frac{1}{2}(\sigma^2 - \tilde{\sigma}^2)S^2 \Gamma^i dt + (\Delta^i - \Delta^a)((\mu - r + D)S dt + \sigma S dX)$$

得到结论：最后可以获得确保的利润（使用两个波动率得到的理论期权价格的差），由于 dX 项的存在，获得它的过程则是随机的。在盯市的基础上，你可能在获利之前亏损。进一步地，盯市利润依赖于股票的真实漂移率 μ，见图 12-2 说明。图 12-2 显示了几条同一 Delta 对冲头寸的实现路径。注意，最终的盈亏并不是完全相同的，这是因为离散化对冲的影响。我们将在第 47 章讨论这个问题。

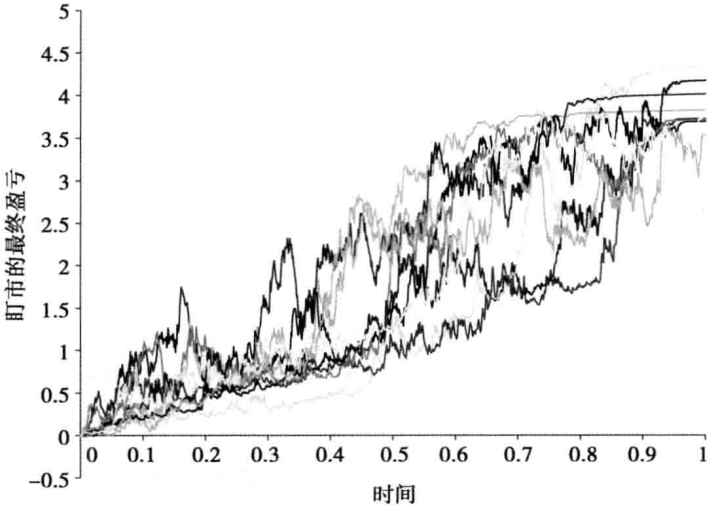


图 12-2 在盯市的基础上 Delta 对冲期权的最终盈亏，基于真实波动率对冲

当 S 变化时，V 也会变化，但是这些变化并不能相互抵消。从风险管理的角度来说，这并不理想。

一个与此种表现类似的简单类比是，拥有一只债券。持有债券具有一个确保的结果，但是从盯市的角度来看，持有期间也有可能亏损。

12.5　案例 2：使用隐含波动率 $\tilde{\sigma}$ 对冲

现在考虑对比的情况，选择使用基于隐含波动率的 Delta 进行对冲。通过使用隐含波动率对冲，我们用股票价格的波动来调整期权盯市价格的随机波动。接下来将看到，组合价值的变化将变成“确定”的。

今天购买期权并运用隐含 Delta 对冲，持有的现金余额放在银行获得利率 r。那么在今天到明天这段时间，盯市利润为

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}V^i - \Delta^i \mathrm{d}S - r(V^i - \Delta^i S)\mathrm{d}t - \Delta^i DS\mathrm{d}t \\ &= \Theta^i \mathrm{d}t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma^i \mathrm{d}t - r(V^i - \Delta^i S)\mathrm{d}t - \Delta^i DS\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}(\sigma^2 - \tilde{\sigma}^2) S^2 \Gamma^i \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{12-1}$$

这是一个好得多的赚钱方法。注意，日利润中并不含有 $\mathrm{d}X$ 项，这是一个确定的值。从风险管理角度来说，这确实是一个更好的操作。另外，运用隐含波动率对冲还有一个更精彩的优势：我们甚至不需要知道真实波动率是什么。为获得利润，唯一需要知道的就是，真实波动率将会比隐含波动率高（买入）或者低（卖出）。这减轻了一开始就要准确预测波动率的压力。

将这些利润折现之后进行加总可以获得总利润

$$\frac{1}{2}(\sigma^2 - \tilde{\sigma}^2)\int_{t_0}^{T} \mathrm{e}^{-r(t-t_0)} S^2 \Gamma^i \mathrm{d}t$$

这个值将永远为正，但是具有高度的路径依赖。路径依赖意味着它将依赖于漂移率 μ。如果选择在股票漂移率很大（正或负）的时候用在值期权开始操作，我们将迅速进入低 Gamma 值（因此式（12-1）也很小）区域，利润也就很少了。可能发生的最好的情况是当股票价格终止在交割价附近的情况，这可以得到最大化的总利润。这里提到的路径依赖现象可以在图 12-3 中得到体现。图中显示了同

一个 Delta 对冲策略的数个实现情形。注意，各线条不是完美平滑的，这也是由于离散对冲导致的。

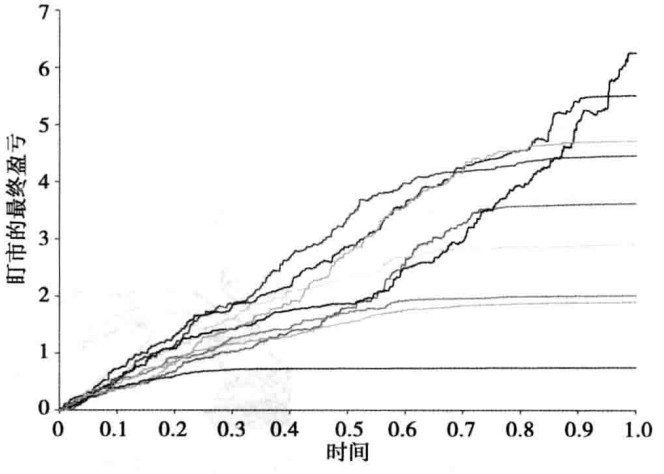


图 12-3 在盯市的基础上 Delta 对冲期权的最终盈亏，基于隐含波动率对冲

一个简单的类比：把钱存进银行，盈利的量将永远是增加的，但是最终盈利的总量是随机的。

Peter Carr（2005）和 Henrard（2001）指出，如果用基于波动率 σ_h 的 Delta 进行对冲，总利润的现值等于

$$V(S,t;\sigma_h)-V(S,t;\tilde{\sigma})+\frac{1}{2}(\sigma^2-\sigma_h^2)\int_{t_0}^{T}\mathrm{e}^{-r(t-t_0)}S^2\Gamma^h\,\mathrm{d}t \qquad (12\text{-}2)$$

其中 Gamma 的上标表示它利用了波动率为 σ_h 的布莱克 - 斯科尔斯公式。

12.5.1 隐含波动率对冲后的预期利润

当你使用基于隐含波动率的 Delta 对冲时，每“天”的利润是确定的，但是到期总利润的现值是路径依赖的，等于

$$\frac{1}{2}(\sigma^2-\tilde{\sigma}^2)\int_{t_0}^{T}\mathrm{e}^{-r(s-t_0)}S^2\Gamma^i\,\mathrm{d}s$$

令

$$I=\frac{1}{2}(\sigma^2-\tilde{\sigma}^2)\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{-r(s-t_0)}S^2\Gamma^i\,\mathrm{d}s$$

那么由于

$$dI=\frac{1}{2}(\sigma^2-\tilde{\sigma}^2)\mathrm{e}^{-r(t-t_0)}S^2\Gamma^i\,\mathrm{d}t$$

我们可以写出 I 的现实期望值 $P(S, I, t)$ 服从如下偏微分方程：

$$\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 P}{\partial S^2}+\mu S\frac{\partial P}{\partial S}+\frac{1}{2}(\sigma^2-\tilde{\sigma}^2)\mathrm{e}^{-r(t-t_0)}S^2\Gamma^i\frac{\partial P}{\partial I}=0$$

其中

$$P(S,I,T)=I$$

考虑一个如下形式的解：

$$P(S,I,t)=I+H(S,t)$$

那么有

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 H}{\partial S^2}+\mu S\frac{\partial H}{\partial S}+\frac{1}{2}(\sigma^2-\tilde{\sigma}^2)\mathrm{e}^{-r(t-t_0)}S^2\Gamma^i=0$$

源项可以化简形式为

$$\frac{E(\sigma^2-\tilde{\sigma}^2)\mathrm{e}^{-r(T-t_0)}\mathrm{e}^{-d_2^2/2}}{2\tilde{\sigma}\sqrt{2\pi(T-t)}}$$

通过变量代换

$$x=\log(S/E)+\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau \text{ 和 } \tau=T-t$$

可以写出

$$H=w(x,\tau)$$

此时的偏微分方程的形式美观了些。细节可以在本章附录 12A 中看到。

再进行一定的处理，最终可以得到一个积分形式的期初（$t=t_0$，$I=0$）预期利润如下：

$$\frac{E\mathrm{e}^{-r(T-t_0)}(\sigma^2-\tilde{\sigma}^2)}{2\sqrt{2\pi}}\int_{t_0}^{T}\frac{1}{\sqrt{\sigma^2(s-t_0)+\tilde{\sigma}^2(T-s)}}$$

$$\times\exp\left(-\frac{\log(S/E)+\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(s-t_0)+\left(r-D-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2\right)(T-S)^2}{2(\sigma^2(s-t_0)+\tilde{\sigma}^2(T-s))}\right)\mathrm{d}s$$

图 12-4 体现了通过隐含波动率对冲的预期利润与漂移率 μ 的关系，其中参数分别为 $S=100$，$\sigma=0.4$，$r=0.05$，$D=0$，$E=110$，$T=1$，$\tilde{\sigma}=0.2$。观察易得，预期利润有一个最大值。此处漂移率水平可以大约保证股票价格在期权到期时接近交割价格附近（此处 Gamma 值最高）。对于大多数真实参数的情形，用隐含波动率对冲的最大预期利润与用实际波动率对冲的确保利润是比较接近的。

图 12-5 体现的是预期利润与 E 和 μ 的关系。看的出来，在预期利润最大化的区域，漂移率越大，交割价格也越高。等高线图在图 12-6 给出。

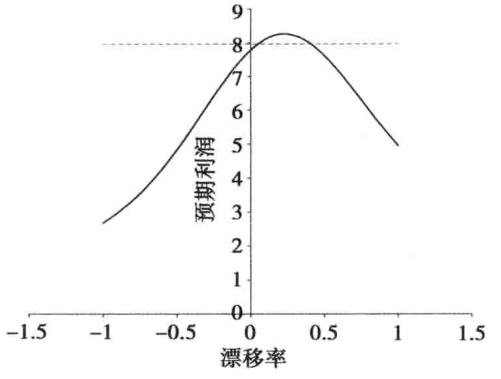


图 12-4 通过隐含波动率对冲的预期利润对漂移率 μ；$S=100$，$\sigma=0.4$，$r=0.05$，$D=0$，$E=110$，$T=1$，$\bar{\sigma}=0.2$。虚线表示用实际波动率对冲的利润

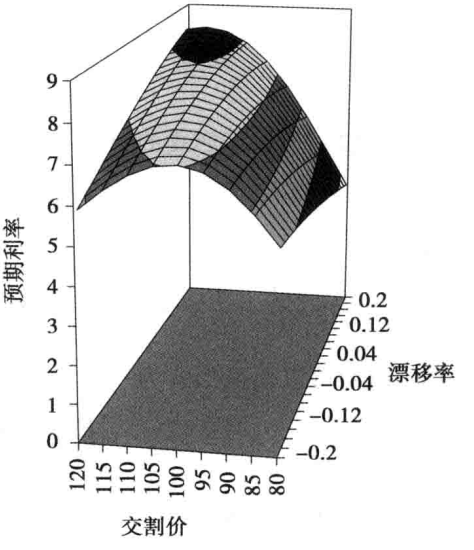


图 12-5 基于隐含波动率对冲的预期利润对漂移率 μ 和交割价 E；$S=100$，$\sigma=0.4$，$r=0.05$，$D=0$，$T=1$，$\bar{\sigma}=0.2$

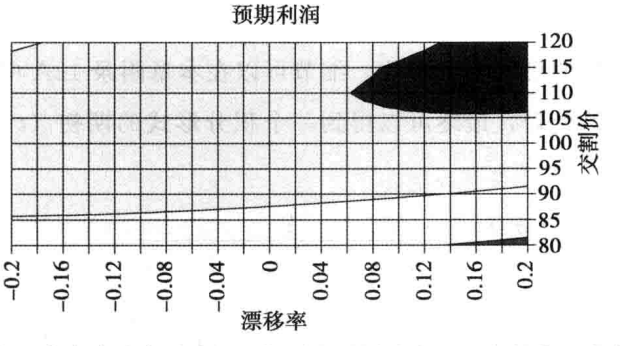


图12-6 基于隐含波动率对冲的预期利润对漂移率 μ 和交割价 E 的等高线图；$S=100$，$\sigma=0.4$，$r=0.05$，$D=0$，$T=1$，$\bar{\sigma}=0.2$

偏度将导致的效果在图 12-7 中体现。这里采用的是一个线性的负偏，从交割价为 75 的 22.5%降到了交割价为 125 的 17.5%。平价点的隐含波动率是 20%（在这个例子中等于实际波动率）。当你用期权价格（低交割价时用看跌期权，高交割价时用看涨期权）去除预期利润时，可以得到图 12-8。此时没有最大值，利润随着在值程度远离平价点的距离增大而增大。当然，这里没有考虑风险，也就是这种交易对应的标准差。

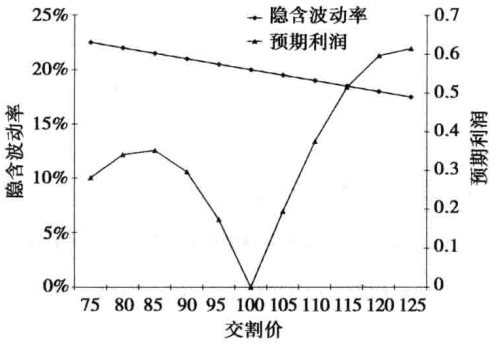


图 12-7　偏度产生的效果，基于隐含波动率对冲的预期利润对交割价 E；$S=100$，$\mu=0$，$\sigma=0.2$，$r=0.05$，$D=0$，$T=1$

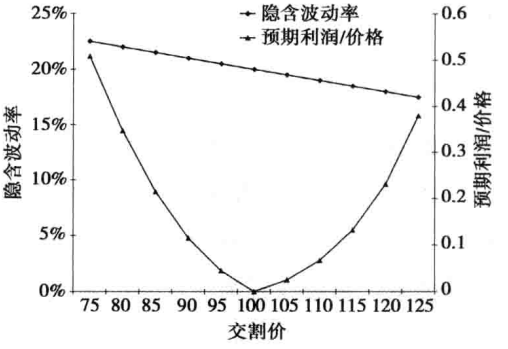


图 12-8　偏度产生的效果，基于隐含波动率对冲的预期利润的比率对交割价 E；$S=100$，$\mu=0$，$\sigma=0.2$，$r=0.05$，$D=0$，$T=1$

12.5.2　隐含波动率对冲后利润的方差

在完成了用隐含波动率对冲后预期利润计算的基础上，接下来就可以计算最终利润的方差。使用之前的符号，方差等于 I^2 的期望减去 I 的期望的平方。那么我们需要计算 $v(S,\ I,\ t)$，其中

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 v}{\partial S^2}+\mu S\frac{\partial v}{\partial S}+\frac{1}{2}(\sigma^2-\tilde{\sigma}^2)\mathrm{e}^{-r(t-t_0)}S^2\Gamma^i\frac{\partial v}{\partial I}=0$$

且有

$$v(S,I,T)=I^2$$

方程 v 的求解细节十分烦琐，不过可以发现解的形式为

$$v(S,I,t)=I^2+2IH(S,t)+G(S,t)$$

初始方差是 $G(S_0,\ t_0)\ -F\ (S_0,\ t_0)^2$，其中

$$G(S_0,t_0)=\frac{E^2(\sigma^2-\tilde{\sigma}^2)^2\mathrm{e}^{-2r(T-t_0)}}{4\pi\sigma\tilde{\sigma}}\int_{t\ 0}^{T}\int_{s}^{T}\times\frac{\mathrm{e}^{p(u,s;S_0,t_0)}}{\sqrt{s-t_0}\sqrt{T-s}\sqrt{\sigma^2(u-s)+\tilde{\sigma}^2(T-u)}\sqrt{\frac{1}{\sigma^2(s-t_0)}+\frac{1}{\tilde{\sigma}^2(T-s)}+\frac{1}{\sigma^2(u-s)+\tilde{\sigma}^2(T-u)}}}\mathrm{d}u\mathrm{d}s \tag{12-3}$$

其中

$$p(u,s;S_0,t_0)=-\frac{1}{2}\frac{(x+\alpha(T-s))^2}{\tilde{\sigma}^2(T-s)}-\frac{1}{2}\frac{(x+\alpha(T-u))^2}{\sigma^2(u-s)+\tilde{\sigma}^2(T-u)}+\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{x+\alpha(T-s)}{\tilde{\sigma}^2(T-s)}+\frac{x+\alpha(T-u)}{\sigma^2(u-s)+\tilde{\sigma}^2(T-u)}\right)^2}{\frac{1}{\sigma^2(s-t_0)}+\frac{1}{\tilde{\sigma}^2(T-s)}+\frac{1}{\sigma^2(u-s)+\tilde{\sigma}^2(T-u)}}$$

且

$$x = \ln(S_0/E) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t_0) \text{ 和 } \alpha = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 - r + D + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2$$

推导过程在本章附录 12A 中。

图 12-9 刻画的是利润标准差与偏移率的关系，参数设置为 $S=100$，$\sigma=0.4$，$r=0.05$，$D=0$，$E=110$，$T=1$，$\tilde{\sigma}=0.2$。图 12-10 刻画的是利润的标准差与交割价的关系，参数设置为 $S=100$，$\sigma=0.4$，$r=0.05$，$D=0$，$\mu=0.1$，$T=1$，$\tilde{\sigma}=0.2$。

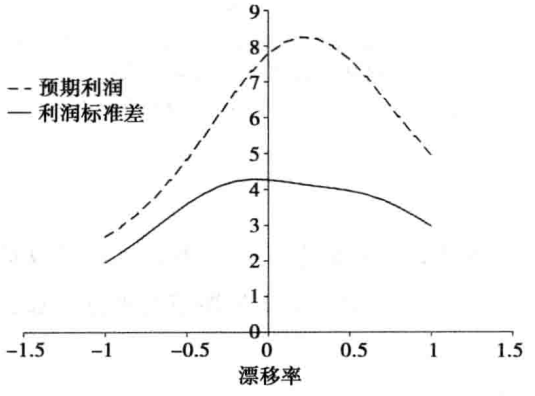


图 12-9 基于隐含波动率对冲的预期利润的标准差与漂移率 μ；$S=100$，$\sigma=0.4$，$r=0.05$，$D=0$，$T=1$，$E=110$，$T=1$，$\tilde{\sigma}=0.2$。（预期利润也在图中显示）

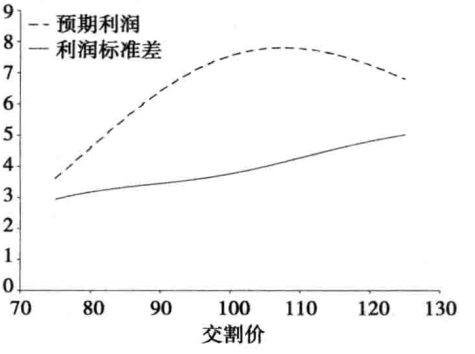


图 12-10 基于隐含波动率对冲的预期利润的标准差与交割价 E；$S=100$，$\sigma=0.4$，$r=0.05$，$D=0$，$\mu=0$，$T=1$，$\tilde{\sigma}=0.2$。（预期利润也在图中显示）

注意，这些描绘标准差与预期利润的图并没有通过期权成本进行比例化处理。

图 12-11 描绘的是除以成本之后的预期利润与除以成本之后的利润标准差的关系，并且同时考虑交割价和剩余期限的变动，参数设置为 $S=100$，$\sigma=0.4$，$r=0.05$，$D=0$，$\mu=0.1$，$\tilde{\sigma}=0.2$。在一定程度上，图 12-11 可以用经典的均值方差形式解读，具体可参考第 18 章。当然，最主要的批评是，我们使用的并不是正态分布，更关键的，不存在损失的可能。

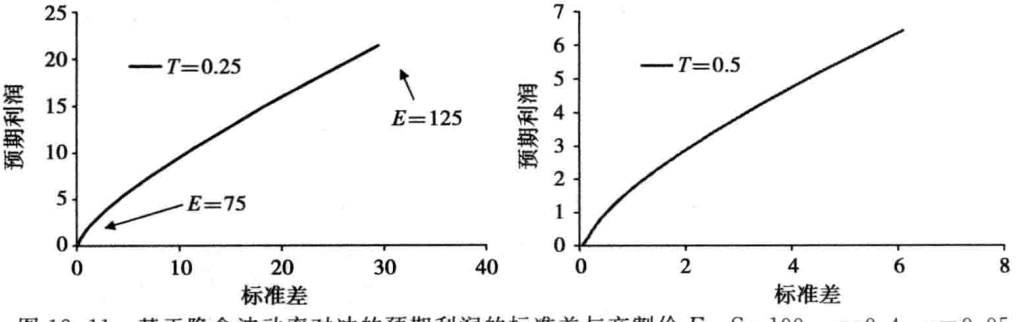


图 12-11 基于隐含波动率对冲的预期利润的标准差与交割价 E；$S=100$，$\sigma=0.4$，$r=0.05$，$D=0$，$\mu=0.1$，$\tilde{\sigma}=0.2$。四幅图分别具有不同的到期期限，自由变量是交割价

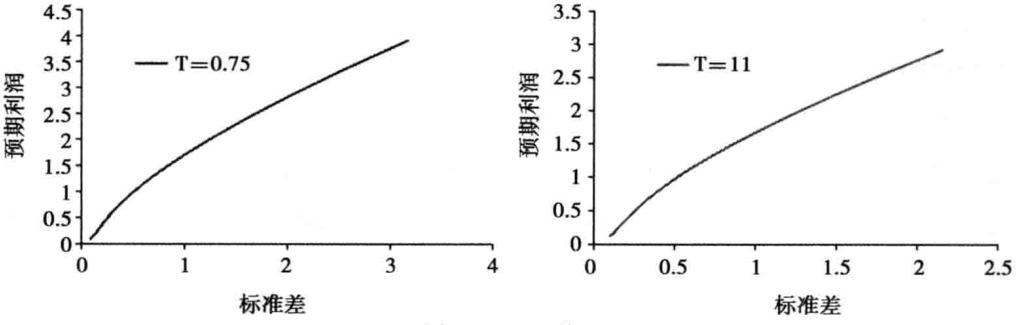


图 12-11　（续）

图 12-12 加入了标准差，完善了之前的偏度图形。

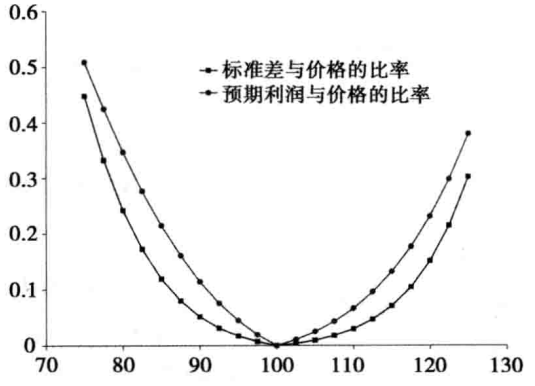


图 12-12　偏度产生的效果，标准差/价格和预期利润/价格与交割价 E；$S=100$，$\mu=0$，$\sigma=0.2$，$r=0.05$，$D=0$，$T=1$

12.5.3　用不同的波动率对冲

我们将简单地考虑一下用真实与隐含波动率之外的其他波动率进行对冲的情况。采用式（12-2）作为一般的利润表达式。

此时的预期利润和标准差必须反映 $V(S,t;\sigma_h)-V(S,t;\bar{\sigma})$，而如果用 σ_h 替换其中的 $\bar{\sigma}$，Gamma 的积分项可以与之前同样处理。结果体现在图 12-13 和图 12-14 中。

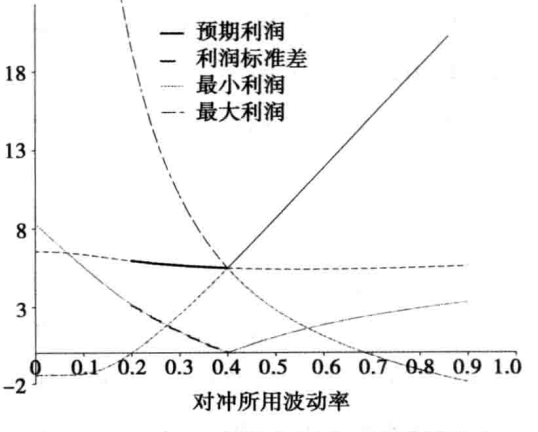


图 12-13　用多种波动率对冲时的预期利润和利润标准差。$E=90$，$S=100$，$\mu=-0.1$，$\sigma=0.4$，$r=0.1$，$D=0$，$T=1$，$\bar{\sigma}=0.2$

图 12-13 描绘的是用多种波动率对冲时的预期利润和利润标准差。从

粗线两端延伸出来的细虚线表示用隐含波动率至真实波动率范围之外的波动率对冲所获的预期利润。另外，该图也描绘了利润的标准差、最大值和最小值。参数分别为 $E=90$，$S=100$，$\mu=-0.1$，$\sigma=0.4$，$r=0.1$，$D=0$，$T=1$，$\tilde{\sigma}=0.2$。注意，如果用过低的波动率对冲，就可能有损失；但是如果用高波动率（只要不超过 70%）对冲就不会发生损失。这个例子中，预期利润随着对冲所用的波动率水平上升而下降。

图 12-14 显示的是相同数量的执行价格为 110 美元的期权。波动率的上边界（超过便可能蒙受损失的波动率临界水平）相对前例将略高。预期利润现在随着对冲所用波动率水平的增加而增加。

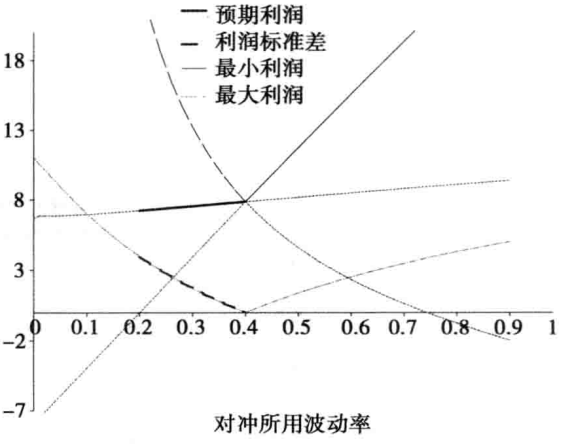


图 12-14 用多种波动率对冲时的预期利润和利润标准差。$E=110$，$S=100$，$\mu=-0.1$，$\sigma=0.4$，$r=0.1$，$D=0$，$T=1$，$\tilde{\sigma}=0.2$

实际操作中，对冲所用波动率的选择决策往往取决于投资者属于盯市还是盯模类型。投资者如果可以盯模，那么便不需关注盯市损益的日间波动，也就很自然地选择真实波动率进行对冲。从可能的预期总利润的角度看，这种模式一般来说接近最优，且最终利润不存在标准差。但是，一个非常普遍的要求是，必须对基于市场价值的损益提交报告。该约束可能被风险管理部门、经纪商或者是监视市场利润的投资者所强行施加。这样看来使用基于隐含波动率的对冲方法更加常见，以规避市场损益的日波动。

本章余下的部分将仅考虑基于隐含波动率的 Delta 对冲。

12.6 隐含波动率对冲时的利润

现在考察一个期权的组合，其中的期权具有不同的到期日和交割价。这是对之前分析的一个自然拓展。由于在使用隐含波动率对冲时只需要关注期权的 Gamma，所以具有同样 Gamma 的看涨看跌期权在对冲效果上是一样的。

资产组合的利润现在变成

$$\frac{1}{2}\sum_k q_k(\sigma^2-\tilde{\sigma}_k^2)\int_{t_0}^{T_k} e^{-r(s-t_0)}S^2\Gamma_k^i\,ds$$

其中 k 是期权的编号，而 q_k 是该期权的数量。引入变量 I 作为一个新的状态变量：

$$I = \frac{1}{2}\sum_k q_k(\sigma^2 - \tilde{\sigma}_k^2)\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-r(s-t_0)} S^2 \Gamma_k^i \,\mathrm{d}s \tag{12-4}$$

分析过程可以与之前一致。注意，由于我们持有数个不同的期权，可能存在不只一个到期日，式（12-4）中的 Γ_k^i 在相应的到期日之后的时间应该都取 0。

预期利润和利润方差等指标的偏微分方程算子如下：

$$\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} + \mu S \frac{\partial}{\partial S} + \frac{1}{2}\sum_k (\sigma^2 - \tilde{\sigma}_k^2)\mathrm{e}^{-r(t-t_0)} S^2 \Gamma_k^i \frac{\partial}{\partial I} = 0$$

并具有相应的终值条件。

12.6.1　预期利润

需要求解的预期利润的现值（$t=t_0$，$S=S_0$，$I=0$）十分简单，是各个期权的利润的加总：

$$\begin{aligned} &F(S_0, t_0) \\ &= \sum_k q_k \frac{E_k \mathrm{e}^{-r(T_k - t_0)}(\sigma^2 - \tilde{\sigma}_k^2)}{2\sqrt{2\pi}} \int_{t_0}^{T_k} \frac{1}{\sqrt{\sigma^2(s-t_0) + \tilde{\sigma}_k^2(T_k - s)}} \\ &\times \exp\left(- \frac{\left(\ln(S_0/E_k) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(s-t_0) + \left(r - D - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_k^2\right)(T_k - s)\right)^2}{2(\sigma^2(s-t_0) + \tilde{\sigma}_k^2(T_k - s))} \right) \mathrm{d}s \end{aligned}$$

推导过程见本章附录 12A。

12.6.2　利润的方差

相比起来，方差显然要复杂得多，这是由于资产组合的各个期权之间具有的相关关系。虽然如此，我们依然可以找到方差的初始状态的表达式 $G(S_0, t_0) - F(S_0, t_0)^2$，其中

$$G(S_0, t_0) = \sum_j \sum_k q_j q_k G_{jk}(S_0, t_0)$$

其中

$$\begin{aligned} &G_{jk}(S_0, t_0) \\ &= \frac{E_j E_k (\sigma^2 - \tilde{\sigma}_j^2)(\sigma^2 - \tilde{\sigma}_k^2)\mathrm{e}^{-r(T_j - t_0) - r(T_k - t_0)}}{4\pi\sigma\tilde{\sigma}_k} \int_{t_0}^{\min(T_j, T_k)} \int_s^{T_j} \\ &\times \frac{\mathrm{e}^{p(u,s;S_0,t_0)}}{\sqrt{s-t_0}\sqrt{T_k - s}\sqrt{\sigma^2(u-s) + \tilde{\sigma}_j^2(T_j - u)}\sqrt{\frac{1}{\sigma^2(s-t_0)} + \frac{1}{\tilde{\sigma}_k^2(T_k - s)} + \frac{1}{\sigma^2(u-s) + \tilde{\sigma}_j^2(T_j - u)}}} \mathrm{d}u\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{12-5}$$

其中

$$
\begin{aligned}
&P(u,s;S_0,t_0)\\
=&-\frac{1}{2}\frac{(\ln(S_0/E_k)+\bar{\mu}(s-t_0)+\bar{r}_k(T_k-s))^2}{\tilde{\sigma}_k^2(T_k-s)}-\frac{1}{2}\frac{(\ln(S_0/E_j)+\bar{\mu}(u-t_0)+\bar{r}_j(T_j-u))^2}{\sigma^2(u-s)+\tilde{\sigma}_j^2(T_j-u)}\\
&+\frac{1}{2}\frac{\left(\dfrac{\ln(S_0/E_k)+\bar{\mu}(s-t_0)+\bar{r}_k(T_k-s)}{\tilde{\sigma}_k^2(T_k-s)}+\dfrac{\ln(S_0/E_j)+\bar{\mu}(u-t_0)+\bar{r}_j(T_j-u)}{\sigma^2(u-s)+\tilde{\sigma}_j^2(T_j-u)}\right)^2}{\dfrac{1}{\sigma^2(s-t_0)}+\dfrac{1}{\tilde{\sigma}_k^2(T_k-s)}+\dfrac{1}{\sigma^2(u-s)+\tilde{\sigma}_j^2(T_j-u)}}
\end{aligned}
$$

而且

$$
\bar{\mu}=\mu-\frac{1}{2}\sigma^2,\bar{r}_j=r-D-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}_j^2 \quad 和 \quad \bar{r}_k=r-D-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}_k^2
$$

推导过程见本章附录 12A。

12.6.3 组合最优化

显然，在组合最优化领域，上述公式有很多用途。这里我们看一个例子。

股票目前的股价是 100，漂移率为 0，真实波动率为 20%，红利率为 0，利率为 5%。表 12-3 显示了所有可选的期权和相应的参数。注意，偏度是负的。虚值看跌期权都高估而虚值看涨期权都低估（“预期总利润”指标需要基于购买一单位该期权的假设）。

表 12-3 可选的期权

	A	B	C	D	E
种类	看跌	看跌	看涨	看涨	看涨
交割价	80	90	100	110	120
期限	1	1	1	1	1
隐含波动率	0.250	0.225	0.200	0.175	0.150
市场期权价格	1.511	3.012	10.451	5.054	1.660
期权理论价值	0.687	2.310	10.451	6.040	3.247
总预期利润	−0.933	−0.752	0.000	0.936	1.410

运用前文的公式，我们能找到可以最大化或最小化目标指标（预期利润、标准差、利润/标准差）的资产组合。此处只考虑一个简单的情况：限定标准差为 1 时的预期利润最大化。若要在面临监管者、经纪人或投资者施加的约束下通过波动率套利盈利，这会是一个十分自然的策略。结果在表 12-4 中显现。

图 12-15 绘出的是该组合的回报函数（期初做了 Delta 对冲）。这个最优化实际上是理想化的风险逆转交易。构建该资产组合要求花费 −0.46 美元，即期初是净收入。预期利润是 6.83 美元。

表 12-4　一个最优的资产组合

	A	B	C	D	E
种类	看跌	看跌	看涨	看涨	看涨
交割价	80	90	100	110	120
数量	−2.100	−2.250	0.000	1.460	1.280

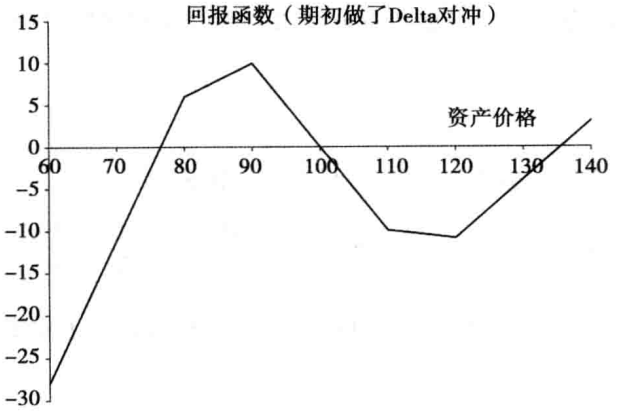


图 12-15　期初做了 Delta 对冲的期权组合的回报

12.7　隐含波动率随机情况下的对冲

可以论证，隐含波动率可变的说法是正确的。然而，若要论证实际波动率可变，则需更加高端的统计方法。让我们在下面的假设基础上重新进行与前文类似的分析过程。假设

$$\mathrm{d}\tilde{\sigma} = a\mathrm{d}t + b\mathrm{d}X_2$$

同时，S 的随机微分方程设定形式照旧并具有随机项 $\mathrm{d}X_1$，真实波动率为常数。$\mathrm{d}X_1$ 和 $\mathrm{d}X_2$ 具有相关性且相关系数为 ρ。可见 Carr & Verma（2005）。

12.7.1　案例 1：用真实波动率 σ 对冲

最终利润可被保证的性质将不会因引入了随机隐含波动率而受到影响。不过，如果隐含波动率水平达到了真实波动率水平，你就有机会提前结清头寸。

盯市利润现在变为

$$\frac{1}{2}(\sigma^2 - \tilde{\sigma}^2)S^2\Gamma^i\mathrm{d}t + (\Delta^i - \Delta^a)((\mu - r + D)S\mathrm{d}t + \sigma S\mathrm{d}X_1)$$

$$+\frac{\partial V^i}{\partial\tilde{\sigma}}\mathrm{d}\tilde{\sigma} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 V^i}{\partial\tilde{\sigma}^2}\mathrm{d}t + \rho\sigma bS\frac{\partial^2 V^i}{\partial S\,\partial\tilde{\sigma}}\mathrm{d}t$$

记住，V^i 是布莱克 - 斯科尔斯期权定价公式。

12.7.2 案例 2：用隐含波动率 $\tilde{\sigma}$ 对冲?

本小节的标题后有一个问号，其原因是，在随机隐含波动率的前提下利用隐含波动率对冲的行为是否具有意义尚未可知，所以我们将暂时使用待确定的“Δ”进行对冲。

盯市利润为

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}V^i-\Delta\mathrm{d}S-r(V^i-\Delta S)\mathrm{d}t-\Delta DS\mathrm{d}t\\&=\Theta^i\mathrm{d}t+\Delta^i\mathrm{d}S+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\Gamma^i\mathrm{d}t+\frac{\partial V^i}{\partial\tilde{\sigma}}\mathrm{d}\tilde{\sigma}+\frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2V^i}{\partial\tilde{\sigma}^2}\mathrm{d}t\\&+\rho\sigma bS\frac{\partial^2V^i}{\partial S\,\partial\tilde{\sigma}}\mathrm{d}t-\Delta\mathrm{d}S-r(V^i-\Delta S)\mathrm{d}t-\Delta DS\ \mathrm{d}t\end{aligned}$$

其方差为

$$b^2\left(\frac{\partial V^i}{\partial\tilde{\sigma}}\right)^2+\sigma^2S^2(\Delta^i-\Delta)^2+2\rho\sigma bS(\Delta^i-\Delta)\frac{\partial V^i}{\partial\tilde{\sigma}}+\cdots$$

（乘以 $\mathrm{d}t$）。方差将在选择如下 Δ 时最小化：

$$\Delta=\Delta^i+\frac{\rho b}{\sigma S}\frac{\partial V^i}{\partial\sigma}$$

这表明在盯市基础上最小化风险要求你必须用 Vega 调整 Delta。

如此选取 Delta 后，我们发现盯市利润包括一个确定项和一个随机项。随机项为

$$\left(-\frac{\rho b}{\sigma S}\mathrm{d}S+\mathrm{d}\tilde{\sigma}\right)\frac{\partial V^i}{\partial\tilde{\sigma}}$$

其具有标准差

$$b\sqrt{1-\rho^2}\frac{\partial V^i}{\partial\tilde{\sigma}}\mathrm{d}t^{1/2}$$

使用布莱克 - 斯科尔斯公式，确定项变为

$$\begin{aligned}&e^{-D(T-t)}\sqrt{T-t}SN'(d_1)\\&\times\left(\frac{1}{2}\frac{\sigma^2-\tilde{\sigma}^2}{\tilde{\sigma}(T-t)}-\frac{1}{2}b^2d_1\frac{\partial d_1}{\partial\tilde{\sigma}}+\rho b\sigma-\frac{\rho b\sigma d_1}{\tilde{\sigma}\sqrt{T-t}}+a+(r-\mu-D)\frac{\rho b}{\sigma}\right)\end{aligned}\tag{12-6}$$

（乘以 $\mathrm{d}t$）。

12.8　隐含波动率的特征

自然而然，现在到了讨论隐含波动率在实际操作中的特征的时候。

随着股票价格随机上行下降，我们经常观察到每个期权的隐含波动率也是变化的。这个规律与特定模型可能吻合也可能不吻合，与无套利可能一致也可能不一致。但更重要的是，如果我们认为市场错了，它对赚钱到底意味着什么？下面有几个“模型”可以体现隐含波动率将如何随着市场变化。

12.8.1　交割价黏性

该模型中，对每个期权（对应着每个交割价与到期期限）来说隐含波动率都是常数。每一个期权都生活在其专属的具有常数波动率的布莱克 - 斯科尔斯小世界中。这一特征在股票市场中显得十分常见。单单就利用隐含波动率与真实波动率的差异赚钱而言，本章的前半部分显然十分切题。

12.8.2　Delta 黏性

由于期权的 Delta 是其在值程度（S/E）的函数，Delta 黏性性质可以被称为在值程度黏性规则。这种性质在外汇市场比较常见，比较可能的原因是外汇市场对期权价格/波动率的报价通常是针对特定的 Delta 而非特定的交割价（理所当然的，在香草期权中这两者存在着一一对应的关系）。

在该模型中我们有

$$\tilde{\sigma} = g(S/E,t)$$

因此

$$\mathrm{d}\tilde{\sigma} = \left(\frac{\partial g}{\partial t} + \mu \frac{S}{E} \frac{\partial g}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{S^2}{E^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2}\right)\mathrm{d}t + \sigma \frac{S}{E} \frac{\partial g}{\partial \xi}\mathrm{d}X_1$$

其中 $\xi = S/E$。该表达式最关键的一点是其与 $\mathrm{d}S$ 完全相关，即 $\rho = 1$，所以（盯市情景下的）完美对冲是可能的。我们可以将 a 和 b 代入式（12-6）得到“日度”盯市利润。

该模型的一个变形是：将不同交割价的隐含波动率表达成平价波动率的倍数和在值程度的一个函数，如：

$$\tilde{\sigma} = \sigma_{ATM} g\left(\frac{\log(S/E)}{\sqrt{T-t}}\right)$$

具体细节可以参考 Natenberg（1994）。当然，这之后需要一个刻画平价波动率特征的模型。

12.8.3 周期性特征

还有一个更加令人感兴趣的特征：隐含波动率的周日历效应。图 12-16 至图 12-19 刻画了 VIX 波动率指数（用平价 SPX 隐含波动率度量，剩余期限总是调整成 30 天）随着不同的周日历以及到期期限而产生的不同。均值的变化与标准差均有体现。⊖

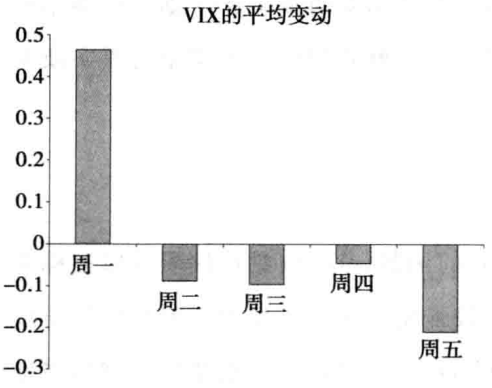


图 12-16 VIX 的平均变动与周内交易日

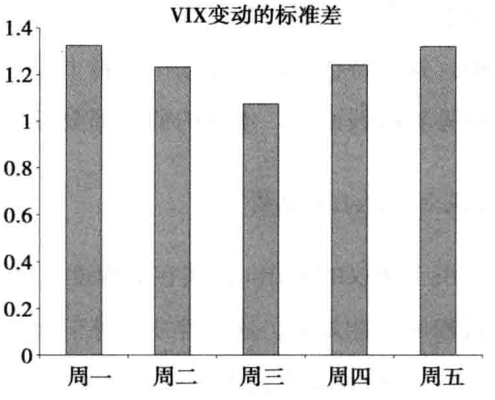


图 12-17 VIX 变动的标准差

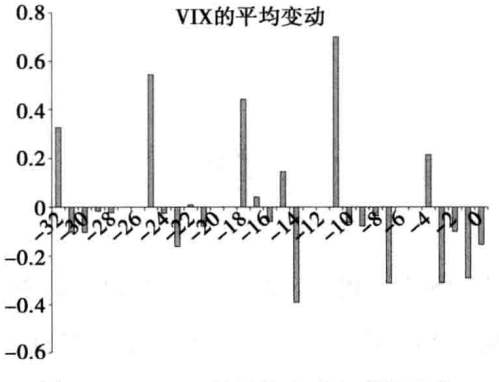


图 12-18 VIX 的平均变动与到期天数

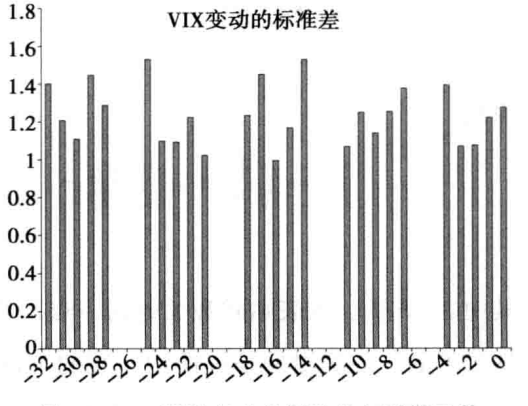


图 12-19 VIX 变动的标准差与到期天数

⊖ 毋庸置疑地，周末因素在波动率的计算中占有很重要的角色。周末期间有很多“潜在”波动率，比如大量的新闻在周末披露，而这些波动率将在周一开市时体现在对股票价格的影响。——译者注

12.9　总结

本章我们看到了一些脱离布莱克 - 斯科尔斯世界的小线索，甚至可能从期权中获利。

延伸阅读

- 关于交割价黏性和 Delta 黏性以及其他波动率模型，见 Derman（1999）。
- Natenberg 的书（Natenberg，1994）依然是波动率交易的经典文献。
- 若要进一步考察对冲所用波动率的选择问题，Carr（2005）对这方面的常见问题提供了很好的回答。同样，Henrard（2001）解释了真实漂移率所扮演的角色。
- Ahmad 和 Wilmott（2005）进一步深入讨论了运用不同波动率对冲的问题。

附录 12A 各结论的推导

初步结果

在之后的推导中，我们经常需要用到下面的简单结果。

首先

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{12-7}$$

然后，偏微分方程

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,\tau)$$

的解中，初值为 0 且在正负无穷时也取 0 值的解为

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\tau} \frac{f(x',\tau')}{\sqrt{\tau-\tau'}} e^{-(x-x')^2/4(\tau-\tau')} d\tau' dx' \tag{12-8}$$

最后，进行变量替换

$$x = \ln(S/E) + \frac{2}{\sigma^2}(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau$$

$$\tau = \frac{\sigma^2}{2}(T-t)$$

替换过程将

$$\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} + \mu S \frac{\partial}{\partial S}$$

变成

$$\frac{1}{2}\sigma^2 \left(-\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \tag{12-9}$$

预期利润，单期权

求解 $F(S, t)$ 的待求解方程为

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}+\mu S\frac{\partial F}{\partial S}+\frac{1}{2}(\sigma^2-\tilde{\sigma}^2)\mathrm{e}^{-r(t-t_0)}S^2\Gamma^i=0$$

其终值条件和边界条件为 0。运用前文的变量替换，该问题变为 $F(S,t)=\omega(x,\tau)$，其中

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}+\frac{E(\sigma^2-\tilde{\sigma}^2)\mathrm{e}^{-r(T-t_0)}\mathrm{e}^{-d_2^2/2}}{\sigma\tilde{\sigma}\sqrt{\pi\tau}}$$

其中

$$d_2=\frac{\sigma}{\tilde{\sigma}}\frac{x-\frac{2}{\sigma^2}(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)\tau+\frac{2}{\sigma^2}\left(r-D-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2\right)\tau}{\sqrt{2\tau}}$$

通过式（12-8）可以求得，该问题的解为

$$\frac{1}{2\pi}\frac{E(\sigma^2-\tilde{\sigma}^2)\mathrm{e}^{-r(T-t_0)}}{\sigma\tilde{\sigma}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\tau}\frac{1}{\sqrt{\tau'}}\frac{1}{\sqrt{\tau-\tau'}}$$

$$\times\exp\left(-\frac{(x-x')^2}{4(\tau-\tau')}-\frac{\sigma^2}{4\tilde{\sigma}^2\tau'}\left(x'-\frac{2}{\sigma^2}\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau'\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{2}{\sigma^2}\left(r-D-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}\right)\tau'\right)^2\right)\mathrm{d}\tau'\mathrm{d}x'$$

如果我们把指数解的形式写为

$$-a(x'+b)^2+c$$

将有解如下：

$$\frac{1}{2\pi}\frac{E(\sigma^2-\tilde{\sigma}^2)\mathrm{e}^{-r(T-t_0)}}{\sigma\tilde{\sigma}}\int_0^{\tau}\frac{1}{\sqrt{\tau'}}\frac{1}{\sqrt{\tau-\tau'}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-a(x'+b)^2+c)\mathrm{d}x'\mathrm{d}\tau'$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{E(\sigma^2-\tilde{\sigma}^2)\mathrm{e}^{-r(T-t_0)}}{\sigma\tilde{\sigma}}\int_0^{\tau}\frac{1}{\sqrt{\tau'}}\frac{1}{\sqrt{\tau-\tau'}}\frac{1}{\sqrt{a}}\exp(c)\mathrm{d}\tau'$$

容易得到

$$a=\frac{1}{4(\tau-\tau')}+\frac{\sigma^2}{4\tilde{\sigma}^2\tau'}$$

和

$$c=-\frac{\sigma^2}{4\tilde{\sigma}^2\tau'(\tau-\tau')}\frac{\left(x-\frac{2\tau'}{\sigma^2}\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2-r+D+\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2\right)\right)^2}{\frac{1}{\tau-\tau'}+\frac{\sigma^2}{\tilde{\sigma}^2\tau'}}$$

通过

$$s-t=\frac{2}{\sigma^2}\tau'$$

我们可以得到

$$c = -\frac{\left(\ln(S/E) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(s-t) + \left(r - D - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2\right)(T-s)\right)^2}{2(\sigma^2(s-t) + \tilde{\sigma}^2(T-s))}$$

这样可以得到初始($t=t_0$，$S=S_0$，$I=0$) 的预期利润如下：

$$\frac{E\mathrm{e}^{-r(T-t_0)(\sigma^2-\tilde{\sigma}^2)}}{2\sqrt{2\pi}}\int_{t_0}^{T}\frac{1}{\sqrt{\sigma^2(s-t_0)+\tilde{\sigma}^2(T-s)}}$$

$$\times\exp\left(-\frac{\left(\ln(S_0/E)+(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)(s-t_0)+(r-D-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2)(T-s)\right)^2}{2(\sigma^2(s-t_0)+\tilde{\sigma}^2(T-s))}\right)\mathrm{d}s$$

利润方差，单期权

平方利润的预期问题是

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 v}{\partial S^2} + \mu S\frac{\partial v}{\partial S} + \frac{1}{2}(\sigma^2-\tilde{\sigma}^2)\mathrm{e}^{-r(t-t_0)}S^2\Gamma^i\frac{\partial v}{\partial I} = 0 \quad (12\text{-}10)$$

同时有

$$v(S,I,T) = I^2$$

它存在一个具有如下形式的解：

$$v(S,I,t) = I^2 + 2I\,H(S,t) + G(S,t)$$

将它代入式 (12-10) 将得到以下关于 H 和 G 的等式（两者均具有 0 的终值条件和边界条件)：

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 H}{\partial S^2} + \mu S\frac{\partial H}{\partial S} + \frac{1}{2}(\sigma^2-\tilde{\sigma}^2)\mathrm{e}^{-r(t-t_0)}S^2\Gamma^i = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 G}{\partial S^2} + \mu S\frac{\partial G}{\partial S} + (\sigma^2-\tilde{\sigma}^2)\mathrm{e}^{-r(t-t_0)}S^2\Gamma^i H = 0$$

将 H 的表达式与之前的 F 比较，发现

$$H = F = \frac{E\mathrm{e}^{-r(T-t_0)}(\sigma^2-\tilde{\sigma}^2)}{2\sqrt{2\pi}}\int_{t}^{T}\frac{1}{\sqrt{\sigma^2(s-t)+\tilde{\sigma}^2(T-s)}}$$

$$\times\exp\left(-\frac{\left(\ln(S/E)+\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(s-t)+\left(r-D-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2\right)(T-s)\right)^2}{2(\sigma^2(s-t)+\tilde{\sigma}^2(T-s))}\right)\mathrm{d}s$$

注意，该表达式在 $t=t_0$ 处表示现值，所以前面有 $\mathrm{e}^{-r(T-t_0)}$ 这一项。等式中剩下的项必须以变量 S 和 t 的形式保留。

回到变量 x 和 τ，$G(S,t)=\omega(x,\tau)$ 的微分方程等式是

$$\frac{\partial w}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{2}{\sigma^2}\frac{E\sigma(\sigma^2-\tilde{\sigma}^2)\mathrm{e}^{-r(T-t_0)}\mathrm{e}^{-d_2^2/2}}{4\tilde{\sigma}\sqrt{\pi\tau}}$$

$$\times\frac{E(\sigma^2-\tilde{\sigma}^2)\mathrm{e}^{-r(T-t_0)}}{2\sigma\tilde{\sigma}\sqrt{\pi}}\int_0^{\tau}\frac{1}{\sqrt{\tau'}}\frac{1}{\sqrt{\tau-\tau'}}\frac{1}{\sqrt{a}}\exp(c)\mathrm{d}\tau' \qquad (12\text{-}11)$$

其中

$$d_2=\frac{\sigma}{\tilde{\sigma}}\frac{x-\frac{2}{\sigma^2}\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2+r-D-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2\right)\tau}{\sqrt{2\tau}}$$

且 a 和 c 与上文一致。

微分方程的解为

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{2}{\sigma^2}\frac{E\sigma(\sigma^2-\tilde{\sigma}^2)\mathrm{e}^{-r(T-t_0)}}{4\tilde{\sigma}\sqrt{\pi}}\frac{E(\sigma^2-\tilde{\sigma}^2)\mathrm{e}^{-r(T-t_0)}}{2\sigma\tilde{\sigma}\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\tau}\frac{f(x',\tau')\mathrm{e}^{-d_2^2/2}}{\sqrt{\tau-\tau'}}$$

$$\times\mathrm{e}^{-(x-x')^2/4(\tau-\tau')}\mathrm{d}\tau'\mathrm{d}x'$$

其中

$$f(x',\tau')=\frac{1}{\sqrt{\tau'}}\int_0^{\tau'}\frac{1}{\sqrt{\tau''}}\frac{1}{\sqrt{\tau'-\tau''}}\frac{1}{\sqrt{a}}\exp(c)\mathrm{d}\tau''$$

且在 a 和 c 中所有的 τ 变成 τ'，而 τ' 变成 τ''；在 d_2 中所有的 τ 变成 τ'，而 x 变成 x'。

积分号之前的系数项可以简化为

$$\frac{1}{8\pi^{3/2}}\frac{E^2(\sigma^2-\tilde{\sigma}^2)^2\mathrm{e}^{-2r(T-t_0)}}{\sigma^2\tilde{\sigma}^2}$$

积分项的形式为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\tau}\int_0^{\tau'}\cdots\mathrm{d}\tau''\mathrm{d}\tau'\mathrm{d}x'$$

其中被积函数应该是一个代数项

$$\frac{1}{\sqrt{\tau'}\sqrt{\tau''}\sqrt{\tau-\tau'}\sqrt{\tau'-\tau''}\sqrt{a}}$$

和一个指数项

$$\exp\left(-\frac{1}{2}d_2^2-\frac{(x-x')^2}{4(\tau-\tau')}+c\right)$$

的积。

这个指数项的完整形式为

$$-\frac{1}{4\tau'}\frac{\sigma^2}{\tilde{\sigma}^2}\left(x'-\frac{2}{\sigma^2}\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau'+\frac{2}{\sigma^2}\left(r-D-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2\right)\tau'\right)^2-\frac{(x-x')^2}{4(\tau-\tau')}$$

$$-\frac{\sigma^2}{4\tilde{\sigma}^2\tau''(\tau'-\tau'')}\frac{\left(x'-\frac{2\tau''}{\sigma^2}\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2-r+D+\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2\right)\right)^2}{\frac{1}{\tau'-\tau''}+\frac{\sigma^2}{\tilde{\sigma}^2\tau''}}$$

可以被写成如下形式

$$-\mathrm{d}(x'+f)^2+g$$

其中

$$\mathrm{d}=\frac{1}{4}\frac{\sigma^2}{\tilde{\sigma}^2}\frac{1}{\tau'}+\frac{1}{4}\frac{1}{\tau-\tau'}+\frac{1}{4}\frac{\sigma^2}{\sigma^2(\tau'-\tau'')+\tilde{\sigma}^2\tau''}$$

且

$$g=-\frac{\sigma^2}{4\tilde{\sigma}^2\tau'}\left(x-\frac{2\alpha\tau'}{\sigma^2}\right)^2-\frac{\sigma^2}{4(\sigma^2(\tau'-\tau'')+\tilde{\sigma}^2\tau'')}\left(x-\frac{2\alpha\tau''}{\sigma^2}\right)^2$$
$$+\frac{1}{4}\frac{\left(\frac{\sigma^2}{\tilde{\sigma}^2\tau'}\left(x-\frac{2\alpha\tau'}{\sigma^2}\right)+\frac{\sigma^2}{(\sigma^2(\tau'-\tau'')+\tilde{\sigma}^2\tau'')}\left(x-\frac{2\alpha\tau''}{\sigma^2}\right)\right)^2}{\frac{\sigma^2}{\tilde{\sigma}^2}\frac{1}{\tau'}+\frac{1}{\tau-\tau'}+\frac{\sigma^2}{\sigma^2(\tau'-\tau'')+\tilde{\sigma}^2\tau''}}$$

其中

$$\alpha=\mu-\frac{1}{2}\sigma^2-r+D+\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2$$

运用式（12-7）最终得到

$$\frac{1}{4\pi^{3/2}}\frac{E^2(\sigma^2-\tilde{\sigma}^2)^2\mathrm{e}^{-2r(T-t_0)}}{\sigma^2\tilde{\sigma}^2}$$

$$\int_0^{\tau}\int_0^{\tau'}\frac{1}{\sqrt{\tau'}\sqrt{\tau''}\sqrt{\tau-\tau'}\sqrt{\tau'-\tau''}\sqrt{a}}\sqrt{\frac{\pi}{d}}\exp(g)\mathrm{d}\tau''\mathrm{d}\tau'$$

进行变量替换

$$\tau=\frac{\sigma^2}{2}(T-t),\tau'=\frac{\sigma^2}{2}(T-s)\text{ 和 }\tau''=\frac{\sigma^2}{2}(T-u)$$

并在 $S=S_0$、$t=t_0$ 处取值，我们可以得到所需的关于利润方差的结论。

利润方差，期权组合

分析组合的方差所需要的操作与计算同单个合约的类似，同样存在如下形式的解：

$$v(S,I,t)=I^2+2I\,H(S,t)+G(S,t)$$

主要的差别在于我们必须同时考虑两个隐含波动率 $\tilde{\sigma}_j$ 和 $\tilde{\sigma}_k$，与两个到期期限 T_j

和 T_k。我们将发现方差的解将是许多项进行求和的形式，其中每一项都满足其源项形式为式（12-11）的扩散方程。角标 k 与 Gamma 相联系，所以出现在类似式（12-11）的积分项的外面；角标 j 与积分相联系，所以出现在式中的积分项。

在推导过程中和考虑到期期限时我们还面临一个很微妙的问题：必须考虑 $T_j \neq T_k$ 的一般情况。式（12-5）中的积分项只能积分到期权到期。最简单的处理方法是依照惯例令到期日之后的 Gamma 取 0。这样 s 的积分域就是 t_0 到 $\min(T_i, T_k)$。

第 13 章

固定收益产品和分析：收益率、久期和凸性

本章内容

- 基础和最重要的固定收益产品的名称和性质
- 固定收益产品常见特征的定义
- 分析固定收益工具市场价值的简单方法：收益率、久期和凸性
- 如何构建收益率曲线和远期利率

13.1 引言

本章是对固定收益市场一些基本工具和概念的简单介绍。固定收益市场是现金流的市场，在最简单的情形下这些现金流与股票或商品等金融产品的价格无关。在本章中我将描述附息债券这一最基础的固定收益工具，并介绍如何确定这类债券的各种性质以便进一步分析。

本章内容自成一体，不需要用到任何前面章节的知识，大部分内容也不是阅读后续章节所必备的。这是因为本章要描述的概念和技术虽然在实际应用中广为人知且效果显著，但其框架很难拓展成一个可以用于分析更复杂产品的完整一致的理论。对于那些一致的理论框架我们会用本系列书的整个第三部分来讨论。

13.2　简单固定收益合约和特征

13.2.1　零息票债券

零息票债券（zero-coupon bond）是在未来某给定**到期日**（maturity date）T 支付已知固定数量的**本金**（principal）的合约。例如，图 13-1 显示的是一个 10 年后支付 100 美元的债券。由于可以按比例调整回报的规模，所以今后我们将所有的本金设定为 1 美元。

这种对未来财富的承诺在当前就应该是有价值的：其价格不能为零或者负值。另外，除非是在特别极端的情形下，在初始时刻支付的金额应该比到期时收到的金额要少一点。

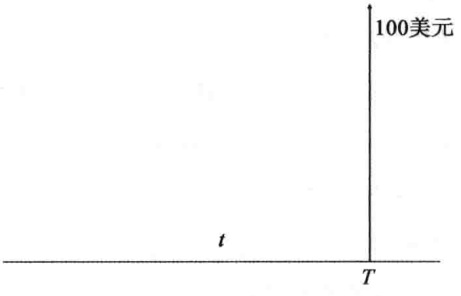


图 13-1　零息票债券

在第 1 章中我们已经讨论过货币的时间价值，本章的内容显然是与之相关的。稍后我们会讨论这一点。

13.2.2　附息债券

附息债券（coupon-bearing bond）与上面的零息票债券类似，但除了到期支付本金以外，它还会定期支付少量的息票一直到到期日（包括到期日）为止（见图 13-2）。

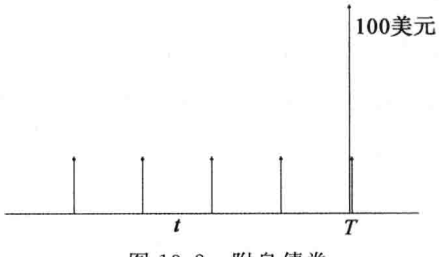


图 13-2　附息债券

息票通常被预设为本金的一定比例。举例来说，一个本金 1 美元的 10 年期附息债券每 6 个月支付本金的 2%，即 2 美分，我们称该债券有 4%的息票率。该债券显然比前面提到的零息票债券要值钱，因为除了本金外还会支付息票。我们可以将附息债券看成零息票债券的组合，组合中包含了若干个到期日为每个付息日、本金为该次息票金额的零息票债券，还包含了一个到期日与附息债券到期日相同的零息票债券。

13.2.3　货币市场账户

任何拥有银行活期账户的人相当于有了一个**货币市场账户**（money market

account)。该账户的金额按照一个时变的利率获得复利，该利率通常是短期且不可预知的。因为货币市场账户金额累积的利率是不可预知的，所以该账户与一年期零息票债券相比是有风险的。但从另一方面来看，货币市场账户中的钱可以随时足额提取，而债券在到期前在市场上出售的价格是不确定的。

13.2.4 浮动利率债券

最简单的**浮动利率债券**（floating interest rate）就是你的银行活期账户中的存款金额（见图 13-3）。金额随时间变化，反映了经济的状况，也跟其他银行争夺你这笔业务的压力有关。这种利率的不确定性被存款的灵活性所补偿，你在任何时候都可以拿回这笔钱。

最常见的活期利率是**伦敦银行间拆放利率**（London Interbank Offer Rate，LIBOR）。LIBOR 是欧洲货币银行对相互之间的固定期限存款利率的报价，包括 1 个月、3 个月、6 个月等多种期限。

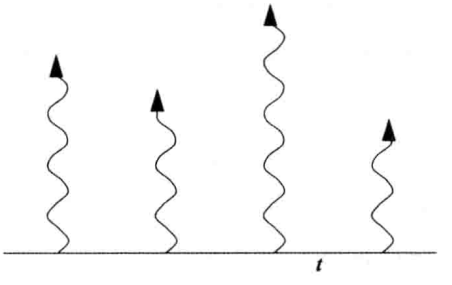


图 13-3 浮动利率债券

有时候债券支付息票的金额不是事先约定的美元数量，而是取决于某些“指数”在息票支付日或某一较早时刻的水平。通常来说，在债券合约开始时，这些“指数”在支付息票时的水平是不知道的。我们在稍后的章节中会看到关于此类债券的例子。

13.2.5 远期利率协议

远期利率协议（Forward Rate Agreement，FRA）是指交易双方约定，针对某个事先确定的本金数额，在未来某段特定的期间内应用某个事先确定的利率。该合约的现金流安排如下：在 T_1 时刻 A 方付给 B 方本金，在某个 T_2 时刻（$T_2 > T_1$）B 方支付 A 方本金加上约定的利息。该现金流交换在合约签署时的价值往往不为零，所以在一开始就得有一方付给另一方现金。

13.2.6 回购

回购（repo）是一种购回协议。该协议约定一方将某证券卖给另一方，并

在固定日期以固定金额将证券买回。买回证券的价格要高于一开始卖出的价格，其中的差额就隐含了这段期间的利率即**回购利率**（repo rate）。最常见的回购是隔夜回购，合约是每天协商的。如果回购协议的期限延长到 30 天就称为**定期回购**（term repo）。

逆回购（reverse repo）是以约定的利率借入某证券一段时间。

回购可以用于锁定未来的利率。例如，可以在今天买入一份 6 个月期美国国债并用它进行 3 个月的回购。这样操作在今天是不产生现金流的，因为买入债券（负现金流）后又进行了回购（等量的正现金流）。3 个月后你必须以约定的价格买回该国债，这时你会有一笔负的现金流；6 个月后你将获得债券的本金，一个正的现金流。3 个月后拿出现金，6 个月后获得现金，要使得无套利成立，这当中的等价利率应该等于当前市场上期限为 3～6 个月的远期利率。

13.2.7　息票剥离债券

息票剥离债券（STRIPS）是“证券的登记利率和本金分开交易”的简称。将普通债券的息票和本金拆开，可以创造出市场上本不存在的期限更长的人造零息票债券。

13.2.8　分期偿还

在前面所有产品中我都假设本金的数额是固定不变的。有时候情况并不是这样，本金可能会被**分期偿还**（amortize）或者说在合约期内是逐渐变小的。这样就相当于本金被分步偿还了，而利息是按照剩余的本金数量计算的。这种分期付款在协议开始时就被规划好了。有时被设定为固定值，所以本金减少的速度是事先知晓的；有时被设定为依赖于某种指数的水平，比如说目标指数比较高的时候本金减少的速度就会更快。在第 32 章我们会看到分期偿还结构的复杂的示例。

13.2.9　赎回条款

有些债券会附带**赎回条款**（call provision）。这意味着发行者可以在某些日期或时段以事先规定的价格将债券赎回，该价格可能是时变的。该条款降低了债券

的价值，我们将在第 30 章从数学上讨论其影响。

13.3 国际债券市场

13.3.1 美国

在美国，期限低于 1 年的政府债券称为**国库券**（bills），通常都是零息票债券。期限 2～10 年的称为**中期债券**（notes）。中期债券是附息的，半年付一次息票。期限在 10 年以上的称为**国债**（bonds），国债也是附息的。在本书中将这些都称为“国债”（bonds），仅对是否具有息票进行具体说明。

在美国的外国债券市场交易的非美国机构发行的债券称为**扬基债券**（Yankee bond）。

从 1997 年开始美国政府也发行与通货膨胀率挂钩的债券。

13.3.2 英国

英国政府发行的债券称为**金边债券**（gilts）。其中的一些债券是可赎回的；还有一些是不兑现的，这意味着它们是永续债券，只支付息票不偿还本金。英国政府还发行了一些可转债，可以转换成其他债券（通常是更长期限的）。最后还有指数连结债券，息票和本金取决于零售价格指数等通货膨胀的衡量指标。

13.3.3 日本

日本政府债券（Japanese Government Bonds，JGBs）分为短期国库券、中期债、长期债（10 年期）和超长期债（20 年期）。长期和超长期债券 6 个月付一次息，短期债券不附息，中期债券可能是附息债券或零息债券。

日元计价的非日本机构发行的债券称为**武士债券**（Samurai bonds）。

13.4 应计利息

报纸上报的债券市场价格都是**净价**（clean prices），也就是说报价中是不包括**应计利息**（accrued interest）的。应计利息指的是上次付息到报价为止累积的利息，计算公式为：

$$\text{应计利息} = \text{整个时段的利息} \times \frac{\text{上次付息至今的天数}}{\text{两次息票支付之间的天数}}$$

实际支付的价格称为**全价**（dirty price），是报的净价和应计利息之和。

13.5　天数计算惯例

由于有计算息票日之间的应计利息这样的问题，我们很自然会问如何计算更短时间的应计利息。两个任意日期之间的应计利息按如下公式计算：

$$\frac{\text{两个日期之间的天数}}{\text{参考时段的天数}} \times \text{参考时段的利息}$$

上述表达式中的“天数”有三种主要的计算方法：

- **实际/实际**：按日历天数计算天数。
- **30/360**：假设每个月有 30 天，每年有 360 天进行计算。
- **实际/360**：每月天数按实际计算，但假设每年天数为 360 天。

13.6　连续复利和离散复利

为了比较不同的固定收益产品，我们必须确定采用的计息方式惯例。目前为止，我们采用的都是连续复利计息方式，也就是说在未来 T 时刻支付的 1 美元的现值为

$$e^{-rT} \times 1$$

其中 r 为设定的利率水平。我们已经展示了如何使用银行账户中的现金或者说货币市场账户的方程

$$dM = rM\ dt$$

推导上述现值公式。期权市场采用的是这种计息方式。

另一种常见的计息方式的现值公式为

$$\frac{1}{(1+r')^T} \times 1$$

其中 r' 为设定的利率水平。该式表达的是离散复利计息方式，即假设利息在 T 年中逐年累计。要推导该公式可以先计算单期支付的现值，再将各期的现值公式相乘。该公式通常用于附息债券等简单的固定收益工具中。当

$$r = \log(1+r')$$

时两个公式是等价的。上式给出了连续复利 r 和离散复利 r' 的关系。如果每年计两次利息，计算离散复合利率的公式应该如何表达呢？

本书一般使用利率的连续复利定义。

13.7 收益率衡量

由于固定收益产品为数众多，各有不同的息票结构、分期偿还结构、固定或浮动利率，所以有必要找到一种比较不同产品的一致的指标。假设你要在一个 10 年期零息票债券和一个 20 年期附息票债券之间进行选择，前者在 10 年中没有收入但到期会得到一大笔总额，后者会陆续得到一笔笔小额收入但最终的那一大笔总额需要等长得多的时间。

一种比较方法是衡量每种合约的回报。衡量指标有几种，都称为**收益率**(yield)。

13.7.1 当前收益率

衡量合约回报的最简单的指标是**当前收益率**（current yield)。定义式如下

$$\text{当前收益率} = \frac{\text{实际息票收入}}{\text{债券价格}}$$

举例说明，考虑每 6 个月支付 2 美分到期日支付 1 美元的 10 年期债券。该债券每年的收益为 4 美分。假设债券的市场报价为 88 美分，当前收益率为

$$\frac{0.04}{0.88} \times 100\% = 4.5\%$$

用该指标衡量债券收益率时不能反映到期本金支付，或息票用于再投资的价值，也未考虑到期前出售债券的资本利得和损失。这是一个相对简单的指标，关注于债券的短期性质。

13.7.2 到期收益率或内部回报率

假设某零息票债券 T 时刻到期并支付 1 美元，在 t 时刻其价值为 $Z(t;\ T)$。如果在 t 到 T 时段应用常数回报率 y，那么 T 时刻的 1 美元在 t 时刻的现值为

$$Z(t;T) = \mathrm{e}^{-y(T-t)}$$

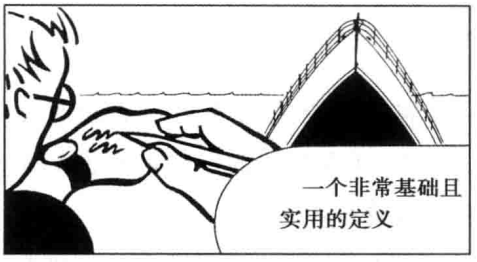
易得

$$y = -\frac{\log Z}{T-t}$$

我们将上式推广至附息债券。将所有息票和本金用同样的利率 y 贴现到当前，那么债券 t 时刻的现值为

$$V=Pe^{-y(T-t)}+\sum_{i=1}^{N}C_i e^{-y(t_i-t)} \qquad (13-1)$$

其中 P 为本金，N 为息票次数，C_i 为 t_i 时刻的息票。



如果该债券为可交易证券，那么我们可以知道购买债券需要支付的价格。此时我们可以计算**到期收益率**（yield to maturity，YTM）或**内部回报率**（internal rate of return，IRR），即选择公式（13-1）中的 y 来使得 V 等于债券的交易价格。这个选择的过程是一个试错和迭代的过程。举例说明，表 13-1 中的债券本金为 1 美元，期限为 5 年，息票为每 6 个月 3 美分（3%）。

表 13-1　附息债券的例子

时　间	息　票	本金返还	现值（以 6.840 6%折现）
0			0
0.5	0.03		0.0290
1.0	0.03		0.0280
1.5	0.03		0.0270
2.0	0.03		0.0262
2.5	0.03		0.0253
3.0	0.03		0.0244
3.5	0.03		0.0236
4.0	0.03		0.0228
4.5	0.03		0.0220
5.0	0.03	1.00	0.7316
		合计	0.9600

假设该债券的市场价格为 96 美分。请问“应该使用何种内部回报率使得该债券的所有现金流的现值之和为 96 美分”？这个值就是到期收益率。表中的第 4 列是使用 6.8406%作为贴现率计算的现金流的现值（PV），因为这样计算出来的现值之和为 96 美分，所以 YTM 或者 IRR 就是 6.8406%。

如果我们打算持有该债券至到期，那么到期收益率就是一个合理的收益率衡量指标。

要计算债券组合的到期收益率，我们只要将其看作单个债券，处理这些债券

的所有现金流并将所有成分债券的市场价格相加。

13.8 收益率曲线

描述到期收益率对到期时间关系的曲线被称为到期**收益率曲线**（yield curve）。我们暂时假设该曲线是从零息票债券中计算得到的，而这些债券由最具信用的发行者发行。

如果使用有息票的债券，到期收益率曲线的计算过程将更为复杂。此处更好的选择是使用下面要介绍的“远期利率曲线”来衡量未来某段时间的利率。图 13-4展示了美国国债在 1999 年 9 月 9 日的收益率曲线。

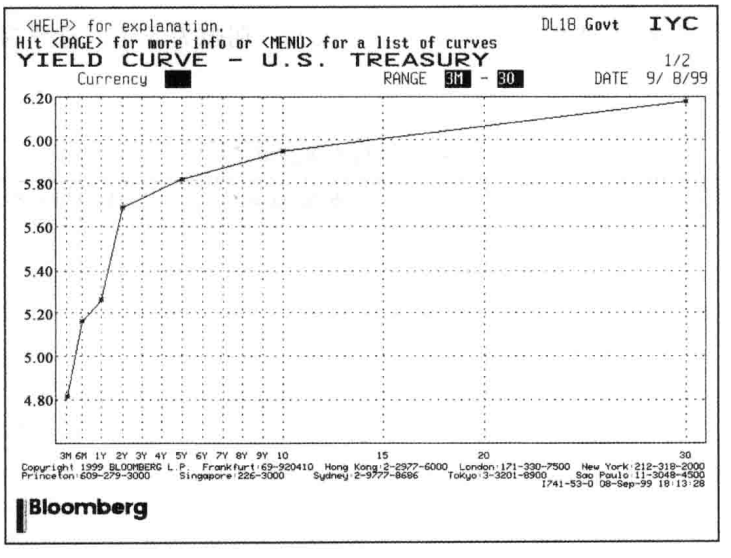


图 13-4 美国国债收益率曲线

资料来源：Bloomberg L. P.

13.9 价格/收益率关系

从式（13-1）我们可以很容易看到债券价格与其收益率的关系，如图 13-5 显示的那样（假设现金流都是正的）。图中标注了当前市场价格和当前到期收益率。

鉴于通常我们最感兴趣的是金融工具对某些标的因子的敏感度，一个很自然的

问题是债券价格如何随收益率变化而变化，或者反过来，债券价格变化时收益率如何变化。作为一阶近似，这种变化可以由被称为久期的测度进行量化。

图 13-6 显示了某 5 年期美国国债的价格/收益率关系。

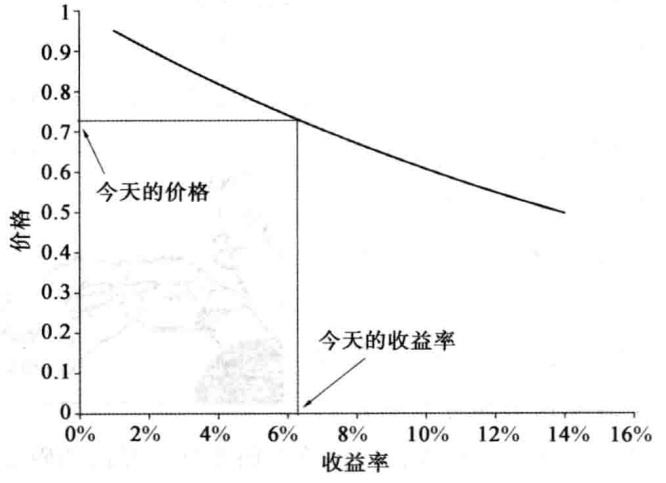


图 13-5　价格/收益率关系

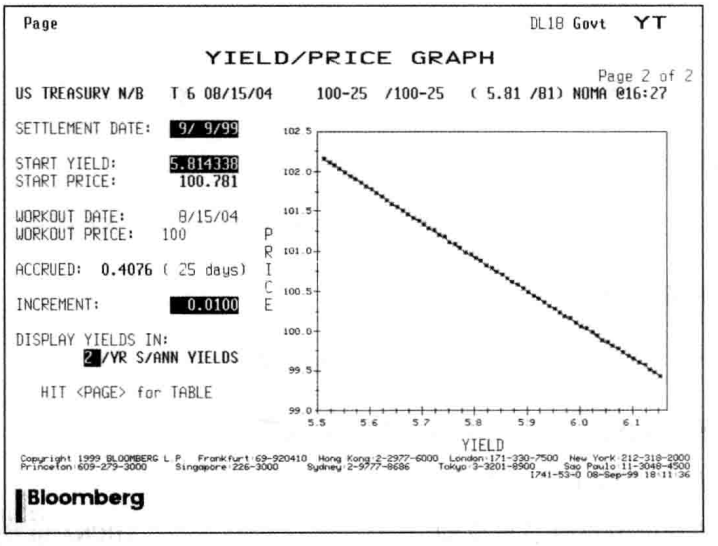


图 13-6　彭博资讯的价格/收益率图

资料来源：Bloomberg L. P.

13.10　久期

从式（13-1）我们可以推导出

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y} = -(T-t)P\mathrm{e}^{-y(T-t)} - \sum_{i=1}^{N} C_i(t_i - t)\mathrm{e}^{-y(t_i-t)}$$

这是价格/收益率曲线的斜率。而表达式

$$-\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}$$

被称为**麦考利久期**（Macaulay duration）。（**修正久期**（modified duration）的表达式与之类似，但使用的是离散复利。）在久期的表达式中用息票的现值对支付息票的时间进行了加权。息票的现值越高，其对久期的贡献率就越高。而且，因为 y 是按单位时间计算的，久期的单位就是时间。久期是对债券平均寿命的衡量。容易验证零息票债券的麦考利久期与久期是相等的。

我们来看一下平均时间的含义。假设有人问：什么样的零息票债券与给定的（附息）债券等价？或者说可以保证“等价”的零息债券的期限是多少？我们假设有一个与该债券价格相等、收益率相同的未知期限的零息票债券（数量也是未知的）：

$$V = P\mathrm{e}^{-y(T-t)} + \sum_{i=1}^{N} C_i \mathrm{e}^{-y(t_i-t)} = X\mathrm{e}^{-y(\overline{T}-t)}$$

两边对 y 求导：

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y} = -(T-t)P\mathrm{e}^{-y(T-t)} - \sum_{i=1}^{N} C_i(t_i-t)\mathrm{e}^{-y(t_i-t)} = -X(\overline{T}-t)\mathrm{e}^{-y(\overline{T}-t)}$$

最后两边同时除以 $-V$：

$$-\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y} = \cdots = \overline{T}-t$$

于是我们得到了该债券的平均寿命，即有效久期。

对于收益率的微小变动而言，久期是衡量债券价值对收益率变动敏感程度的很好的指标。图 13-7 是一个例子。观察标识为“CPU”的债券。该债券的息票率为 4.75%，每年支付两次，在 1998 年 6 月到 2000 年 6 月之间可赎回。我们将具有相同或相似久期

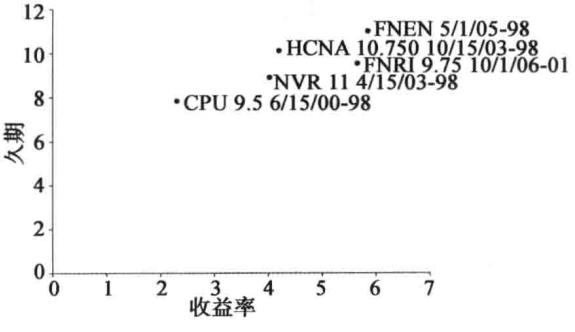


图 13-7 收益率和久期，衡量债券的相对价值

的工具画到一个图中来比较它们的收益率。考虑两个具有相同久期的债券，其中一个收益率更高，这往往意味着高收益率的债券时间价值更高，或者有信用风险的问题。但是，据此做出这种对相对价值的判断需要十分小心。很有可能两个具有相同久期的债券具有差异很大的现金流结构，比如说一个是 30 年到期的债券但是平均寿命即久期是 7 年，另一个是 7 年期的零息票债券。很明显，前者比后者要多 23 年的风险。

13.11　凸性

V 的泰勒展开式为

$$\frac{\mathrm{d}V}{V}=\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\delta y+\frac{1}{2V}\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}y^2}(\delta y)^2+\cdots$$

其中 δy 为收益率的变化。对于收益率的微小变化，其引起的债券价格的变化可以用久期来衡量。对于更大的收益率变化，我们还要考虑价格/收益率关系的曲度。

美元凸性（dollar convexity）的定义为

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}y^2}=(T-t)^2P\mathrm{e}^{-y(T-t)}+\sum_{i=1}^{N}C_i(t_i-t)^2\mathrm{e}^{-y(t_i-t)}$$

而**凸性**（convexity）的定义为

$$\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}y^2}$$

要了解如何使用该式，观察一下图 13-8。

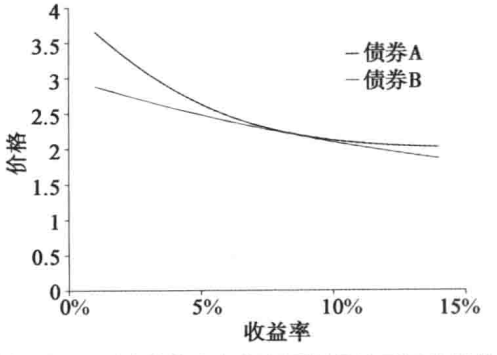


图 13-8　两个价格和久期相同但凸性不同的债券

从图 13-8 中我们可以看到两个具有相同价格和久期的债券其收益率在 8%附近时的价格/收益率关系，它们的凸性不同。债券 A 的凸性要大于债券 B。图形显示债券 A 要优于债券 B，因为收益率的微小变动会使得 A 的价格变得更高。等我们建立了关于随机利率下债券定价的一般理论后会看到无套利原理引出的收益率、久期和凸性的关系，本质上与布莱克-斯科尔斯方程没有区别。

债券到期收益率、久期和凸性的计算如图 13-9所示，灰色区域为输入变量。

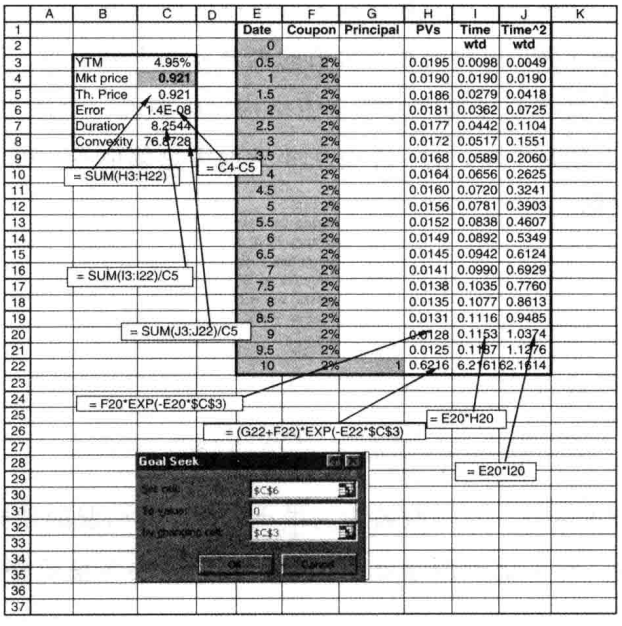


图 13-9 收益率、久期和凸性计算的电子数据表

13.12 例子

图 13-10 是彭博资讯的收益率分析截屏，其计算了某美国国库券的收益率、久期和凸性。图 13-11 和图 13-12 分别显示了价格和收益的时间序列。

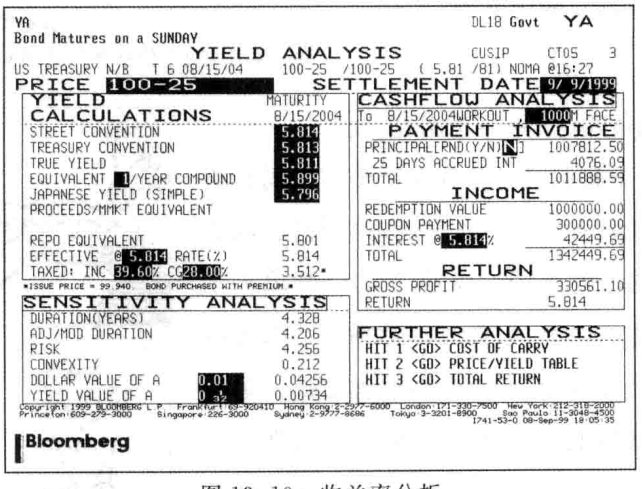


图 13-10 收益率分析

资料来源：Bloomberg L. P.

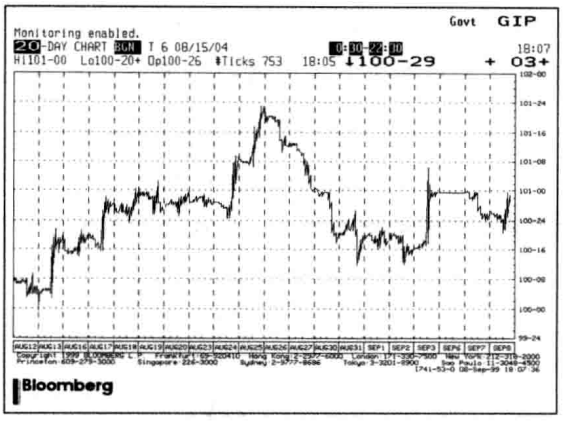


图 13-11　价格时间序列

资料来源：Bloomberg L. P.

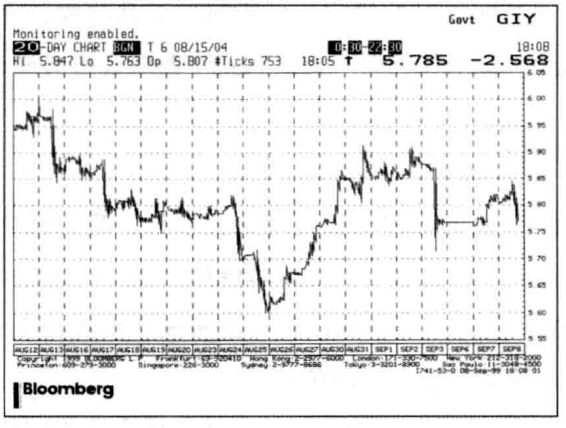


图 13-12　收益率时间序列

资料来源：Bloomberg L. P.

13.13　对冲

在使用到期收益率时，必须牢记该收益率是令债券的现值等于其市场价格的贴现率。对每一个单独的工具都定义了一个收益率，因此完全有可能出现一个工具的收益率上升而另一个工具的收益率下降的情形，特别是当两种工具的到期日或久期明显不同时。不过，我们往往希望使用一种工具来对冲另一种工具的变动，这需要对两种债券收益率的相对运动做出较大的假设。如果债券 A 的收益率为 y_A，债券 B 的收益率为 y_B，其到期日和久期不同，我们假设 A 的收益率变化 $x\%$会伴随 B 的收益等幅度变化 $x\%$，这种假设称为收益率曲线的**平行移动假设**

(parallel shifts)。如果情形的确如此，那么假设我们持有债券 A 和债券 B 的比例与其久期成反比（其中一个债券为多头另一个为空头），那么我们就实现了一阶对冲

$$\Pi = V_A(y_A) - \Delta V_B(y_B)$$

其中，债券价格和收益率符号如前文所示。该组合的价值变动为

$$\delta\Pi = \frac{\partial V_A}{\partial y_A}x - \Delta\frac{\partial V_B}{\partial y_B}x + 高阶项$$

选择

$$\Delta = \frac{\partial V_A}{\partial y_A}\Big/\frac{\partial V_B}{\partial y_B}$$

来消除一阶风险。高阶风险取决于两个工具的凸性。

当然，以上只是真实情况的简化。可能两种工具的收益率没有多少相关性，特别是当它们的现金流显著不同时，此时收益率曲线会扭曲或有弧度。

13.14 时变利率

本节讨论利率为时间的已知函数时的债券定价。我们讨论的利率 $r(t)$ 称为**短期利率**（short-term interest rate）或**即期利率**（spot interest rate）。这意味着 $r(t)$是用于时刻 t 的：在每一个时刻，利息按照该利率进行复合累积但该利率是会变化的，我们一般都假设它为时间依赖的。

如果即期利率 $r(t)$ 是时间的已知函数，那么债券价格同样只是时间的函数：$V=V(t)$（当然债券价格还是到期日 T 的函数，但是除非到期日特别重要，我们将不特别注明）。先看一个零息票债券的例子。因为 $t=T$ 时刻我们收到 1 美元，所以 $V(T)=1$。现在我们来推导到期前某时刻 $t<T$ 时的债券价格公式。

假设我们持有一份该债券，在时间步长 $\mathrm{d}t$ 中债券价格的变化为（从 t 时刻到 $t+\mathrm{d}t$ 时刻）

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

通过无套利条件我们可以认为它等于利率为 $r(t)$ 的货币市场账户的回报：

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = r(t)V$$

求解该方程我们可以得到

$$V(t;T) = \mathrm{e}^{-\int_t^T r(\tau)\mathrm{d}\tau} \tag{13-2}$$

下面我们引入息票支付。如果在期间 t 到 $t+\mathrm{d}t$ 我们收到的息票支付为 $K(t)\mathrm{d}t$（其支付形式为连续、离散或混合），包含现金价值变化在内，我们持有的债券价值变化为

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}+K(t)\right)\mathrm{d}t$$

再次令其等于无风险利率 $r(t)$，我们得到

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}+K(t)=r(t)V \tag{13-3}$$

消去参数 t，该常微分方程的解为

$$V(t)=\mathrm{e}^{-\int_t^T r(\tau)\mathrm{d}\tau}\left(1+\int_t^T K(t')\mathrm{e}^{\int_{t'}^T r(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}t'\right) \tag{13-4}$$

积分中的常数通过条件 $V(T)=1$ 确定。

13.15　离散支付的息票

方程（13-4）中含有息票支付，但如果息票像实际应用中那样是离散支付的，比如说 6 个月支付一次，我们可以通过一种稍后很有用的金融论断得到该式。既然债券持有者在 t_c 时刻会得到 K_c 大小的息票，那么在付息日前后债券价格应该会发生跳跃。也就是说，该日前后价格会变化 K_c：

$$V(t_c^-)=V(t_c^+)+K_c$$

该式被称为跳跃条件。此时已实现债券价格不再是连续的，毕竟在息票日有一个离散的支付。该跳跃条件在我们考虑随机利率时仍然适用。

在建立了时变利率的简单框架后，我们来看如何从债券的市场价格中推导这些利率的信息。

13.16　远期利率和靴襻法

使用到期收益率作为利率衡量指标的最大的问题，是在不同金融工具中的不一致性。一个 5 年期债券可能因为息票结构的问题和另一个 5 年期债券的到期收益率不同，这样很难提出一个与该期限相关的单一利率。

解决该问题的一种方法是使用**远期利率**（forward rates）。

远期利率被认为是适用于未来某段时间、适用于所有金融工具的利率，这与适用于某到期日、债券不同的收益率有区别。

假设我们处在一个完美的世界，有连续分布的所有到期日 T 的零息票债券。令 t 时刻这些债券的价格为 $Z(t;\ T)$，注意 Z 表示零息票。

隐含远期利率（impled forward rate）指的是与这些零息票债券市场价格一致的时变瞬时利率的曲线。假设 τ 时刻该利率为 $r(\tau)$，那么它应该满足

$$Z(t;T) = e^{-\int_t^T r(\tau)d\tau}$$

整理该式并微分可以得到

$$r(T) = -\frac{\partial}{\partial T}(\log Z(t;T))$$

这是 T 时刻的远期利率在今天（t 时刻）的值，到明天整个曲线（r 与未来时刻的关系）可能会变化。因此，我们通常将 t 时刻用于 T 时刻的远期利率记为 $F(t;\ T)$

$$F(t;T) = -\frac{\partial}{\partial T}(\log Z(t;T))$$

将其写成收益率 $y(t;\ T)$ 的形式有

$$Z(t;T) = e^{-y(t;T)(T-t)}$$

所以

$$F(t;T) = y(t;T) + \frac{\partial y}{\partial T}$$

此为所有变量完美可微时收益率和远期利率的关系（见图 13-13）。

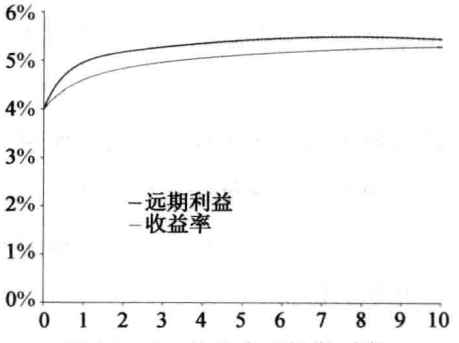


图 13-13 收益率和远期利率

13.16.1 离散数据

在不那么完美的现实世界中，我们处理的都是离散的数据点。仍然假设有零息票债券，但是现在只有一些离散债券，我们还是可以按照下面的步骤找到一条隐含远期利率曲线。

将债券按照到期日排序，将到期日最短的放在最前面。债券的市场价格用 Z_i^M 表示，其中 i 是该债券在排序中的位置。

使用第一个债券，问“该债券的市场价格隐含的利率是多少”。答案 y_1 是下面方程的解

$$Z_1^M = \mathrm{e}^{-y_1(T_1-t)}$$

即

$$y_1 = -\frac{\log(Z_1^M)}{T_1 - t}$$

该利率是我们对当前时刻到第一个债券到期日 T_1 之间进行贴现的远期利率。这一利率对所有金融工具都成立，只要贴现的时间段为该时间段。

现在我们继续看到期日为 T_2 的第二个债券。我们已经知道了现在到 T_1 时刻的利率，那 T_1 到 T_2 时刻的利率是多少呢？答案 y_2 是如下方程的解：

$$Z_2^M = \mathrm{e}^{-y_1(T_1-t)}\,\mathrm{e}^{-y_2(T_2-T_1)}$$

即

$$y_2 = -\frac{\log(Z_2^M / Z_1^M)}{T_2 - T_1}$$

使用这种**靴襻法**（bootstrapping）可以构建远期利率曲线。注意，我们假设两个日期之间的远期利率为常数。图 13-14 给出了具体的例子。

	A	B	C	D	E
1	到期	市场价格	到期	远期	
2	时间	z-c b	收益率	利率	
3	0.25	0.9809	7.71%	7.71%	
4	0.5	0.9612	7.91%	8.12%	
5	1	0.9194	8.40%	8.89%	
6	2	0.8436	8.50%	8.60%	
7	3	0.7772	8.40%	8.20%	
8	5	0.644	8.80%	9.40%	
9	7	0.5288	9.10%	9.85%	
10	10	0.3985	9.20%	9.43%	
11					
12	= -LN(B10)/A10				
13					
14					
15		= (C10*A10-C9*A9)/(A10-A9)			
16					

图 13-14　根据零息票债券价格计算收益率和远期利率的电子数据表

该方法很容易拓展到附息债券上。同样，我们将债券按照到期日排序，但现在对几个现金流的加总我们只有一个市场价格来表示，这增加了复杂性。因此，我们常常要做出一些假设以得到和未知变量同样数量的方程，见图 13-15 至图 13-20。

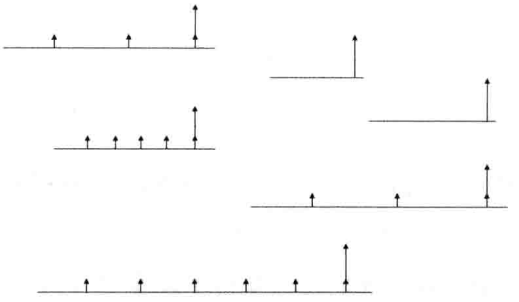


图 13-15 琳琅满目的各种债券

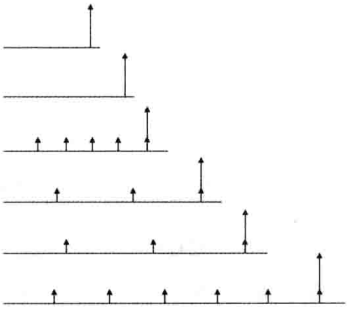


图 13-16 琳琅满目的各种债券（按到期日排序）

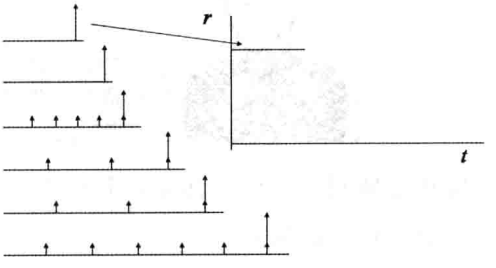


图 13-17 第一只到期的债券给出了现在至其到期日的远期利率

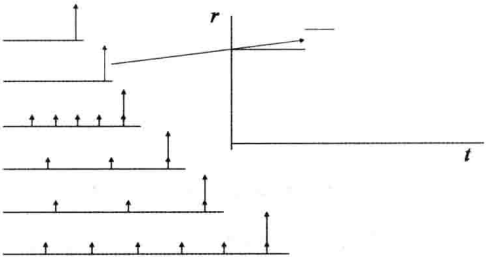


图 13-18 第二只到期的债券给出了上一只债券到期日和该债券自身到期日之间的远期利率

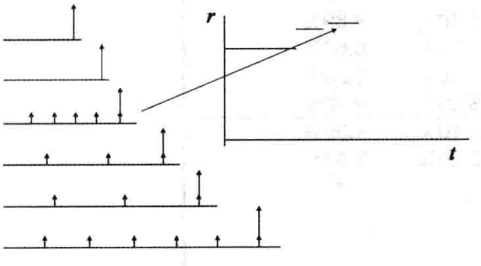


图 13-19 第三只到期的债券给出了上一只债券到期日和该债券自身到期日之间的远期利率

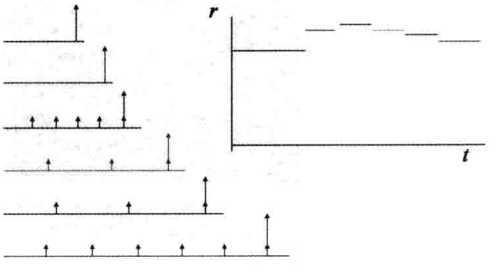


图 13-20 依次类推

13.16.2 扩展表格

给定零息票债券的市场价格，很容易计算收益率和远期利率，如图 13-14 的电子数据表所示。灰色区域表示输入。

该表计算出来的收益率和远期利率如图 13-21 和图 13-22 所示。注意，在每

种情况下，收益率都从 0 时刻开始，扩展到每只债券的到期日。而远期利率则是一个接一个。

不同期限的互换数量远多于债券，因此实务中通常运用靴襻法通过互换来确定远期利率。幸运的是，有一种简单的方法可以用来将互换价格解构成零息票债券，使得靴襻法仍然相对直观。第 14 章将较详细地讨论互换。

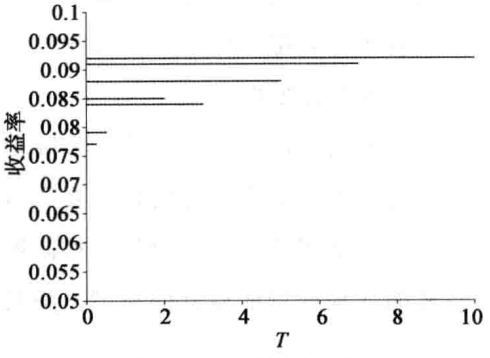


图 13-21　到期收益率

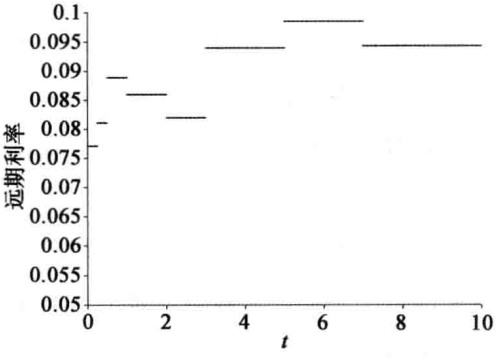


图 13-22　远期利率

13.17　插值

上一节假设远期利率是分段常数形式的，在每一个债券的到期日会从一个值跳跃到另一个，其他的“插值”方法也是可以的。例如，可以令远期利率曲线在具有分段常数梯度形式的同时保持连续。有些人喜欢使用三次样条插值法。“把点连起来”（因为只有有限的市场价格）的正确方法是争论的焦点。如果你想知道 2.5 年期的现金流用什么利率贴现，而市场上最接近的只有 2 年和 3 年的利率，你就必须做出一些假设。也就是说，并不存在绝对“正确”的值。也许最多能做的就是限定该利率的范围了。

13.18　总结

本章的利率模型既有优点也有缺点。首先，我说一下它的优势。

比较一下本章和之前期权定价章节在数学方面的简单程度，使用容易分析的模型显然是有好处的。在电脑计算能力不足时，价格计算和对冲操作仍然可以基本做到瞬间完成。而且，有时候的确完全不需要更复杂的模型。例如，如果我们想对简单的现金流结构进行比较，有可能可以通过加总其他债券来给某个债券定

价，这要求它们的现金流可以匹配。这种情况虽然少见，但此时的定价问题不是模型依赖的。即使在无法完全做到现金流匹配时，也可能出现足够接近的现金流组合——其中的差额可以小到可被估计或至少可被确定范围，从而大的偏误可以被轻松避免。

从另一方面来看，利率随机不可预测是一个众所周知的经验结论：对复杂的产品来说，定价中最重要的因素就是利率的变化。考虑此类问题时若假设未来利率等于远期利率简直就是金融自杀。回想一下詹森不等式吧。所以，正如我们在之前章节中看到的那些更接近随机模型的模型是相当有必要的。

在本章中我们看到了分析固定收益合约简单有效的方法。这些方法在实际中被广泛应用，比稍后章节讨论的用于利率衍生品定价的复杂方法使用频率要高得多。这些技术背后的假设（例如确定性远期利率）只能用于简单的合约。如同期权中的情况一样，非线性回报的更复杂产品需要能处理变量随机性的模型。随机利率是稍后章节的研究对象。

延伸阅读

- Macaulay（1938）的工作在20世纪60年代以前应用较少，但现在被认为是固定收益分析的基础。
- 对收益率、久期和凸性更详细的分析见Fabozzi（1996）。该书解释了这些概念如何拓展到更复杂的工具中。
- 关于如何将收益率曲线的点连起来的讨论与Swift（1726）中Little-Endians和Big-Endians之间的讨论一样没有意义。
- 对曲线构建的问题见Walsh（2003）。

第 14 章

互　　换

本章内容

- 基本利率互换合约的规范
- 互换和零息债券的关系
- 奇异互换

14.1　引言

互换（swap）指参与合约交易的双方达成一个交换未来现金流的协议，这些现金流的大小由一些在合约签订时确定的规则所决定。互换可以是基于同一种货币现金流的交换，也可以是同时涉及不同币种现金流的交换。

互换市场的规模非常庞大，全市场的名义本金总额目前已经达到了 14 位数（用美元表示）。虽然在 20 世纪 70 年代有少量的类似互换合约的结构性产品出现，但互换市场真正出现于 1981 年。起初最受欢迎的合约是货币互换（下文即将展开讨论），但很快地，利率互换就取代了货币互换成为市场主流。

14.2　香草利率互换

利率互换（interest rate swap）中互换双方交换由名义本金产生的一系列利

息现金流。通常情况下，一方同意向另一方支付一个固定利率的现金流，同时收取一个**浮动利率**（floating rate）的现金流。互换双方如图 14-1 所示。互换协议中最经常使用的浮动利率是 LIBOR，即伦敦银行同业拆借利率。

在一个互换中，通常每 6 个月交换一次固定利率和浮动利率的利息支付。在这种情况下，相对应的是 6 个月的 LIBOR 利率。[⊖]而在合约到期时，不进行本金的交换。

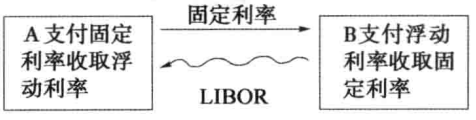


图 14-1 利率互换的双方

让我们举一个例子说明互换合约是如何运行的。

举例

假设在 2006 年 8 月 4 日，开始一个期限 5 年、半年支付一次利息的互换。我们将支付给另一方 6%的固定利率，对手方将支付给我们 6 个月的LIBOR，而名义本金为 1 亿美元。该合约的现金流如图 14-2 所示。图中直线表示固定利率产生的利息，因此是一个已知量；曲线表示浮动利率的支付。

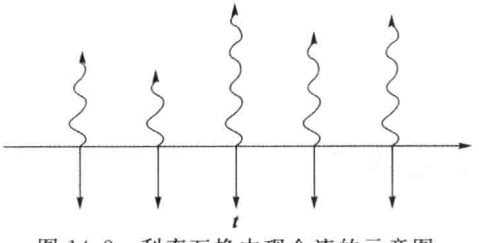


图 14-2 利率互换中现金流的示意图

第一次利息支付的交换发生在 2007 年 2 月 4 日，即在签署协议后的 6 个月。在第一次交换中双方要易手多少钱？我们必须支付 0.03×100 000 000=3 000 000 美元。相反方向的现金流是 6 个月前报出（即最初签订合约时）的 6 个月 LIBOR 报价。这一点非常重要。由于支付的 LIBOR 利率在 6 个月前就已完成设定，所以第一次交换利息时的浮动利率是已知的。这使得第一次交换比较特殊。

第二次交换发生在 2007 年 8 月 4 日。我们必须再次付出 3 000 000 美元，但现在我们收取的 LIBOR 是 2007 年 2 月 4 日的报价。这样的支付交换行为每 6 个月都要进行一次，其中固定方利率总是已知的，而浮动方利率在支付时刻的 6 个月前才知道。重复这个过程直到合约的最后一天，即 2011 年 8 月 4 日。

⊖ 实际上也有用 3 个月 LIBOR 的。——译者注

为什么浮动方利率是在支付时刻的6个月前设定呢？信不信由你，这个“小”细节在互换的定价问题中有着十分关键的地位。支付的时间间隔和LIBOR的期限相同，如本例中都是6个月，这并非巧合。这个惯例是以LIBOR的基本性质为基础逐渐形成的：LIBOR是一个具有固定到期期限的利息率，在期初设定价格而在到期日支付利息。互换中的每次浮动方支付就相当于用名义本金进行的一次单独的6个月投资，该投资的时点在每次互换利息交换时刻的6个月前。先把这个思想放到一边，我会在讨论相关内容时回到这个话题上，目的是要揭示互换和债券之间的简单关系。

市场上还存在着**后定LIBOR互换**（LIBOR in arrears swap）合约。该互换中选取的浮动方利率是互换支付日当天确定的6个月LIBOR，而不是6个月之前确定的。

14.3 比较优势

互换被创建的初衷是为了利用**比较优势**（comparative advantage）来谋取利益。即两家分别希望以固定利率和浮动利率借款的公司，可以通过交换其支付使得双方都受益，同时促成交易的中介也受益。下面是一个例子。

A和B两家公司想要借50美元，在两年内偿还。它们能借到的固定利率和浮动利率如表14-1所示。

表14-1 A公司和B公司的贷款利率

	固定利率	浮动利率
A	7%	6个月LIBOR+30个基点
B	8.20%	6个月LIBOR+100个基点

注意，双方除了支付LIBOR外，还必须支付一个能够覆盖违约风险的额外费用，可以看到此处B公司需要支付的相对多一些。

在理想的情况下，A公司希望以浮动利率借款，B公司希望以固定利率借款。如果都直接借款，那么它们的总支付如下（见表14-2）：

$$6\text{个月 LIBOR} + 30\text{个基点} + 8.2\% = 6\text{个月 LIBOR} + 8.5\%$$

然而，如果A公司以固定利率借款，B公司以浮动利率借款，它们总共只需支付

$$6\text{个月 LIBOR} + 100\text{个基点} + 7\% = 6\text{个月 LIBOR} + 8\%$$

共节省了0.5%。

表 14-2 不涉及互换的贷款利率

A	6 个月 LIBOR+30 个基点（浮动利率）
B	8.2%（固定利率）

首先我们假设 A 公司以固定利率借款，B 公司以浮动利率借款（即使这暂时与它们的目的相左），它们的总利息支付是 6 个月的 LIBOR 加上 8%。现在让我们看看加入互换会发生什么。

* 目前的状态是，A 支付 7%的利率，B 支付 6 个月 LIBOR 加上 1%的利率。它们签订一个互换，A 向 B 支付 LIBOR，B 向 A 支付 6.95%的利率。那么它们便完成了利息的互换支付。

从 A 的角度看，A 支付 7%和 LIBOR，收取 6.95%，净浮动利率支付是 LIBOR加上 5 个基点。这不仅是最初想要的浮动利率，而且比直接以浮动利率借款减少了 25 个基点。那还缺了 25 个基点，当然，它被 B 得到了。B 支付LIBOR 加上 100 个基点以及向 A 支付了 6.95%，收到了 A 支付的 LIBOR。净支付 7.95%，同样也是最初想要的固定利率，而且比原先的直接借款减少了 25 个基点。

6.95%是怎么获得的呢？让我们用“x”代替 6.95 重新计算。

回到前面的 * 。现在，A 支付 7%的固定利率，B 支付 6 个月 LIBOR 加上 1%。它们签订一个互换，A 向 B 支付 LIBOR，B 向 A 支付 x%。利息的互换支付完成。

从 A 的角度看，A 支付 7%和 LIBOR，收取 x%，净浮动利率支付是 LIBOR 加上 $(7-x)$%。现在，我们希望 A 比原先的交易受益 25 个基点，即 50 个基点优势的一半（我只是单方面决定平摊优势，各 25 个基点）。因此

$$\text{LIBOR}+7-x+0.25=\text{LIBOR}+0.3$$

即

$$x=6.95\%$$

事实上，这两个对手方将通过中介进行交易，中介会从中得到一部分的利益。

虽然比较优势是互换市场增长的初始原因，但它不再是互换成为主流的原因。现在，互换已经是十分普遍的香草产品并具有各种期限种类，而且比简单的债券更具有流动性。

14.4　互换曲线

在刚刚签订的时刻，互换合约对互换双方来说通常是没有价值的。这可以通过精确选择一个固定利率来实现。换句话说，我们需要令合约的“现值”净额结算等于 0，即固定方和浮动方的支付有相同的现值。这里考虑两种极端情况——很高的固定利率和很低的固定利率。如果固定利率非常高，那么收取固定利率的一方将拥有一个高价值的合约；如果固定利率低，那么收取固定利率的一方将拥有一个价值为负值的合约。那么，存在一个介于两者之间的值，可以令合约的价值为 0。互换中固定利率的选取思想便是如此。

这样的描述引发了许多问题：固定利率是如何确定的呢？为什么双方会同意没有价值的交易呢？

可以通过两种角度看待这个问题。第一种方法：观察到互换可以被分解成一个由债券组成的资产组合（正如我们不久后会看到的），所以如果收益率曲线给定了，互换价值的确定就不是问题。然而，实际的计算却是用另一种方法：由于互换市场流动性非常强，而且具有非常多的期限种类，以至于反而是互换价格驱动债券价格的运动。**平价互换**（par swap）（没有价值）的固定方利率是由互换市场决定的。

互换固定方的利率报价有不同期限，这些利率组成了**互换曲线**（swap curve），见图 14-3。

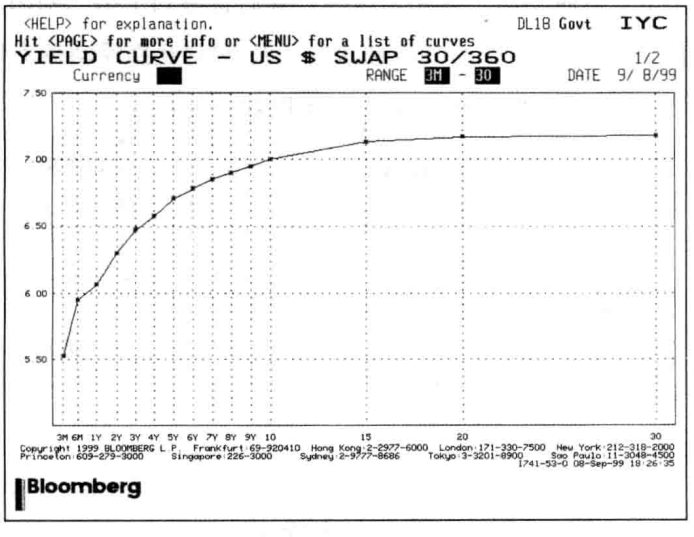


图 14-3　互换曲线

资料来源：Bloomberg L. P.

14.5 互换和债券的关系

互换涉及两端，即固定利率端和浮动利率端。由于固定利率的支付是已知的（以实际美元数量的形式），因此固定利率的支付可以看成是一系列零息债券的总和。如果固定利率是 r_s，支付时间间隔是 τ，那么固定利率支付总和是

$$r_s\tau\sum_{i=1}^{N}Z(t;T_i)$$

这是所有固定利率支付的现值，即 t 时刻值。这里有 N 次支付，每次支付时间为 T_i，τ 是 T_i 之间的时间间隔。当然，还要乘以名义本金，但我们假设把名义本金标准化为 1。

为了观察浮动利率端和零息债券之间的简单关系，我画了一些示意图来比较两者的现金流。单次浮动利率支付如图 14-4 所示。在 T_i 时刻，支付名义本金乘以 $r_\tau\tau$，其中 r_τ 是在 $T_i-\tau$ 时刻设定的 τ 期间的 LIBOR。在图 14-4 中第一幅图的 T_i 时刻加上和减去 1 美元得到第二幅图。第一幅图和第二幅图明显有相同的现值。现在回忆 LIBOR 的精确定义，它是定期存款利率。因此，在 T_i 时刻的 $1+r_\tau\tau$ 美元等于在 $T_i-\tau$ 时刻的 1 美元。这样，我们就得到了第三幅图。由此得出结论，单次浮动利率支付相当于两个零息债券。T_i 时刻互换浮动端支付恰好相当于 $T_i-\tau$ 时刻的 1 美元存款和 T_i 时刻的 1 美元取款的组合。

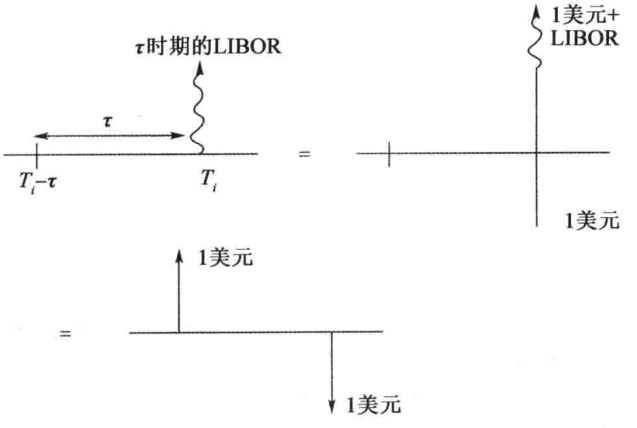


图 14-4 利率互换中浮动利率部分和等价资产组合的示意图

现在对图 14-5 所示的所有浮动端支付进行加总，注意除了第一个和最后一个，所有的 1 美元（虚线）现金流都被抵消了。这表明互换浮动端的价值为

$$1 - Z(t;T_N)$$

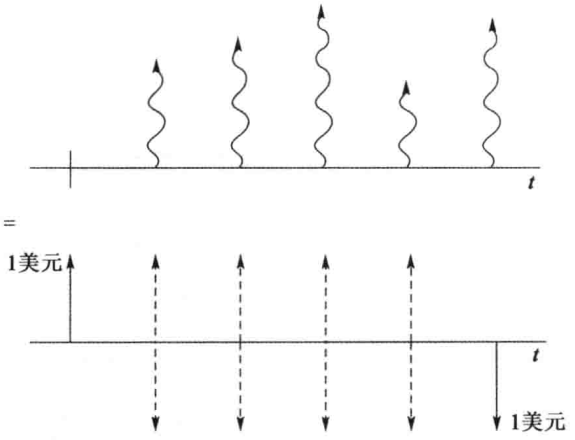


图 14-5　一个互换中所有浮动利率部分的示意图

把固定利率部分和浮动利率部分放在一起，就可得到收取固定利率一方的互换的价值为

$$r_s\tau\sum_{i=1}^{N}Z(t;T_i) - 1 + Z(t;T_N)$$

这个结果是独立于模型的。债券和互换的这种关系对任何数学模型来说都是成立的。

在互换合约开始时，经常会选择利率 r_s 使合约平价（即最初价值为 0）。因此

$$\boxed{r_s = \frac{1 - Z(t;T_N)}{\tau\sum_{i=1}^{N}Z(t;T_i)}} \tag{14-1}$$

这就是市场所报的互换利率。

14.6　靴襻法

如今的互换产品流动性非常强，而且存在于十分宽泛的期限范围之中，以至于是互换的价格决定着收益率曲线的形态，而不是反过来。现实中的情况是，互换市场给定了各到期日 T_i 的利率 $r_s(T_i)$，而

我们则利用公式（14-1）计算各个零息债券的价格，最终获得收益率曲线。为了得到折现因子曲线上的第一个点，我们需要求解

$$r_s(T_1) = \frac{1 - Z(t;T_i)}{\tau Z(t;T_i)}$$

即

$$Z(t;T_1) = \frac{1}{1 + r_s(T_1)\tau}$$

在找到前 j 个折现因子后，第 $j+1$ 个折现因子从下面的式子得到

$$Z(t;T_{j+1}) = \frac{1 - r_s(T_{j+1})\tau \sum_{i=1}^{j} Z(t;T_i)}{1 + r_s(T_{j+1})\tau}$$

图 14-6 显示的远期曲线是通过靴襻法从图 14-3 的数据中推导出的。

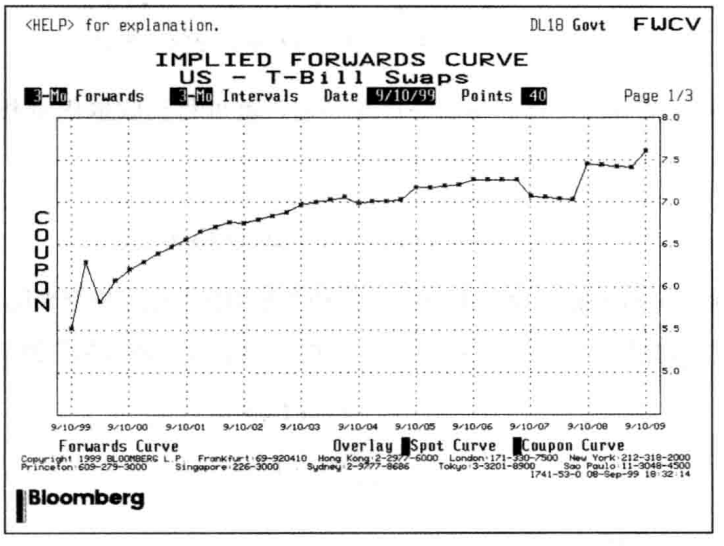


图 14-6 通过靴襻法从互换曲线推导出的远期利率曲线

资料来源：Bloomberg L. P.

14.7 互换合约的其他特征

以上描述的是香草利率互换。合约中可以添加许多特征使互换变得更加复杂，而最重要的是，这些特征的引入甚至将使互换变得模型依赖。接下来将提到一些这类特征。

14.7.1 可赎回互换和可回售互换

可赎回互换或**可回售互换**（callable or puttable swap）允许一方或者另一方在自然到期日之前结束互换。如果你是收取固定利率的一方，当浮动利率上升超过你的预期，你可以提前结束互换。从数学上看，我们处于美式期权的可提前执行世界中。这个问题是模型依赖的，我们将在第32章讨论。

14.7.2 可展期互换

可展期互换（extendible swap）的持有人可以以初始的互换利率扩展香草互换的到期期限。

14.7.3 指数摊销利率互换

在香草互换中，本金是固定的。在一些互换中，根据规定的时间表，本金随着时间的推移而下降。指数摊销利率互换更为复杂，因为在交换支付的时候，本金的摊销取决于一些指数的水平，例如LIBOR。我们将会在第32章详细讨论这种合约。

14.8 其他类型的互换

14.8.1 基差利率互换

基差利率互换（basis rate swap）中的两个浮动端是两种不同的利率。例如，美国的优惠贷款利率与LIBOR。一家银行可能有基于优惠贷款利率的未偿还贷款，而银行本身可能得以LIBOR借款。因此，银行面临着**基差风险**（basis risk），该风险可以通过签订一个合适的基差利率互换来降低。

14.8.2 股权互换

基本的**股权互换**（equity swap）是一个交换支付的协议，第一个支付取决于一个约定的利率（固定利率或者浮动利率），另外一个支付取决于股票指数。股权端通常是由指数的总回报衡量的，包括资本利得和红利。该互换不进行本金的交换。

股权基差互换（equity basis swap）是交换基于两种不同指数的支付。

14.8.3 货币互换

货币互换（currency swap）将一种货币的利息支付和另一种货币的利息支付进行交换。利率可以都是固定利率，也可以都是浮动利率，或者一个是固定利率一个是浮动利率。除了交换利息支付外，在合约开始时和结束时，货币互换还交换本金（两种不同的货币）。

为了衡量固定利率对固定利率的货币互换的价值，我们必须计算每个货币的现金流的现值。只需要两种货币的折现因子，很容易做到。一旦计算出了现值，我们就可以利用当前的即期汇率把一个现值转换成另一个货币表示。如果涉及浮动利率支付，我们首先把它们分解成一个由债券组成的资产组合（如果可以），然后用同样的方法估值。

14.9 总结

用一种类型的利率支付交换另一种类型利率支付的需求和能力是许多企业运行的基础，这使得互换成为最具流动性的金融合约之一。巨大的流动性使互换成为非常重要的产品，以致在处理互换的定价问题时要非常小心。事实上，互换具有很强的流动性，以致你根本不能够通过理论方法给它们定价：强行从理论方面为互换定价将会非常危险。相反，互换几乎已被当成金融市场中的“标的”资产。从市场对价值的评价我们可以反推出收益率曲线。互换结构的精妙细节对这个推导过程有着有力的帮助：现金流以能够完全分解为零息债券的形式被精确定义。同时，可以通过一个完全模型独立的方式实现。为了完成本章，我在这里想要强调，不利用模型而让一组现金流完全地、静态地、模型独立地被另一组现金流对冲是非常重要的。任何因模型导致的错误定价，无论多么小都会让你面临着巨大的“无风险”损失。

延伸阅读

- Das（1994）以及 Miron 和 Swannell（1991）是两部关于互换的很好的技术性著作。
- Ungar（1996）写的袖珍读本描述了互换市场的目的、互换市场如何运行以及不同类型的互换。书中没有使用数学工具。

第 15 章

二叉树模型

本章内容

- 一个关于资产价格随机游走的简单模型
- Delta 对冲
- 无套利
- 为期权定价的二叉树模型的基础知识
- 风险中性

15.1 引言

在第 3 章中，我们已经看到一个基于随机微积分数学理论来刻画股票等资产的模型。另外还有一个同样受欢迎的方法可以推导出相同的布莱克-斯科尔斯偏微分方程。这种方法是通过对股票建立**二叉树模型**（binomial model）实现的，这也是本章的主题。

毫无疑问，这个模型受欢迎的原因之一是它的推导过程不要求任何高等数学（如微分），事实上该模型的实现并不要求推导出偏微分方程。然而该模型的不足在于，模型设定的局限使它难以处理更复杂的情形或者支持更深入的数值分析。

在描述模型之前我想强调，二叉树模型被认为是一个真正可以模拟股票行为的模型，也可以被认为是求解布莱克-斯科尔斯方程的一种数值方法。[⊖]最重要的是，我们在另一种模型设定中看到了 Delta 对冲、风险消除和风险中性定价的思想。

二叉树模型非常重要，因为它展示了如何摆脱对闭式解的依赖。的确，仅依赖于一个简单的模型和快速、准确的数值计算方法就可以进行期权定价，这一点是极其重要的。在现实生活中，一个合约可能包含各种各样的特征从而导致合约价格的解析解不容易甚至不可能得到。其中一些特征也许只是来自对另一个易被定价合约做了一个小的修改，但即使是很小的变动也可能对合约价值和求解方法产生巨大的影响。一个典型的例子是美式看跌期权：可以提前执行的美式期权似乎只是对欧式期权合约的一个很小的变动，但是它们之间的价值差距可能是巨大的；而且美式期权没有简单的闭式解，必须通过数值方法来计算它的价值。

介绍完二叉树模型的优点，接下来要介绍一下我所理解的二叉树模型的缺点。

第一，作为反映股票价格行为的模型，二叉树模型的表现差强人意。依二叉树模型设定，股票价格或者上升一个已知的量，或者下降一个已知的量，所以“明天”股票价格仅仅只有两个可能的取值。这显然是不现实的。可这个设定又很重要，因为该模型的结果直接依赖于明天股票价格只有两个取值的假设。如果引入第三种状态，模型结果便不再成立。

第二，相对于现代的数值方法而言，二叉树模型是一个陈旧的数值方法。本章只初步讨论数值方法，而关于更复杂的数值方法可以单独撰写成好几本书。我建议读者着重研究从二叉树模型中获得的直觉，而不是依赖它进行数值计算。

从二叉树模型中获得的直觉是有用的。的确，据说二叉树模型甚至可以帮助 MBA 学生理解期权。我可不相信这种简化的做法。我不认为数量金融学应该为了通俗而简化，就好像我不相信脑部外科手术应该为了通俗而简化一样。

我的建议是，一旦适应了本章的思想，你就应该把二叉树模型抛到脑后。

15.2 股票价格会涨也会跌

最容易理解的期权定价方法是二叉树模型。二叉树模型只要求基本的算术而

⊖ 这种情况下，二叉树模型与显式有限差分法很相似，后面将进一步讨论。

没有复杂的随机微分。在模型中我们将看到对冲和无套利的思想。模型最终将给出一个用以确定期权价格的简单算法。

接下来要考察的是一个反映股票行为的简单模型，并通过该模型确定期权的定价方法。

- 我们有 1 单位股票和 1 单位看涨期权，该期权以这一单位股票为标的且明天到期。
- 在今天和明天之间，股票价格将上升或者下降一个已知的量。
- 利率等于 0。

图 15-1 给出了一个示例：股票现价为 100 美元，明天股票价格可能上升至 101 美元，也可能下降至 99 美元。

明天将实现哪个价格是完全随机的事件。股票价格以某一特定概率上升，以 1 减去上述概率下降。在这个例子中，股票价格上升至 101 的概率是 0.6；那么下降至 99 的概率是 0.4（见图 15-2）。

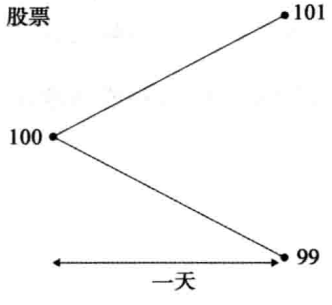


图 15-1　第二天股票价格将会上升或者下降，未来只有两个可能的价格

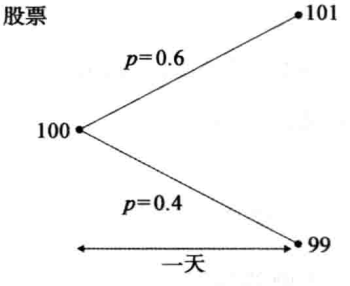


图 15-2　与未来股票价格相对应的概率

现在引入以这只股票为标的的看涨期权。该看涨期权的执行价格是 100 美元，到期日是明天。

如果明天股票价格上升至 101，那么期权的回报是多少？见图 15-3。期权回报就是 101－100＝1。

同样，如果明天股票价格下降至 99，那么期权的回报是多少？见图 15-4。期权回报是 0。因为期权到期时，标的股票的价格小于执行价格。

如果股票价格上升，则期权价值 1 美元；如果股票价格下降，则期权价值 0 美元（见图 15-5）。期权有 0.6 的概率获得 1 美元的回报，有 0.4 的概率获得

0 美元的回报。利率是 0……

今天的期权价值多少（见图 15-6）？

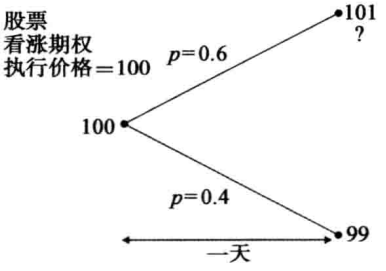


图 15-3 如果股票价格上升，期权的回报是多少

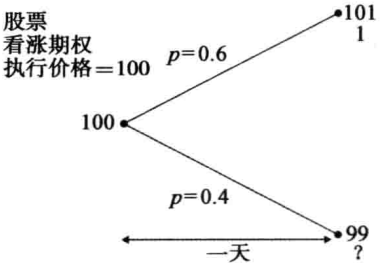


图 15-4 如果股票价格下降，期权的回报是多少

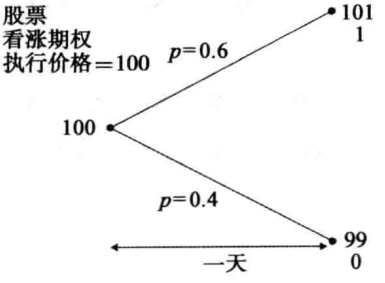


图 15-5 现在我们知道两种状态的期权价格

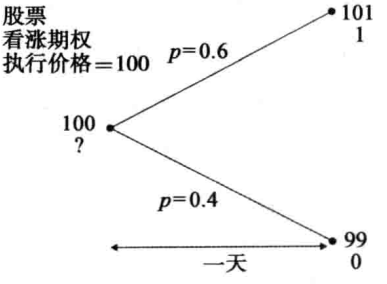


图 15-6 今天的期权值是多少

答案不是 0.6。如果你认为答案是简单地计算期望，那么我成功地误导你得到了错误的答案。

15.3 期权价值

正确的答案是

$$\frac{1}{2}$$

为什么？

为了确定这是唯一正确的答案，我们首先构建一个资产组合，该资产组合由 1 单位期权和$\frac{1}{2}$单位标的股票的空头组成。该资产组合如图 15-7 所示。

如果股票价格上升至 101，则资产组合的价格是

$$1-\frac{1}{2}\times 101$$

1 是期权的回报，而$-\frac{1}{2}\times 101$来自于做空（取负号）了$\frac{1}{2}$单位股票（该股

票现在价格为 101)。

如果股票价格下降至 99，则资产组合的价格是

$$0-\frac{1}{2}\times 99$$

0 是期权的回报，而$-\frac{1}{2}\times 99$来自于做空（取负号）了$\frac{1}{2}$单位股票（该股票现在价格为 99，见图 15-8。

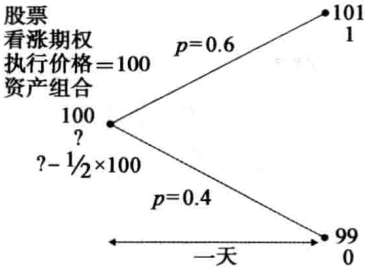


图 15-7　做多 1 单位期权，做空 1/2 单位股票

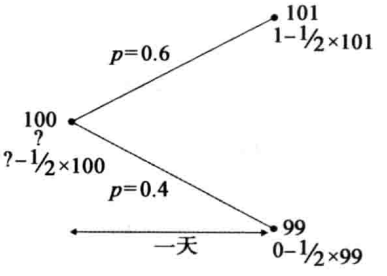


图 15-8　期权到期时资产组合的价格

明天期权到期时，不管股票价格是上升还是下降，资产组合价格都是

$$-\frac{99}{2}$$

这样我们就构建了一个完全无风险的资产组合。

如果明天资产组合的价格是−99/2，利率是 0，那么今天资产组合的价格是多少呢?

今天资产组合的价格肯定也是−99/2。

这是一个**无套利**（No arbitrage）的例子。有两种方法可以确保我们明天获得−99/2：

- 买入 1 单位期权并且卖出 0.5 单位的股票。
- 把钱藏在床垫下面。

在今天，上面两种“资产组合”的价值必须相等。如图中一样用“?”表示未知的期权价格，我们有

$$?-\frac{1}{2}\times 100 = \text{期权价格}-\frac{1}{2}\times 100 = -\frac{1}{2}\times 99$$

可以得到

$$? = \text{期权价格} = \frac{1}{2}$$

15.4 “模型”的哪部分是我们不需要的

期权价格并不取决于股票价格上升和下降的概率。也就是说，股票价格的增长率与期权定价无关，这是因为我们已经用股票来**对冲**（hedged）了期权（见图 15-9）。我们并不关心股票价格是上升还是下降（见图 15-10）。

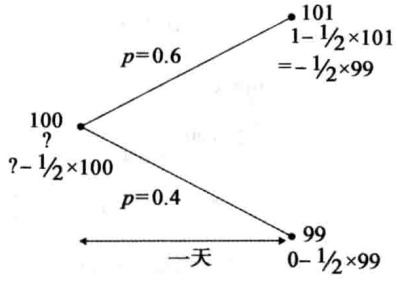


图 15-9 完成对冲的资产组合

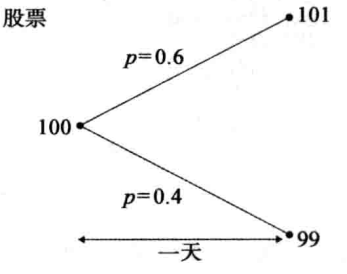


图 15-10 我们不需要哪些参数

然而，我们确实关心股票价格的变化范围。股票价格的波动率在期权定价中十分重要。

在以上简单讨论的基础上我们讨论下面三个问题：

- 为什么这个“理论价格”必须是“市场价格”？
- 我怎么知道对冲需要卖出$\frac{1}{2}$单位的股票？
- 如果利率不等于 0，价格会怎么变动？

15.5 为什么“理论价格”必须是“市场价格”

这个问题很简单，因为如果不是，我们就可以无风险获利。如果期权的成本小于 0.5，那么只要买入该期权并做对冲就可以获得收益；反之，如果期权的成本大于 0.5，那么在市场上卖出该期权并做对冲便再次可以保证获得利润。

但事实并没有如此简单，因为套利机会是可能存在的，且可以存在很长一段时间。我们着实需要一些实用的机制来“消除”套利机会。在实践中这

意味着我们着实需要几个通过降价相互竞争的代理商的存在令套利机会消失：A 以 0.55 的价格卖出期权，包揽了所有业务，而且保证获得 0.05 的利润。后来，B 也进入了市场，以 0.53 的价格卖出期权；现在 B 抢走了 A 的所有业务，则 A 的回应可能是降低价格至 0.52，等等。最终，供给和需求相互作用使期权价格收敛于 0.5。

期望所扮演的角色

这个期权的预期回报绝对是 0.6。只是，这与期权价格无关。让我们简单看看这种期望扮演了怎样的角色。

会有人支付 0.6 或者更多购买期权吗？不，除非他们是**风险爱好**（risk seeking）者。

会有人支付 0.55 吗？有可能，如果他们喜欢的预期回报是

$$\frac{0.6-0.55}{0.55}\approx 9\%$$

（但是他们用股票和现金复制期权会更好）。卖空这个期权的人将会因确保获得 0.05 的利润而欢欣鼓舞。

15.6　我怎么知道对冲应卖出 1/2 单位股票

引入一个符号。用 Δ 表示对冲时必须卖出股票的数量。我们以 1 单位期权和 $-\Delta$ 单位的股票开始，资产组合的价值为

$$?-\Delta\times 100$$

如果股票价格上升，明天资产组合的价值为

$$1-\Delta\times 101$$

否则，明天资产组合的价值为

$$0-\Delta\times 99$$

关键步骤是下一步；让这两个式子相等：

$$1-\Delta\times 101=0-\Delta\times 99$$

那么

$$\Delta(101-99)=1$$

$$\Delta=0.5$$

另一个例子

股票现价是 100，股票价格或者上升至 103 或者下降至 98。要求给一个执行价格为 100 的看涨期权定价。利率是 0。

仍然用 Δ 表示对冲时必须卖出股票的数量。

资产组合的价值为

$$?-\Delta\times 100$$

明天资产组合的价值或者是

$$3-\Delta 103$$

或者是

$$0-\Delta 98$$

所以，我们令两个式子相等

$$3-\Delta 103=0-\Delta 98$$

即可得到

$$\Delta=\frac{3-0}{103-98}=\frac{3}{5}=0.6$$

那么明天资产组合的价值为

$$-0.6\times 98$$

因为利率为 0，今天资产组合的价值必须等于明天无风险的资产组合的价值：

$$?-0.6\times 100=-0.6\times 98$$

因此期权的价格为 1.2。

Δ 的一般化公式

Delta 对冲（delta hedging）意味着通过选取 Δ 使得资产组合的价值不取决于标的股票价格的变化方向。

把上述情况推广到一般情况（以后用符号代替数字），我们可以发现

$$\Delta=\frac{\text{期权回报的变动幅度}}{\text{股票价格的变动幅度}}$$

我们可以把 Δ 看作期权相对于股票价格变化的敏感性。

15.7 如果利率不为 0，价格会怎么变化

简单地，我们像前面一样通过 Delta 对冲构建一个无风险资产组合（恰好是

与前文相同的 Delta)。然后通过乘上折现因子的方法对投资组合价值从后往前进行折现。

例子

条件和第一个例子一样，但现在 $r=0.1$。

往前贴现一天的折现因子是

$$\frac{1}{1+0.1/252}=0.9996$$

今天的资产组合价值必须是明天资产组合价值的现值：

$$?-0.5\times 100=-0.5\times 99\times 0.9996$$

则

$$?=0.519\ 63$$

15.8　股票本身有被正确定价吗

先前，我试图引诱你通过计算预期回报来为期权定价。假设我已经成功了(方便继续讨论)，接下来我想问：明天股票的预期价格是多少？这里我们先不考虑期权（见图 15-11)。

股票明天的预期价格是

$$0.6\times 101+0.4\times 99=100.2$$

从期望的角度说，股票本身似乎没有被正确定价。难道今天股票的价格不应该是 100.2 吗？我们其实已经知道了期望不能用来给期权定价这个事实。但是我们需要更加深入，从而归纳出一些正确的说法。

我们对股票的支付低于未来的预期价格，因为股票存在风险。我们需要一个正的预期收益来补偿持有股票所承担的风险。这个思想将在之后第 18 章资产组合管理中进行详细讨论。

我们可以画出股票（和所有投资组合）的风险/收益图（见图 15-12)。风险由标准差衡量，收益由预期收益率衡量。图中显示了两种投资，一种是股票，另一种是位于原点的银行存款投资。银行存款投资的风险为 0，而且在前面的例子中，此时的预期收益率也为 0（这就是为什么在图中我提到“把钱藏在床垫下”)。

在第 18 章中，我们将看到可以通过把钱分散投资到不同的资产，从而到达风险/收益图上的其他位置。在这个例子中，如果我们把一半钱藏在床垫下，另一半钱投资到股票中，我们可以发现投资组合将正好位于图中两点连接线的中

点。我们可以通过调整无风险投资和股票之间的投资比例，来得到无风险投资和股票两点连线上的任意一点；我们甚至可以通过以无风险利率借入资金投资到股票中，从而得到无风险投资和股票两点连线的延长线上的任意一点。

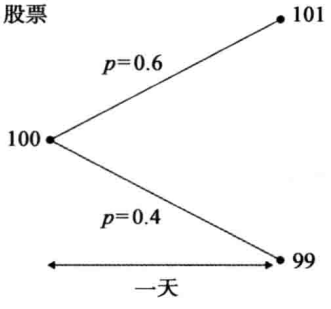


图 15-11 股票的预期价格是多少

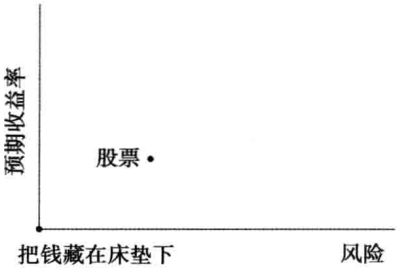


图 15-12 股票和无风险投资（把钱藏在床垫下）的风险与收益

15.9 完全市场

期权也有一个预期收益率和风险。在我们的例子中，期权的预期收益率和风险都远远大于股票的预期收益率和风险。我们同样可以画出期权的风险/收益图。你认为期权会位于哪里呢？在无风险投资和股票两点连线的延长线上方？在延长线上？或者在延长线下方？

事实证明，期权位于延长线上（见图 15-13）。这意味着我们可以用股票和无风险投资“复制”期权的风险和收益特征。期权的回报可以用股票和现金**复制**(replicated)。直线上任意两点的组合都可以用来复制该直线上其他任意的点。所以，我们可以通过期权和股票来构造无风险投资，也就是对冲（见图 15-14）。而且，也可以通过现金和期权来复制股票。

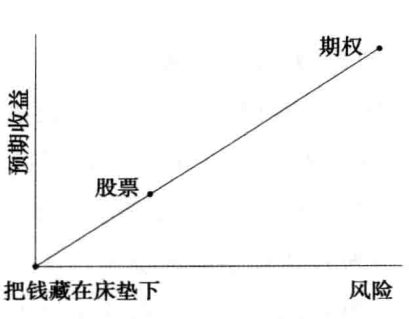


图 15-13 包括期权在内，我们有三种投资

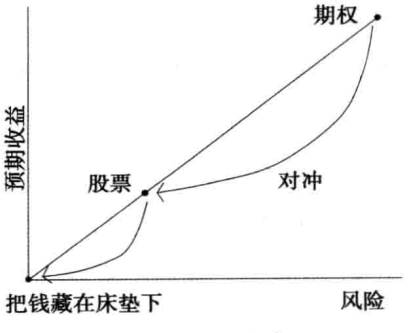


图 15-14 对冲

这样分析的结论是，期权在这个“世界”上（即在这个模型中）是多余的。我们说**市场是完全的**（markets are complete）。完全市场的实际含义是：期权可以被对冲，进而期权定价时不需要知道概率。我们可以用股票来对冲期权，从而“复制”一个无风险投资（见图 15-15），我们也可以用股票和无风险投资来复制期权（图 15-16）。当然，我们也可以用期权和无风险投资来复制股票。

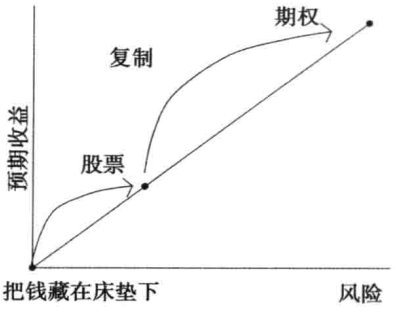


图 15-15　复制

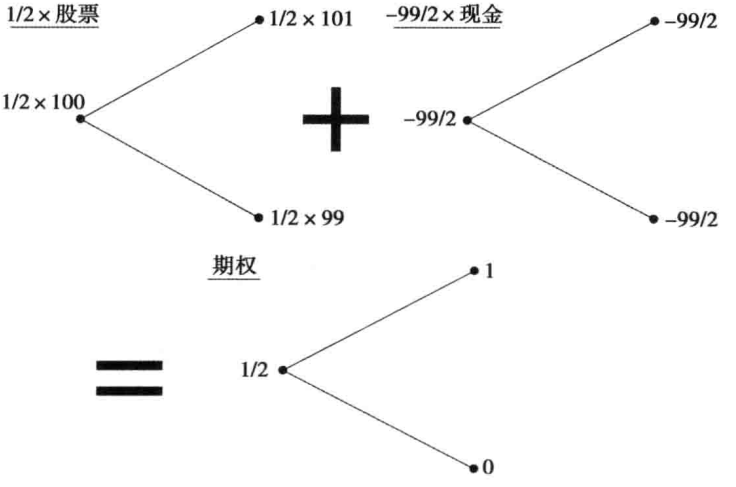


图 15-16　1/2×股票－99/2×现金＝期权

15.10　现实世界和风险中性世界

在我们生存的**现实世界**（real world）中，我们使用统计技术来估计未来可能的股票价格（99 和 101）和这些价格出现的概率（0.4 和 0.6）。

下面列出现实世界的一些属性。

- 人们知道所有的 Delta 对冲和风险消除方法。
- 人们对风险是非常敏感的，如果有承担风险，期望获得更大的回报。
- 事实证明期权定价的关键只是股票的两个价格，而不是其对应概率。

人们经常提及**风险中性世界**（risk-neutral world），在风险中性世界中人们不关心风险。风险中性世界具有如下特征：

- 人们不关心风险，而且在承担了不必要的风险时也不会期望获得额外的回报。
- 人们不需要统计技术来估计事件发生的概率。
- 人们相信任何事物都可以通过简单地计算期望来定价。

想象你在风险中性世界中观察股票定价模型。假设你所知道的是股票现值为 100 美元，可能会上升至 101 美元，也可能下降至 99 美元。

如果股票是通过简单地计算期望来正确定价，那么你将如何推测股价上升和下降的概率（见图 15-17）？

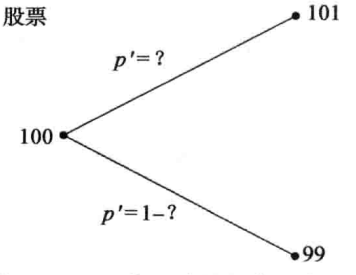


图 15-17 股价上升的概率是多少

对称性让这个问题的答案显而易见。如果股票通过简单的计算期望而被正确定价，那么股价应该有 50%的机会上升，50%的机会下降。刚刚的计算过程如下。

在风险中性世界中，人们使用如下方程：

$$p' \times 101 + (1 - p') \times 99 = 100$$

来计算**风险中性概率**（risk-neutral probabilities）p'（见图 15-18）。由此可以算出 $p'=0.5$。

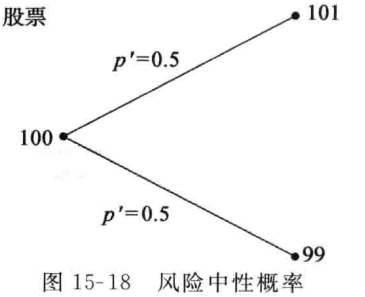


图 15-18 风险中性概率

不要认为这样的 p'在任何意义上是真实的。真实的概率仍然是 60%和 40%。这个计算过程做出了“可以通过简单地计算期望来为股票定价”的假设，这从根本上就是错误的。

没关系，让我们继续待在风险中性世界并且看看风险中性世界的期权价值是多少。我们暂时不要告诉风险中性世界的人们，他们刚刚的计算是“错误的”。

他们是如何给看涨期权定价的呢？他们认为股价上升和下降的概率分别是 50%、50%，并且可以不顾及风险而通过简单地计算期望来定价。那么他们将通过使用上述概率计算期望回报来为期权定价，即

$$0.5 \times 1 + 0.5 \times 0 = 0.5$$

见图 15-19。这就是所谓的**风险中性期望**（risk-neutral expectation）。

我的天哪！他们居然通过错误的推导得到了正确的答案！简而言之，他们已经两次使用定价的基本假设，通过简单地计算期望获得了正确的答案。在这种情况下，两次的错误反而造就了正确的答案。

而且这种方法总是有用的。

风险中性世界的人们可以得到与现实世界完全相同的期权价格（但是却有着不同的理由）。

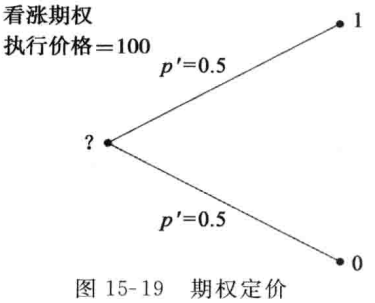


图 15-19　期权定价

利率不为零

当利率不等于 0 时，我们也要执行完全相同的操作。但是无论何时，如果要让不同时间点的价值相等，我们必须考虑现值。

当 $r=0.1$ 时，我们通过下式计算风险中性概率：

$$0.9996 \times (p' \times 101 + (1 - p') \times 99) = 100$$

所以

$$p' = 0.519\ 84$$

期权的预期回报为

$$0.519\ 84 \times 1 + (1 - 0.519\ 84) \times 0 = 0.519\ 84$$

则预期回报的现值为

$$0.9996 \times 0.519\ 84 = 0.519\ 63$$

这就是期权的价格（这与用“另一”方法推导的一样）。

风险中性定价是一个非常强大的方法，我们将会看到更多关于它的应用。但是现在要记住一件事，刚刚计算的风险中性概率 p（第一个例子中的 0.5）不是真实的，它并不存在，只是一个数学上的构想。在我们的例子中，股票价格上升的真实概率一直是 0.6，只是 0.6 从来不用到我们的计算中。

15.11　使用符号来表达

二叉树模型中，我们假设资产的初始价值为 S，在 δt 步长内，资产价值可能

- 上升至 $u \times S$
- 下降至 $v \times S$

其中，$0<v<1<u$（见图 15-20）。

- 资产价值上升的概率是 p，所以资产价值下降的概率为 $1-p$。

注意：通过资产价格乘以常数，而不是加上常数，我们可以构建一棵完整的价格树。这将是对数正态随机游走的一个离散形式。

- 通过选择三个常数 u、v 和 p 的值，使得二叉树式随机游走的漂移和标准差与所要模拟的资产的漂移和标准差一样。

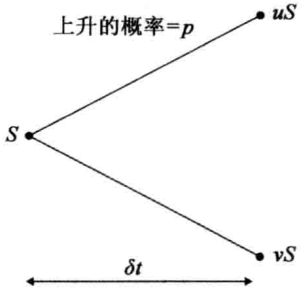


图 15-20 用符号表示的二叉树模型

要达到这个目的，选择绝不是唯一的。我们需要选择三个参数 u、v 和 p 的值，但只要满足两个统计量 μ 和 σ，那么就会有无限种可行的方法。我这样描述有利于教学。

举个例子。

$$u = 1+\sigma\sqrt{\delta t}$$

$$v = 1-\sigma\sqrt{\delta t}$$

并且

$$p = \frac{1}{2}+\frac{\mu\sqrt{\delta t}}{2\sigma}$$

让我们检验一下上述参数的选择是否可行。

15.11.1 资产的平均变动

在一个步长后，资产的预期价格为

$$puS+(1-p)vS = \left(\frac{1}{2}+\frac{\mu\sqrt{\delta t}}{2\sigma}\right)(1+\sigma\sqrt{\delta t})S+\left(\frac{1}{2}-\frac{\mu\sqrt{\delta t}}{2\sigma}\right)(1-\sigma\sqrt{\delta t})S$$

$$= (1+\mu\delta t)S$$

所以，资产价格的预期变动为 $\mu S\delta t$。

- 预期**收益率**（return）为 $\mu\delta t$。

正确。

15.11.2　资产价格变动的标准差

资产价格变动的方差为

$$
\begin{aligned}
&S^2(p(u-1-\mu\delta t)^2+(1-p)(v-1-\mu\delta t)^2)\\
&=S^2\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{\mu\sqrt{\delta t}}{2\sigma}\right)(\sigma\sqrt{\delta t}-\mu\delta t)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{\mu\sqrt{\delta t}}{2\sigma}\right)(\sigma\sqrt{\delta t}+\mu\delta t)^2\right)\\
&=S^2(\sigma^2\delta t-\mu^2\delta t^2)
\end{aligned}
$$

所以，资产价格变动的标准差（近似）为 $S\sigma\sqrt{\delta t}$。

- 预期收益的标准差（近似）为 $\sigma\sqrt{\delta t}$。

正确（大概）。

15.12　期权的定价方程

假设我们知道 $t+\delta t$ 时刻期权的价值。例如，这个时刻可能是期权的到期日。

现在在 t 时刻构建一个由 1 单位期权和 Δ 单位空头头寸的标的资产组成的资产组合。在 t 时刻，该资产组合的价值为

$$\Pi = V-\Delta S$$

其中，期权价值 V 目前是未知的。看得出来这和之前的思路一样，只是现在我们用符号代替了数字。

在 $t+\delta t$ 时刻，取决于资产价格上升或者下降，期权价值为下面两个值之一：

$$V^+ \text{ 或者 } V^-$$

同时，该资产组合的价值为

$$V^+-\Delta uS \text{ 或者 } V^--\Delta vS$$

由于 V^+、V^-、u、v 和 S 已知，上述两个表达式的值只是 Δ 的线性函数。

15.12.1　对冲

通过选取 Δ 的值，使得无论资产价格上升还是下降，该资产组合的价值保持不变。这可以通过以下方程式实现：

$$V^+-\Delta uS = V^--\Delta vS$$

这意味着我们可以选择

$$\Delta = \frac{V^+ - V^-}{(u-v)S} \tag{15-1}$$

来做对冲。

如果股票价格上升，该资产组合的价值为

$$V^+ - \Delta uS = V^+ - \frac{u(V^+ - V^-)}{(u-v)}$$

如果股票价格下降，该资产组合的价值为

$$V^- - \Delta vS = V^- - \frac{v(V^+ - V^-)}{(u-v)}$$

当然，这两个表达式本质上是一个东西。

我们用下式表示该资产组合的价值：

$$\Pi + \delta\Pi$$

这个式子的含义是该资产组合的初始价值加上变动价值。

15.12.2 无套利

由于该资产组合的价值已经得到保证，我们可以认为，该资产组合的价值必须等于其初始价值以无风险利率投资获得的总收益，这就是无套利理论。

因此

$$\delta\Pi = r\Pi\delta t$$

将上面各等式整合，可以得到

$$\Pi + \delta\Pi = \Pi + r\Pi\delta t = \Pi(1 + r\delta t) = V^+ - \frac{u(V^+ - V^-)}{(u-v)}$$

其中

$$\Pi = V - \Delta S = V - \frac{V^+ - V^-}{(u-v)S}S = V - \frac{V^+ - V^-}{(u-v)}$$

最终的结果为

$$(1 + r\delta t)\left(V - \frac{V^+ - V^-}{(u-v)}\right) = V^- - \frac{v(V^+ - V^-)}{(u-v)}$$

整理成 V 的等式，我们有

$$(1 + r\delta t)V = (1 + r\delta t)\frac{V^+ - V^-}{u-v} + \frac{uV^- - vV^+}{(u-v)}$$

给定下一时刻期权的价值 V^+ 和 V^- 与描述资产价格随机游走的参数 u 和 v，这就是一个关于 V 的方程。

但是这个方程可以写得更好看：

$$(1+r\delta t)V = p'V^{+}+(1-p')V^{-} \tag{15-2}$$

其中

$$p' = \frac{1}{2}+\frac{r\sqrt{\delta t}}{2\sigma} \tag{15-3}$$

方程（15-2）左边是现在期权价值所对应的未来价值。

方程（15-2）右边就像一个期望，即事件乘以其发生概率的总和。

假设表达式中含有股价上升的真实概率 p，那么这个表达式就是期权在下一个时刻的预期价值。

我们可以看出股票价格上升或者下降的概率对期权定价而言是无关紧要的，因为 p 未出现在方程（15-2）中。但是如果我们把 p' 解释成一个概率会怎样？那么我们可以说期权的价格是一个期望的现值，但其实这不是一个现实的期望。

我们再次回到风险中性期望。

让我们对比一下 p' 的表达式和真实的概率 p 的表达式：

$$p' = \frac{1}{2}+\frac{r\sqrt{\delta t}}{2\sigma}$$

而

$$p = \frac{1}{2}+\frac{\mu\sqrt{\delta t}}{2\sigma}$$

两个表达式的区别在于一个是用利率 r，另一个是用漂移率 μ，除此之外，它们都是相同的。真奇怪。

- 我们称 p' 为**风险中性概率**（Risk-neutral probability）。它跟现实的概率很像，只是用 r 代替了现实概率中的漂移率 μ。

观察无风险利率在期权定价中扮演两个角色：其一是用于贴现，从而得到现值；其二是作为资产价格随机游走的漂移率。

15.13　概率 p 哪去了

概率 p 和飘移 μ 到底怎么了？

将 p' 解读为一个概率，式（15-2）表明：

- 任何时刻的期权价值是未来任何时刻风险中性期望值的现值。

阅读关于数量金融的书籍和研究论文，你将会经常遇到关于“风险中性”的各种表述，包括风险中性概率。你可以认为期权价值是一个期望的现值，只是这个期望不是现实的期望而已。

别担心，我们还会多次涉及风险中性的思想，直到你最终掌握它的窍门。

15.14 违背直觉

- 两种股票 A 和 B。
- 两者有相同的价值、相同的波动率，并以相同的货币计价。
- 两者都有执行价格和到期日都相同的看涨期权。
- 股票 A 的价值每年翻倍，而股票 B 却每年打对折。

当然，两者的看涨期权价值相等。你会购买哪种？最初可能难以接受：期权价格并不取决于股票价格的变动方向。

15.15 二叉树

刚刚介绍的二叉树模型在下一个步长允许股票价格上升或者下降一个规定的数额。如果股票的初始价值为 S，那么下一个时刻的价值为 uS 或者 vS。我们可以把随机游走扩展到下一个步长。两个步长之后，如果股价在两步都是上升的，则资产价值为 u^2S；如果股价先上升接着下降，或者反过来，则资产价值为 uvS；如果连续两次下降，则资产价值为 v^2S。三个步长后，资产的价值可能是 u^3S、u^2vS 等。想象一下扩展这个随机游走一直到到期日。最终的结构图如图 15-21 所示，其中节点表示资产的价值。这个结构图被称为**二叉树**(binomial tree)。由于资产价格增长的几何特征，观察这棵树如何扭曲。这棵树经常像图 15-22 这样绘制，因为这样绘图比较容易，但是这并不能准确地反映正确的结构图。

每棵树顶部和底部的分枝在到期日只有一条路径可以到达，要么每一步都向上移动，要么都向下移动；而每个到期日的中间价值都有多条路径可以到达。因此，如果做一个模拟，中间价值比两边的价值更有可能实现。因此，二叉树包含了一个近似的对数正态随机游走的概率密度函数。

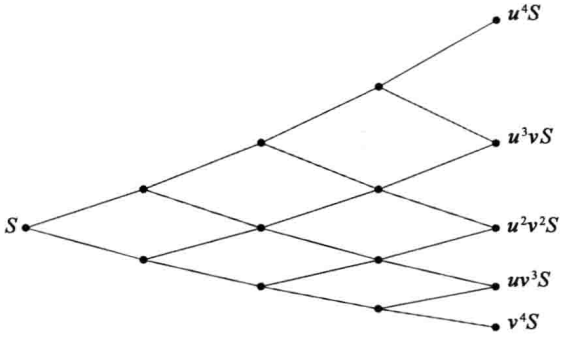


图 15-21　二叉树

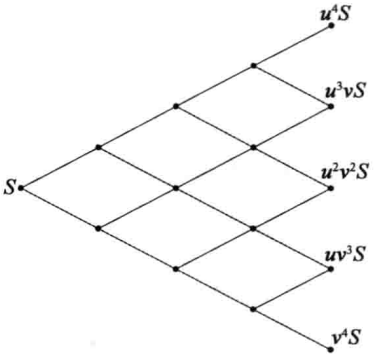


图 15-22　二叉树：示意图

15.16　资产价格分布

到达二叉树上的一个特定的节点的概率取决于到达该点的路径数量以及向上移动和向下移动的概率。因为向上移动和向下移动的概率几乎相等，又因为到达内部的价格点比到达两个极端点有更多的路径，我们可以发现未来价格的概率分布大致为钟形。图 15-23 显示了在 4 个步长后到达各个节点的路径数量以及到达各个节点的概率，图 15-24 显示了一定步长后的概率密度函数。

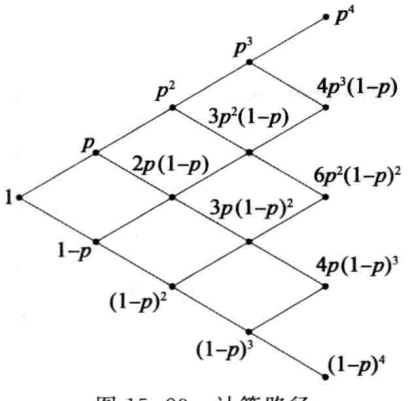


图 15-23　计算路径

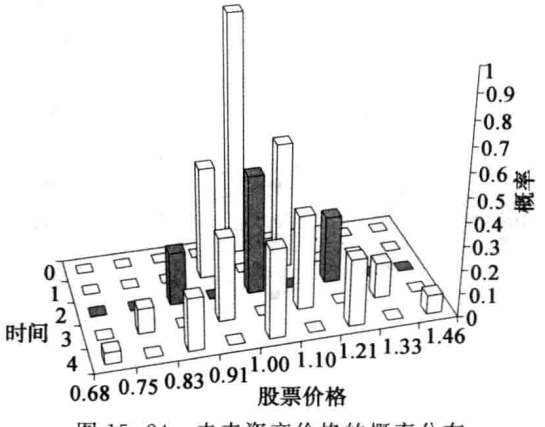


图 15-24　未来资产价格的概率分布

15.17　二叉树倒推定价

我们可以知道到期日的 V^+ 和 V^-，到期时间 T，因为我们知道作为资产函数的期权价值，这个函数就是回报函数。

如果我们知道了到期日的期权价值，就可以得到 $T-\delta t$ 时刻二叉树上所有 S 所

对应的期权价值。知道了这些价值意味着我们可以知道再前一个时刻的期权价值。

- 因此，我们沿着二叉树一直向后推导，直到二叉树的根。

二叉树的根是现在时刻和资产的价值，这样我们就得到了今天的期权价值。这个算法如图 15-25 至图 15-32 所示。

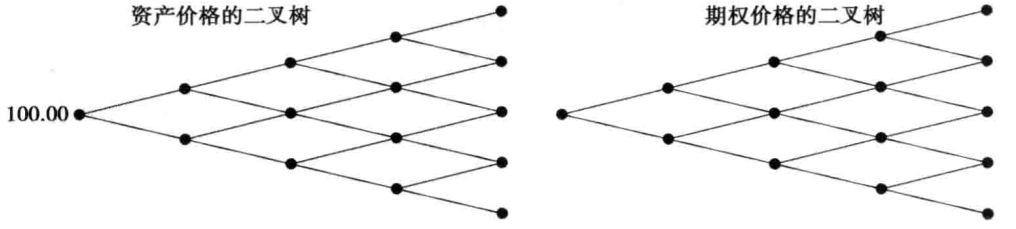


图 15-25 资产和期权的二叉树

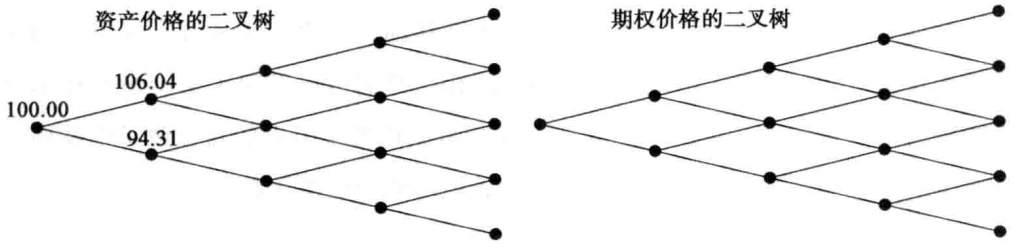


图 15-26 开始建立股价的二叉树

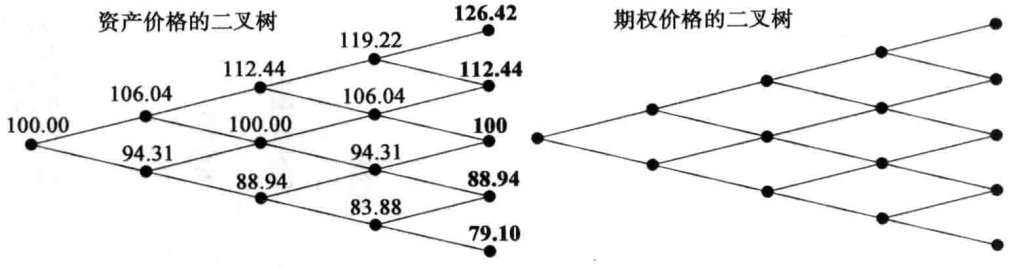


图 15-27 完成股价的二叉树

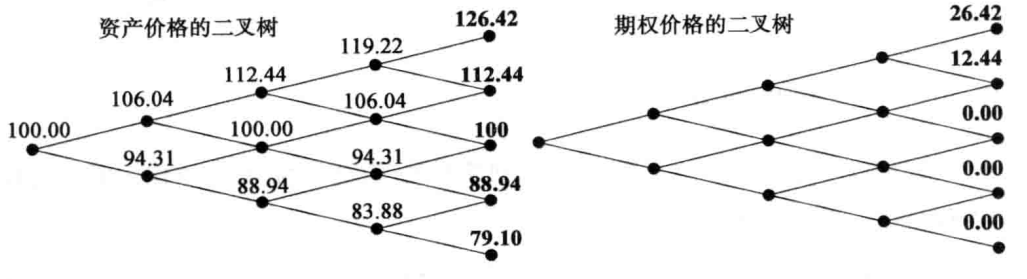


图 15-28 期权的回报

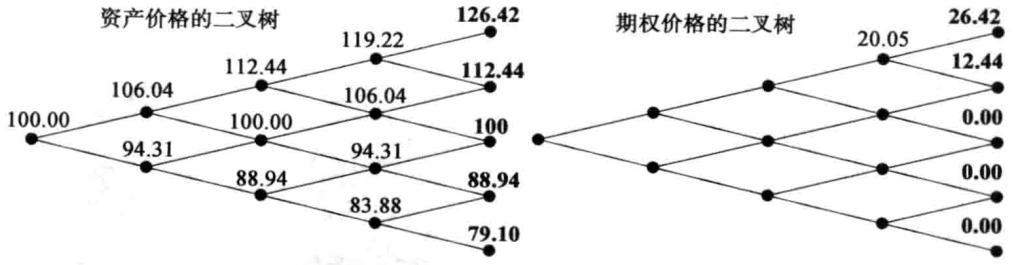


图 15-29　一次向后计算一个“节点”

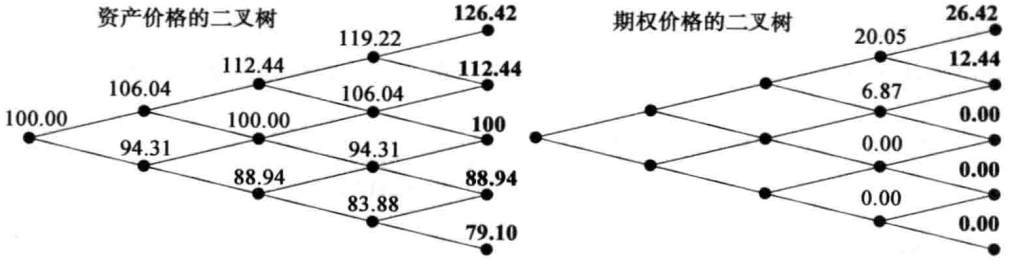


图 15-30　完成第一个步长

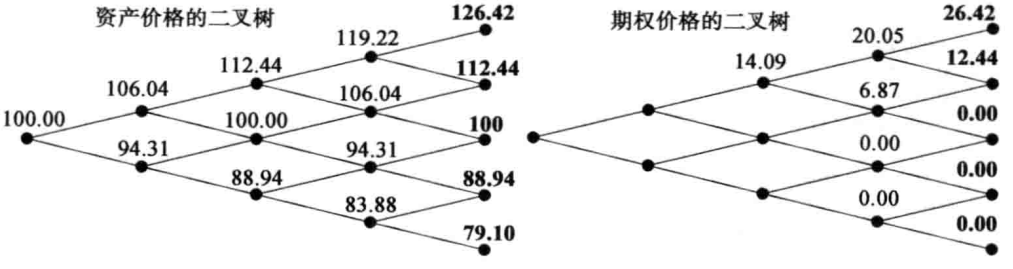


图 15-31　开始下一个步长

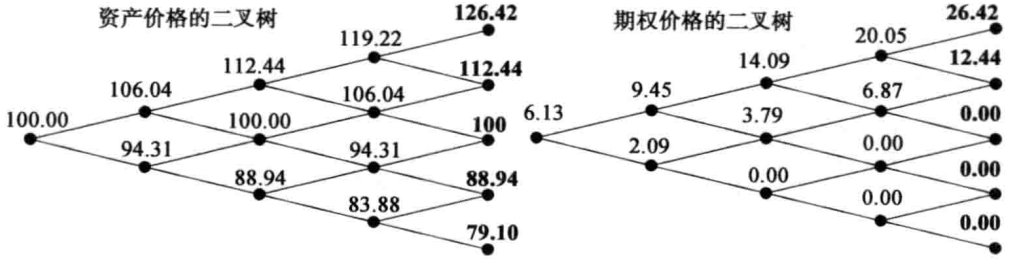


图 15-32　完成期权价格的二叉树，因此现在的期权价格为 6.13

15.18 二叉树模型的编程

在实践中，二叉树模型一般使用编程而不是 Excel 表单的方法计算。这里介绍这样一个函数，它接受标的资产和期权的信息输入，并使用外生定义的回报函数。[⊖] 注意，这个程序涉及生成资产价格$S()$和期权价格$V()$的数组。首先，资产价格数组的建立只是为了找到最后时刻（到期日）每个节点上资产的最终价值，而并不需要使用到其他节点的资产价值。其次，变量j指资产离对应时刻最低节点的距离。

```
Function Price(Asset As Double, Volatility As Double, _
                        IntRate As Double, Strike As _
                        Double, Expiry As Double, _
                        NoSteps As Integer)
ReDim S(0 To NoSteps)
ReDim V(0 To NoSteps)
time step = Expiry / NoSteps
DiscountFactor = Exp(-IntRate * time step)
temp1 = Exp((IntRate + Volatility * Volatility) _
                                          * time step)
temp2 = 0.5 * (DiscountFactor + temp1)
u = temp2 + Sqr(temp2 * temp2 - 1)
d = 1 / u
p = (Exp(IntRate * time step) - d) / (u - d)

S(0) = Asset
For n = 1 To NoSteps
    For j = n To 1 Step -1
        S(j) = u * S(j - 1)
    Next j
        S(0) = d * S(0)
Next n

For j = 0 To NoSteps
    V(j) = Payoff(S(j), Strike)
Next j

For n = NoSteps To 1 Step -1
    For j = 0 To n - 1
        V(j) = (p * V(j + 1) + (1 - p) * V(j)) _
            * DiscountFactor
    Next j
Next n
Price = V(0)
End Function
```

⊖ 二叉树模型的参数化在本章附录 15A 给出解释。

以下是外生定义的看涨期权的回报函数 Payoff（S，Strike）。

```
Function Payoff(S, K)
Payoff = 0
If S > K Then Payoff = S - K
End Function
```

由于我仅用了到期日的资产价格节点，所以上面的程序中可以只使用一个数组，也就是 S 和 V 使用相同的数组。为了让程序更好理解，我让 S 和 V 分开单独表示。当然，我也可以保存每个节点的 V 的值，然而在上面的程序中只保存了现在时点所对应的节点的值。如果需要考察期权价值如何随资产价格和时间的变化而变化（例如需要计算希腊字母），保存所有节点的值就很有必要。

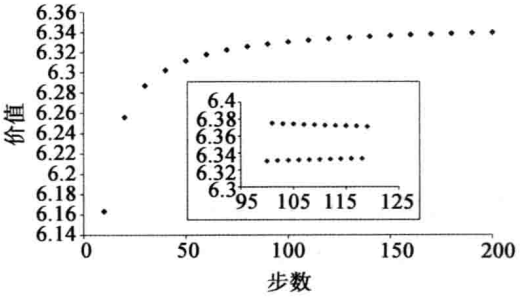


图 15-33　作为步长数量函数的期权价格

图 15-33 显示了通过上述算法计算的期权价格与步数之间的关系。内部的插图是一个局部放大图，观察期权价格的震荡。在这个例子中，奇数步数对应的期权价格太高了，而偶数的步数对应的期权价格太低了。

15.19　希腊字母

希腊字母被定义为期权价值对各个变量和参数的导数，区分是对变量的导数还是对参数的导数非常重要（当然，也可以是同时对两者的导数）。如果只是对资产价格和/或者时间的导数，那么二叉树中有充分的信息来估计这些导数。这可能不是一个准确的估计，但它也是一个估计。期权的 Delta、Gamma 和 Theta 都可以通过二叉树来估计。

另一方面，如果你想估计期权对其中一个参数的敏感性，就必须通过二叉树进行两次计算，比方说期权的 vega 和 rho。

让我们依次考虑这两种案例。

在二叉树模型中，期权的 Delta 定义如下：

$$\frac{V^{+}-V^{-}}{(u-v)S}$$

我们可以直接在二叉树上计算该值。如图 15-34 所示，Delta 的计算用到了标记

为“D”的两个点的期权价值，以及现在的资产价格与参数 u 和 v。这是一个简单的计算。

当步长的极限接近 0 时，Delta 为

$$\frac{\partial V}{\partial S}$$

期权的 Gamma 定义为期权价格对标的资产价格的导数：

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$$

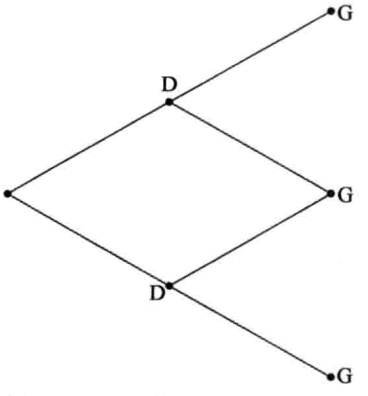


图 15-34 计算 Delta 和 Gamma

用二叉树来估计这个值不是那么明确，用有限差分网格来估计会更容易。然而，Gamma 是衡量我们在下一步需要再对冲数量的指标，我们仍然可以用二叉树计算 Gamma。在下个时刻，我们可以再次利用图 15-34 中 D 标记点的期权价值来计算该时刻的 Delta。那么 Gamma 就是从一个时刻到另一个时刻 Delta 的变动除以它们的时间间隔。这个计算使用了图 15-34 中标记为“G”的点的期权价值。

theta 表示在资产价格不变的前提下，期权价格对时间的敏感性。同样，这在有限差分网格中也比较容易计算。关于 theta 在离散时间下的定义，一个直观的选择是在资产价值不变的假设下对 V^+ 和 V^- 进行插值运算以获得一个理论的期权价值，并依此估计

$$\frac{\partial V}{\partial t}$$

结果为

$$\frac{\frac{1}{2}(V^+ + V^-) - V}{\delta t}$$

随着步长越来越小，这些希腊字母会逐渐接近布莱克-斯科尔斯公式中的连续时间的值。

另一类希腊字母（即对参数求导的希腊字母）的估计稍微困难一些，其难于计算的原因在于必须再次通过二叉树计算。我们将通过计算期权的 vega 来说明。

vega 是期权价值对波动率的敏感性。

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma}$$

假设我们要计算波动率为 20%时的期权价值和 vega。最有效的方法是使用二叉树计算两次期权价格，分别使用不同的波动率。计算波动率为 $\sigma\pm\varepsilon$ 时的期权价值，其中 ε 是一个很小的值，并将得到的两个期权价格的结果记为 $V_{\pm}$。用两者的平均值近似估计期权的价值

$$V=\frac{1}{2}(V_{+}+V_{-})$$

而 vega 近似为

$$\frac{V_{+}-V_{-}}{2\varepsilon}$$

这种思路可以应用于其他的希腊字母。

15.20　提前执行

美式期权的执行行为在二叉树模型的设定框架中很容易刻画。美式期权算法和欧式期权的算法基本相同，只有一点不同。两种期权使用相同的二叉树，相同的 u、v 和 p，但是两者的 V 的计算公式有一个微小的差别。我们必须确保在任何节点上都没有套利机会。

出于即将看到的理由，我将改变符号，令它们更加复杂同时信息量更大。引入符号 S_j^n 表示在第 n 个步长，从底部开始第 j 个节点的资产价格，其中 $0\leqslant j\leqslant n$。这个符号与上面的程序代码是一致的。在对数正态世界里我们有

$$S_j^n=Su^jv^{n-j}$$

其中，S 是现在的资产价格。同样，在相同的节点上引入符号 V_j^n 表示期权价值。我们的最终目标是在知道回报的情况下找出 V_0^0，即知道在第 M 个步长所有 $0\leqslant j\leqslant M$ 的 V_j^M，其中 M 为步数。

回到美式期权的问题，如果任何时刻的期权价值都低于回报值，那么就存在套利机会。如果理论价值低于回报值，那么就应该执行。如果执行了期权，那么其价值和回报必须相等。如果我们发现

$$\frac{V_{j+1}^{n+1}-V_j^{n+1}}{u-v}+\frac{1}{1+r\delta t}\frac{uV_j^{n+1}-vV_{j+1}^{n+1}}{u-v}\geqslant \text{回报}(S_j^n)$$

那么我们选择这个式子作为新的期权价值。但是，如果有

$$\frac{V_{j+1}^{n+1}-V_j^{n+1}}{u-v}+\frac{1}{1+r\delta t}\frac{uV_j^{n+1}-vV_{j+1}^{n+1}}{u-v}< \text{回报}(S_j^n)$$

我们应该执行，并得到一个更好的价值

$$V_j^n = \text{回报}(S_j^n)$$

将两个式子整合一起，可以得到

$$V_j^n = \max\left(\frac{V_{j+1}^{n+1} - V_j^{n+1}}{u - v} + \frac{1}{1 + r\delta t}\frac{uV_j^{n+1} - vV_{j+1}^{n+1}}{u - v}, \text{回报}(S_j^n)\right)$$

从而替代了式（15-2），这可以确保不存在套利机会。这个修改的程序化实现很容易，但值得注意的是：回报函数（Payoff）是一个关于各特定节点上的资产价格的函数。这是个新事物，它在处理欧式期权问题时并未出现，在欧式期权的问题中我们也不必记录每个节点的资产价值。

下面是一个计算美式期权价值的函数，注意该程序与欧式期权执行的程序的差异。除了记录更多信息和更新期权价值以满足无套利条件外，其他的代码都是相同的。

```
Function USPrice(Asset As Double, Volatility As _
                    Double, IntRate As Double, _
                    Strike As Double, Expiry As _
                    Double, NoSteps As Integer)
ReDim S(0 To NoSteps, 0 To NoSteps)
ReDim V(0 To NoSteps, 0 To NoSteps)
time step = Expiry / NoSteps
DiscountFactor = Exp(-IntRate * time step)
temp1 = Exp((IntRate + Volatility * Volatility) _
                                    * time step)
temp2 = 0.5 * (DiscountFactor + temp1)
u = temp2 + Sqr(temp2 * temp2 - 1)
d = 1 / u
p = (Exp(IntRate * time step) - d) / (u - d)

S(0, 0) = Asset
For n = 1 To NoSteps
    For j = n To 1 Step -1
        S(j, n) = u * S(j - 1, n - 1)
    Next j
        S(0, n) = d * S(0, n - 1)

Next n

For j = 0 To NoSteps
    V(j, NoSteps) = Payoff(S(j, NoSteps), Strike)
Next j

For n = NoSteps To 1 Step -1
    For j = 0 To NoSteps - 1
```

```
            V(j, n - 1) = max((p * V(j + 1, n) _
             + (1 - p) * V(j, n)) _
             * DiscountFactor, Payoff(S(j, n - 1), Strike))
        Next j
    Next n
    USPrice = V(0, 0)
    End Function
```

15.21　连续时间的极限

式（15-2）和布莱克-斯科尔斯方程（5-6）的联系远比看起来更加密切。回顾一下，我们知道布莱克-斯科尔斯方程是基于连续时间的，下面检验式（15-2）在 $\delta t \to 0$ 时的情况。

首先，我们选择

$$u \sim 1 + \sigma \sqrt{\delta t}$$

和

$$v \sim 1 - \sigma \sqrt{\delta t}$$

接下来，我们改写变量形式

$$V = V(S,t),\ V^+ = V(uS, t+\delta t) \text{ 和 } V^- = V(vS, t+\delta t)$$

把这些表达式扩展为步长为 δt 的泰勒展开式并且代入式（15-1），可以得到

$$\Delta \sim \frac{\partial V}{\partial S} \text{ 当 } \delta t \to 0$$

显然，二叉树模型中的 Delta 在取极限时变成了布莱克-斯科尔斯方程中的 Delta。

同样，我们使用上述表达式替换式（15-2）中的 V、V^+ 和 V^-，可以得到

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

这就是布莱克-斯科尔斯方程。漂移 μ 再一次从方程中消失了。

15.22　在二叉树模型、布莱克 - 斯科尔斯方程和“其他”世界中的无套利

就像连续时间的布莱克-斯科尔斯模型那样，在离散时间的二叉树模型中，我们也可以通过做出正确的对冲选择来消除资产组合价值中的不确定性。我们发现，在这两种情况下，无论标的资产价格如何变动，资产组合的价值仍然相同。这一点在上面的二叉树模型中体现得尤为明显。

这种对冲只适用于这两种简单、常用的模型。考虑一个简单的一般化：三项式的随机游走过程。

在图 15-35 中我们看到一个三项式随机游走，图 15-36 显示了对冲的资产组合的价值。

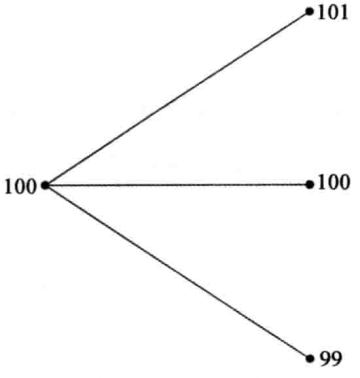


图 15-35 三叉树

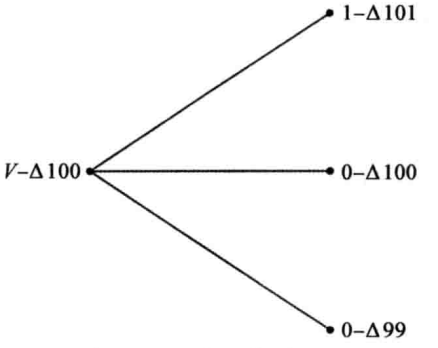


图 15-36 有可能对冲吗

如果我们试图在这种情况下对冲期权会发生什么呢？和之前一样，我们可以用 $-\Delta$ 单位的标的资产做“对冲”。但是现在，我们需要选择一个 Δ，使资产组合（1 单位的期权和 $-\Delta$ 单位的标的资产）的价值在 $t+\delta t$ 时刻不会受标的资产价值的影响。换句话说，我们需要让资产组合的三种可能结果的价值相等。遗憾的是，我们无法通过选择一个 Δ 来确保这个目标。这相当于要用一个变量（Delta 值）来解两个方程（第一个状态的资产组合价值＝第二个状态的资产组合价值＝第三个状态的资产组合价值）。在三项式的世界里，对冲是不可能实现的。事实上，完美对冲和无套利原则的应用只在两个特殊情形中才是可行的：布莱克-斯科尔斯连续时间/连续资产价格世界和二叉树世界。在复杂得多的“真实”世界里，Delta 对冲更是不可能的。[⊖]

15.23 总结

本章描述了二叉树模型的基本知识，推导了欧式期权和美式期权的定价方程

⊖ 这些受欢迎的模型有这样一个不切实际的特征，这样好吗？至少，这些模型是一个很好的起点。我发现对冲只在这两个受欢迎的模型“世界”（布莱克-斯科尔斯模型和二叉树模型）是可行的，这是多么令人着迷。我认为这其中所体现的东西，更多是关于数学模型的建造者而不是金融市场的本质。

和算法。这些方法可以从多方面扩展，如引进股息，考虑百慕大式行权、路径依赖合同，以及为依赖于其他随机变量（如利率）的合约定价。我没有对方法进行深入讨论的原因在于，二叉树方法只是显式有限差分法的一个简化版本。有限差分法将在第六部分进行讨论。有限差分法比二叉树方法有明显的优势，前者更加灵活。

延伸阅读

- 最初的二叉树概念来源于 Cox，Ross 和 Rubinstein（1978）。
- 几乎每一本关于期权的书对二叉树方法的描述都比我深入。其中最好的一个是 Hull（2005），他还描述了二叉树方法在固定收益世界的应用。

附录 15A 另一个参数化方法

通过对三个常数 u、v 和 p 的选择，可以使得二叉树随机游走具有和随机微分方程（3-7）相同的漂移率和标准差。针对三个参数只给出两个方程式，这为我们提供了一个额外的自由度。这个自由度常被用来确定随机游走的一个进一步的属性：资产价格先上升再下降（或者先下降再上升）之后，返回到其变动前的水平 S。[⊖]这要求

$$v(uS) = u(vS) = S$$

即

$$uv = 1 \tag{15-4}$$

我们的出发点是，正态随机游走

$$\mathrm{d}S = \mu S\mathrm{d}t + \sigma S\mathrm{d}X$$

是有解的，见第 4 章 4.14.2 节：

$$S(t) = S(0)\mathrm{e}^{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)\,t+\sigma\phi\sqrt{t}}$$

其中，ϕ 是一个标准正态随机变量。

为了使二叉树随机游走在 δt 时段内有正确的漂移，我们需要

$$puS + (1-p)vS = SE\left[\mathrm{e}^{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)\delta t+\sigma\phi\sqrt{\delta t}}\right] = S\mathrm{e}^{\mu\delta t}$$

即

$$pu + (1-p)v = \mathrm{e}^{\mu\delta t}$$

整理这个方程，得到

$$p = \frac{\mathrm{e}^{\mu\delta t} - v}{u - v} \tag{15-5}$$

然后，为了让二叉树随机游走有正确的方差，我们需要（细节省略）

$$pu^2 + (1-p)v^2 = \mathrm{e}^{(2\mu+\sigma^2)\delta t} \tag{15-6}$$

联立式（15-4）、式（15-5）和式（15-6），可以解得

⊖ 其他的选择也是有可能的。例如，有时设定向上移动的概率等于向下移动的概率，即 $p=1/2$。

$$u = \frac{1}{2}(e^{-\mu\delta t} + e^{(\mu+\sigma^2)\delta t}) + \frac{1}{2}\sqrt{(e^{-\mu\delta t} + e^{(\mu+\sigma^2)\delta t})^2 - 4}$$

大多数情况下都适用的近似值为

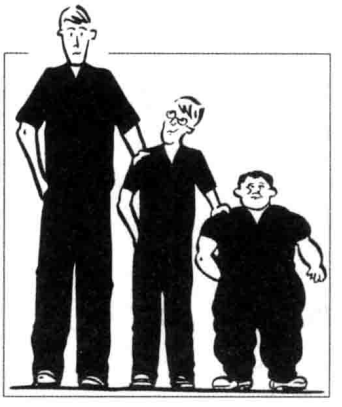
$$u \approx 1 + \sigma\delta t^{1/2} + \frac{1}{2}\sigma^2\delta t$$

$$v \approx 1 - \sigma\delta t^{1/2} + \frac{1}{2}\sigma^2\delta t$$

和

$$p \approx \frac{1}{2} + \frac{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\delta t^{1/2}}{2\sigma}$$

当然，如果使用上述方法定价，必须用 r 替代所有的 μ。



第 16 章

正态近似的准确性

本章内容

- 正态分布为何如此受欢迎
- 正态分布的尾部有多厚
- 正态分布有哪些必要的假设

16.1 引言

毫无疑问，收益率的正态分布假设是数量金融学中最重要的假设之一。由于正态分布的假设带来了很多相对容易使用的分析手段，它的出现促进我们取得了许多巨大的进步。但是，正态分布用于描述如股市崩盘的重大事件的能力却因不切实际而饱受批判：它大大低估了重大事件发生的概率。在这简短的一章中，我们将讨论为什么正态分布如此受欢迎、观测一些简单的与尾部事件有关的统计数据并探讨其他可选方案。

16.2 为什么我们喜欢正态分布： 中心极限定理

中心极限定理（Central Limit Theorem，CLT）表明：“给定一个均值为 m、

方差为 s^2 的原始分布。则随着 N 的增加，样本均值的分布将趋近于均值为 m、方差为 s^2/N 的正态分布。”

所谓“样本均值的分布”，描述的是

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$$

其中 X_i 来自原始分布。

通俗地讲，如果把来自相同“原始”分布的大量随机数加起来，那么你就可以得到一个正态分布，这对任何原始分布都是成立的（这些分布还是受约束于我们马上要看到的一些“细则”）。这也解释了为什么正态分布在实践中非常重要：任何一个由大量随机数加总而形成的分布都会是正态分布。也许，如果把成千上万的股票的日收益率进行加总，那么股票价格的日收益率应该是正态分布。

正态分布只有两个参数——均值和方差，而作为组成单位的原始分布的偏度和峰度不会影响最终分布的确定。

在下列条件“细则”的约束下，中心极限定理是有效的：

- 原始分布必须是相同的分布（每次抽取的样本不能来自不同的分布）。
- 从原始分布抽取的样本必须是互相独立的。
- 原始分布的均值和标准差必须是有限的。

各种一般化的中心极限定理通过削弱上面条件的要求而成立，但我们将不涉及这方面的内容。

16.3　正态分布和对数正态分布

我经常问新生，布莱克-斯科尔斯模型中假设资产收益率服从什么分布，（在我“正确地”教他们之前）回答正态分布和对数正态分布的通常各占一半。而当问题变为一般的资产收益率假设服从什么分布时，我得到了相同的答案。

你将会知道，对收益率的简单假设是其服从正态分布，但如果漂移率和波动率两个参数均为常数，那么该资产价格服从对数正态分布。

这里有一个快速的方法，用来证明和解释对数正态分布只依赖于中心极限定理。

初始股票价格为 S_0。假设股票收益率为随机变量 R_1，可以得到下一个时刻

的股票价格 S_1：

$$S_1 = S_0(1+R_1)$$

在第二个时刻之后，假设股票收益率为随机变量 R_2，则股票价格为

$$S_2 = S_0(1+R_1)(1+R_2)$$

在 N 个时刻后，股票价格为

$$S_N = S_0 \prod_{i=1}^{N}(1+R_i) \tag{16-1}$$

股票价格 S_N 服从什么分布呢？

利用中心极限定理，我们很容易得到答案。对式（16-1）两边取对数可得

$$\log(S_N) = \log(S_0) + \sum_{i=1}^{N}\log(1+R_i)$$

由于 R_i 是随机的，$\log(1+R_i)$ 也是随机的，所以这里我们也是把许多随机数进行加总。如果 R_i 来自相同的分布（而且中心极限定理的其他条件也成立），而且 N 很大，则这个总和趋于正态分布。这就是对数正态分布的含义。一个随机变量的对数服从正态分布，则该随机变量服从对数正态分布。因此，S_N 服从对数正态分布。

16.4 正态分布的尾部肥厚吗

许多证据表明，收益率的分布曲线的尾部是肥厚的。计算 1980 年至今的 S&P 指数的日收益率的概率密度函数。图 16-1 画出了日收益率的经验分布（进行标准化，使得均值等于 0 标准差等于 1）和标准正态分布。这对指数、股票和汇率等任何金融数据来说都是一个典型的分布图。经验分布的峰值比正态分布尖而且尾部也比正态分布肥厚（即使从图中很难看出）。目前，尖峰并不那么重要，但是尾部非常重要。让我们观测一些非常简单的统计数据。

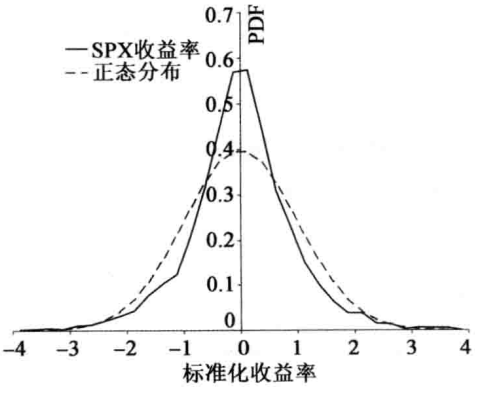


图 16-1 SPX 收益率的标准化概率密度函数和正态分布的概率密度函数

我们将使用著名的 1987 年 10 月 19 日股市崩盘的数据进行说明。当天标普 500 下跌了 20.5%。我们会问："标普 500 指数一天内下跌 20%的概率是多少？"我

们将从经验数据和理论数据中得到答案。

16.4.1　SPX 下跌 20%的概率：经验分析

从 24 年的日收益率数据分析，我们通过经验分析证明 SPX 在一天内下跌 20%的概率是 24×252 分之一，即 0.000 165。当然，我们可以得到复杂得多的答案，甚至使用极限理论的思想进行求解，但现在我们只需要一个粗略结果。对这个大概之数已经足够满意。

16.4.2　SPX 下跌 20%的概率：理论分析

为了获得正态分布基础上的理论估计值，我们首先必须估计 SPX 收益率的日标准差。在此期间内，SPX 收益率的日标准差为 0.0106，相当于平均波动率为 16.9%。当标准差等于 0.0106 时，日收益率下跌 20%或者更多的概率是多少？结果惊人的小：大约为 1.8×10^{-79}，这意味着 2×10^{76} 年才发生一次。

经验分析的结果是：25 年发生一次，而理论分析的结果是：2×10^{76} 年发生一次。尾部事件采用正态分布的假设是多么糟糕！

16.5　不同分布的估计情况

正态分布在描述收益率方面欠佳，这听起来是一个非常令人信服的驳回正态分布的理由。也许我们应该更加科学，使用更加贴近实际的分布。这无疑是另一种选择。使用更加贴近实际的分布的问题在于它们具有难以处理的特征。例如，最能拟合收益率情况的分布曲线可能尾部非常厚，以至于其标准差无穷大（见表 16-1）。

表 16-1　正态分布与厚尾分布的比较

正 态 分 布	厚 尾 分 布
数学基础简单	数学基础难
低估了崩盘等小概率事件	良好估计了崩盘等小概率事件
实际工作者的方法	科学家的方法
标准差∝波动率	标准差＝∞
收益率∝$\delta t^{1/2}$	收益率∝$\delta t^{1/2+}$
可以 Delta 对冲	不可以 Delta 对冲，必须接受风险
风险偏好无关紧要	必须引入风险偏好
局部模型，只使用微分	全局模型，不仅使用微分，还使用积分

这个观察结果与前面中心极限定理的条件非常吻合。如果每个交易时刻获得的收益率序列的标准差无穷大，那么我们认为日收益率不服从正态分布。

你可以想象这给我们带来了什么阻碍。在经典理论中，标准差用来衡量风险，甚至它还有一个很响亮的名称“波动率”（年化后）和一个表示符号“σ”。如果没有这些理论，有些事情会变得比较复杂。如果标准差不存在，那么 Delta 对冲将不能实现、风险偏好要重新建模，而且期权定价方程会变成更加复杂的偏积分和偏微分方程（其中积分部分来源于所有股票价格对应的期权价值之间的关系）。我们需要舍弃表现相当不错的基于微分学的局部布莱克-斯科尔斯方程，代之以包含积分学的全局模型。延伸阅读部分将会介绍主要从事这一领域研究的学者。

当然，还有其他模拟厚尾分布的方法存在，而且不要求标准差无穷大，这一部分内容将在本系列书第五部分讨论。

16.6 序列自相关

正态分布可能不适用的另一个原因是每个交易时刻的股票收益率序列或者每天的股票收益率序列可能是自相关的。例如，序列自相关指今天的收益率和昨天的收益率具有相关性。一种可能情况是这样的：一次价格上升之后，更有可能发生的是再一次的价格上升，而不是价格下降。这就是正的序列自相关。

仍然有证据支持自相关的存在，也许平均上看自相关程度不强，但在特定时期（尤其是日内交易），自相关性的影响足够破坏正态分布。

股价收益率的序列自相关性研究很少被写入书本，而且几乎没有在这个框架下的价格衍生品研究。但在第 65 章，我们将展开这一部分内容的讨论。

16.7 总结

在大多数情况下，我个人偏好使用正态分布的假设，而把尾部事件单独处理。因此，我时刻谨记股票价格可能会出乎意料地显著下降。我们可以采取措施预防这样的事件发生，例如购买尾部事件保护产品（如虚值期权）或者多样化投资组合，而不是把所有的钱都投资在少数股票上。我们将在第 43 章看到当所有

股票同时发生尾部事件时，市场是如何崩盘的。

延伸阅读

- Jim Gatheral 在厚尾分布的定价问题上做了很多研究。
- 参见 Joshi（2003）关于方差 Gamma 模型的详细内容。该模型使用了厚尾事件随机发生的想法，这个想法由 Madan 和 Seneta（1990）首次引入，由 Madan，Carr 和 Change（1998）再次拓展。
- 参见 Kyprianou，Schoutens 和 Wilmott（2005）的 Levy 过程和奇异期权定价。

第 17 章

从黑杰克和赌博学到的投资经验

本章内容

- 黑杰克的规则
- 黑杰克的策略与数牌法
- Kelly 准则和资金管理
- 赌马中的无套利

17.1 引言

每当我做关于资产组合管理或投资决策中的数学等主题讲座时，我经常以扑克牌游戏“黑杰克”的描述作为开场。这是一个规则简单且为大多数人所熟悉的游戏，它还有几个别名比如 21 点、pontoon（英式 21 点）或者 *vingt-et-un*（法文 21 点之意）。黑杰克的规则十分简单，且每一盘时间很短，小孩都能很快上手并让他们初次尝尝赌博的滋味。如若没有赌博元素，黑杰克这个游戏也就失去了意义。

由于规则很简单且概率易被研究，黑杰克也是一个学习风险、收益、资金管理等概念的完美游戏；甚至更重要的，它能帮助你认识自己属于哪个种类的赌徒。到

底你是风险厌恶者还是风险爱好者呢？这对于任何一个不久后要去银行工作，或者用他人的钱（OPM）去“赌博”的人来说，还真是一个相当重要的问题。

尽管黑杰克是一个学习金融风险与收益的完美的例子，尽管银行里的培训经理们也很喜欢通过这个游戏来进行风险控制训练的想法，我依然经常被培训经理要求更换讲座的题目。“您可不能开一场叫做‘从黑杰克和赌博学到的投资经验’的讲座啊，我们可会惹上麻烦的（监管者会来）。”这种想法可真是愚蠢。任何一个不认为投资与赌博有着根本共同点的人都是愚蠢的。我甚至可以更加极端地说，我认识的一些职业赌徒对风险、收益以及资金管理的认识比我所认识的绝大多数风险经理都要深刻。

在本章，我们将领略到这些职业赌徒的一些思想。

17.2　黑杰克的规则

黑杰克的玩家们围坐在一个肾形的桌子前，对面站着的是庄家。鸟瞰示意如图 17-1 所示。

未发牌前，玩家必须在他面前桌上的对应位置上下注。庄家给每位玩家和自己发两张牌（庄家其中一张牌是正面朝下的）。此时的状态和图中所示的状态一致。人头牌（K、Q、J）以 10 点计数，A 以 1 点或 11 点计数，其他牌以牌面值计数。A 的计数选择由玩家自己决定。

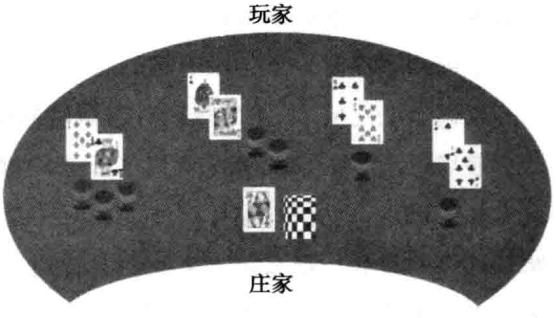


图 17-1　黑杰克桌面布局

玩家的目标就是：在不超过 21 点的前提下（否则称为“爆点”），拥有比庄家更高的点数。

如果玩家的初始两张牌是一张 A 与一张 10 点计数牌，那他拥有的这手牌被称为“黑杰克”或“天牌”（natural）。庄家要向拥有天牌的玩家赔付其初始筹码的 150%，除非庄家也是天牌，此时这一局被称为平局或僵局，双方没有输赢。

庄家将从左手方向开始顺时针依此询问玩家选择要牌还是停牌。“要牌”的意思是要求庄家向该玩家再发一张牌，“停牌”的意思是停止发牌。如果玩家选

择要牌导致爆点，他立即输掉筹码。玩家可以不停地要牌直到满意或者爆点。

当然，玩家还可以有别的决策。

规则允许玩家对初始的两张牌进行翻倍加注，此时庄家只给该玩家再发一张牌。这种玩法叫做“加倍下注”。

如果玩家初始两张牌是个对子，他可以选择把这对牌分成两手牌，补上等额的下注后以相互独立的两手牌继续游戏。这种玩法叫做“分牌”。一对 A 分牌后只能再发一张牌，且分牌后的 A+10 只能以 21 点计数而非“黑杰克”。如果庄家的面牌是张 A，玩家可以买保险。保险是不超过初始筹码一半额度的一个新的下注。如果庄家的底牌是 10 点计数牌，玩家的保险注可以赢得 200%的筹码；如果庄家的底牌不是 10 点计数牌，玩家的保险注输掉且游戏继续。

有的时候规则允许玩家“投降”。如果选择投降，玩家退出这一盘比赛但是输掉初始筹码的一半。

庄家是不能做任何决策的。他面对发牌和停牌决策时必须始终遵循简单直接的规则执行：在 16 点及以下必须要牌、在 17 点及以上必须停牌。某一些赌场内，庄家被要求在软 17 点（A 作为 11 点而非 1 点计数时）也必须要牌。无论玩家的点数为多少，庄家必须如此行事。

平局或僵局时，虽然没有输赢，但是桌上的筹码要保留到下一局。

不同赌场之间 21 点的规则有着微妙的差别，牌的副数也同样如此。

赌场比玩家更有优势，所以一般来说赌场在长期是稳赢的。其优势就在于：玩家如果爆点，立刻就输掉赌注，即便庄家最终也爆点。这个不对称的规则就是赌场优势的核心。那么接下来我们会看到，玩家优势在于，他可以改变下注的金额与下注的策略。第一本关于黑杰克的书是爱德华·索普在 1962 年出版的《战胜庄家》。在这本书中，索普教授解释了赢得黑杰克游戏的关键点是：

- 策略：知道何时该要牌、停牌或者加倍等。这取决于你持有的牌与庄家的面牌；
- 信息：知道未发牌叠中大概的组成部分，有些牌是玩家偏好的而有些牌是庄家偏好的；
- 资金管理：如何下注，什么时候下小注，什么时候下大注。

17.3 战胜庄家

第一个关键点是，必须把握最优的策略，主要指选择要牌还是选择停牌的策

略。如果你的手牌是一张 8 和一张 4 而庄家的面牌是一张 6，你该怎么做？最优策略具体应包括：何时分牌、加倍（双倍初始下注后只发一张牌）或者再发一张牌。索普通过计算机模拟了上千局黑杰克以计算最优策略。在畅销书《战胜庄家》中，索普给出了如图 17-2 所示的最优策略。

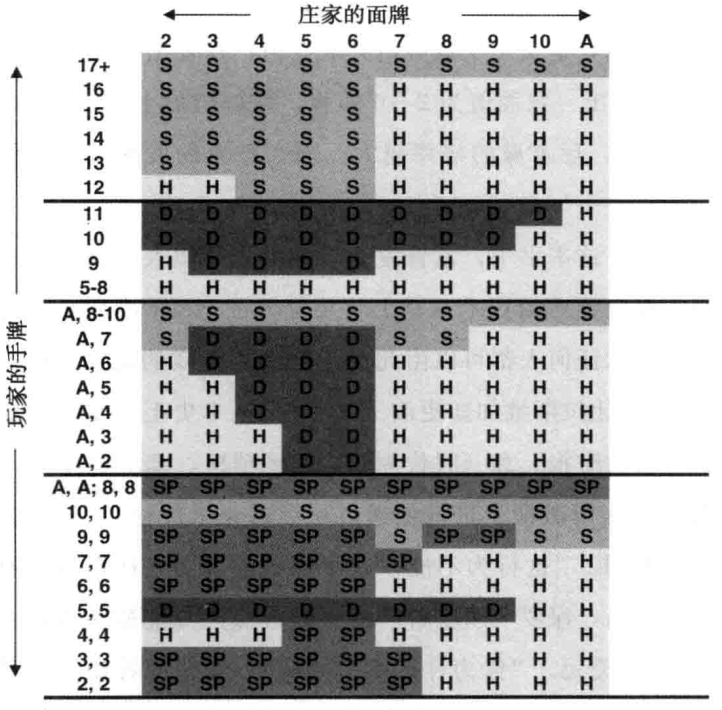


图 17-2　玩家的基本黑杰克策略

但是如果没有第二个关键点，仅有最优策略依然是不够的。

一旦提到“数牌玩家”的说法，大家脑海里可能都会浮现起假日博士的超大号帽子。现实其实平凡了很多。数牌术其实并不需要记住全部牌，它只要求玩家在游戏进行的过程中追踪记录已发的牌，把握剩余牌叠中各类别计数牌的相应比率。与轮盘赌不同，黑杰克是有“记忆”的，每局中将发生的事依赖于之前已发出的牌。

低计数牌（2 点到 6 点）数量比较多的牌叠将对庄家有利。回忆一下，庄家在 16 点及以下时都必须要牌，那么高密度的低计数牌将提高庄家不爆点又靠近 21 点的概率。举个例子，如果将牌叠中的 5 全部拿走，玩家获胜的概率将提高 3.3%！另一方面，牌叠中 10 点计数牌（10 和人头牌）和 A 的数量较多将对玩家有利：庄家更容易爆点，玩家也更容易拿到“黑杰克”（用最初两张牌得到了 21

点）并获得150%的回报。最简单的数牌术只要求玩家对未发出的A和10点计数牌的比率有一个粗略的心算把握。当然，实际操作可以用更复杂的方法。当剩余牌叠对玩家有利时，他应该提高下注；如果剩余牌叠对玩家不利，他应该降低下注（此类下注调整必须要足够隐蔽，以防引起庄家或监赌人的警觉）。

下面介绍一种最简单的数牌术，它要求在整个发牌的过程中进行心算。在未发牌的初始牌叠状态，定义一个数牌值并取0值；每发出一张A或者10计数牌，数牌值减去1；每发出一张面值为2～6的牌，数牌值加上1。数牌值越大（除以大概的剩余牌数后），玩家赢的概率越大。而在整桌的发牌过程中你都必须进行心算。

在《战胜庄家》这本书中，索普发表了他的思想以及“实验”的结果。他将算牌术的思想、资金管理的技术（马上将要提及的Kelly准则）和最优操作策略结合成系统，并表示任何人都可以由此成为黑杰克游戏的赢家。就像该书封面上写的那样，“这本书让拉斯维加斯更改了规则”。这本史上最重要的赌博书籍理所当然地登上了《纽约时报》和《时代周刊》的畅销榜，卖出超过70万册。

虽然对概率与赌博激情十足（他通过玩黑杰克来放松），但索普本人并不能达到职业赌徒的标准。“这行为不能一辈子都挑战智力，所以我没有选择它”。

在一个电影片场，保罗·纽曼曾问索普通过黑杰克能赚多少钱？索普告诉他的数字是一年30万美元。“你为什么不去赌呢？”索普回答说，他只需花费同样的精力便可以在更好的工作环境与更高层次的人打交道并赚到更多的钱。这说得再正确不过了——索普带着他的统计知识、科学的苛严态度以及资金管理技能进入了世界上最大的赌场：股票市场。

赌赢黑杰克的小结

- 如果没有策略，你将很快输光。如果你的策略是复制庄家的规则，那么庄家优势为5%～6%。
- 最优的策略包括要牌停牌决策、分牌决策、双倍决策、买保险决策等。所有这些决策都基于你自己的两张手牌与庄家的面牌。如果你能时刻把握最优策略，你可以令输赢概率大致持平。
- 要想赢得黑杰克必须反复练习以及学会数牌术。
- 如果你可以掌握最优策略并且做到在优势时下大注在劣势时下小注，长期来

说你是可以赢的。

这与投资又有什么关系呢？

在本章接下来的两节，我们将看到如何利用对概率的估计（比如，从黑杰克的数牌术或股票价格收益的统计分析中得到）来最优化管理资金。

17.4　黑杰克赌局中利润的分布

首先介绍一些黑杰克赌局的分布的记号。ϕ 是一个随机变量，表示单次下注的结果。每一个 ϕ 都将对应一个概率。假设 ϕ 的均值为 μ，标准差为 σ。

在黑杰克的规则里，ϕ 的取值是离散的：

如果玩家输了，$\phi = -1$

如果平局或僵局，$\phi = 0$

如果玩家赢了，$\phi = 1$

如果玩家拿到天牌，$\phi = 3/2$

分布函数如图 17-3 所示。

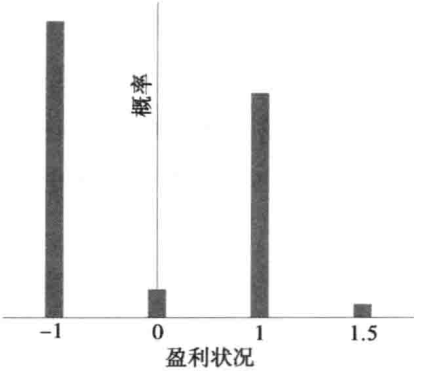


图 17-3　黑杰克赌局的概率密度函数（示意图）

17.5　Kelly 准则

考虑一个具体的例子来引入资产选择和资金管理的思想：你有 1000 美元可用于投资且唯一的投资选项是到赌场里去玩黑杰克。

如果没有策略，你将很快输掉你的钱，概率将一如既往地站在庄家那一边。如果你选择完全复制庄家的发牌规则，庄家具有的优势为 5%～6%。这是因为无论庄家最终是否爆点，你若爆点就输给庄家。最优策略是存在的，包括要牌停牌决策、分牌决策、双倍决策、买保险决策（几乎永远不买保险）等。这些决策都基于你自己的两张手牌与庄家的面牌。如果你能时刻把握最优策略，你可以令输赢概率大致持平，精确的计算结果依赖于每个赌场的具体规则。

持续地赌赢黑杰克有两点要求：耐心和数牌术。后者仅仅是要求追踪记录，

比方说，牌叠中剩余的 A 和 10 点计数牌的张数。未发牌叠中的 A 和 10 点计数牌可以提高玩家的获胜概率。如果你运用最优策略并在剩余牌叠中有很多 A 和 10 点计数牌时下高注，否则下小注，那么长期的表现将很乐观。提句题外话，如果有哪个赌场经理读到了这里我想向他保证：我可从未熟练掌握数牌术，可别给我下禁令。不过另一方面，我似乎又经常能赢，这也许是选择性记忆。

下面将介绍的是 **Kelly 准则**（Kelly criterion）。这是一个非常简单的方法，可以用于优化你的下注决策或者是投资决策，以最大化你的长期平均增长率。这属于资金管理领域的一个主题。虽然接下来依然会用到黑杰克作为具体示例，不过并不是局限于黑杰克所独有的技术。只要你有优势而且对结果的真实发生概率有一定的想法，Kelly 准则也同样可以被运用在任何一个赌博游戏或者投资当中。Kelly 准则的思想拥有久远而迷人的历史，具体可见 Poundstone (2005) 撰写的书。在该书中你也可以看到该思想如何将经济世界与赌博世界区分开来。

我们将继续使用符号 ϕ 来标记每一局黑杰克的结果，但鉴于各局间的差别我们给它添加一个下标，ϕ_i 代表第 i 局赌博的结果。

假设我在第一局下的注占全部 1000 美元的比率为 f，这一局之后我将拥有多少钱呢？其数量将是

$$1000(1+f\phi_1)$$

其中角标“1”代表第一局。

在接下来的第二局，我将依然按总额、比率 f 进行下注。那么两局之后我拥有的资金量为[⊖]

$$1000(1+f\phi_1)(1+f\phi_2)$$

M 局之后我有

$$1000\Pi_{i=1}^{M}(1+f\phi_i)$$

那么，我该如何选择 f 的大小呢？

如果 f 很大（比如说取 1），即便预期回报是正值我也注定将最终全部输光。如果 f 很小，那么得到可观利润需要一个相当长的时间。这两种极端情况都在图 17-4 中体现出来。

⊖ 用数牌术赌博时不会如此操作，玩家会不断改变 f 的量。

也许会有一些下注的中间地带令我在不冒全额风险的前提下获得合理的利润，这也确实是存在的。接下来就是做数学的时候了。

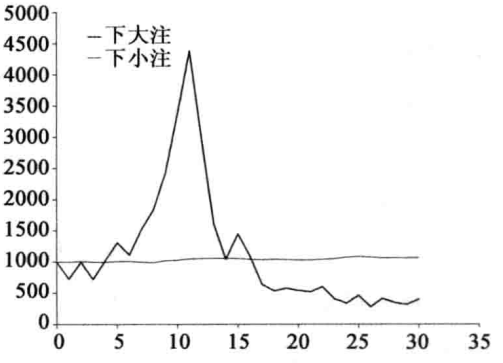


图 17-4　下大注与下小注

我将通过选择比率值 f 来最大化我的长期预期增长率。当然你也可以选择其他的最优目标比如预期财富值的最大化。不同的目标选择各有利弊。

预期增长率最大化是对冲基金的一个直观的目标，因为平均增长率是任何潜在投资者都会关注的一个指标。

该增长率的表达式为：

$$\frac{1}{M}\log(1000\prod_{i=1}^{M}(1+f\phi_i))=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\log(1+f\phi_i)+\frac{1}{M}\log(1000)$$

假设每一局的结果之间是相互独立的，[⊖]那么其预期值为

$$E[\log(1+f\phi_i)]$$

其中忽略了常数项 log（1000）。

将对数函数表达式依泰勒展开，我们能得到

$$E\left[f\phi_i-\frac{1}{2}f^2\phi_i^2+\cdots\right]$$

现在假设均值很小但标准差不小，我们发现长期预期增长率近似地等于

$$f\mu-\frac{1}{2}f^2\sigma^2 \tag{17-1}$$

将其最大化，可知最优时取

$$f^*=\frac{\mu}{\sigma^2}$$

得到预期增长率为每局

$$\frac{\mu^2}{2\sigma^2}$$

如果 $\mu>0$，那么 $f>0$ 且长期来说我们是盈利的。如果 $\mu<0$（就像玩轮盘赌或者一个幼稚的黑杰克策略），那么你的投资数额应该为负，也就是说开家赌场

⊖ 当然，这个假设对黑杰克来说并不严格准确。

（如果你必须玩轮盘赌，那你可以在一个颜色上赌上你这辈子所有的身家财产且只赌一次。如果这样，你不但拥有几乎50%的概率令财产翻倍，也获得了无法估价的资深玩家名誉）。

令长期增长率最大化的最优投资量被称为Kelly准则（或Kelly点）。

图17-5中绘出了式（17-1）描述长期预期增长率的方程。该示例中取$\mu=0.01$和$\sigma=1$。从图中你可以看到最优下注比率是最大化该函数的点，也就是Kelly点。该点左边的区域属于保守型；右边属于疯狂型。我称之为疯狂型的原因是跨越到最优点的右侧将增加盈利的波动率并降低其均值。在两倍Kelly点处你的预期盈利将降到0；在该点右边的预期盈利为负值。

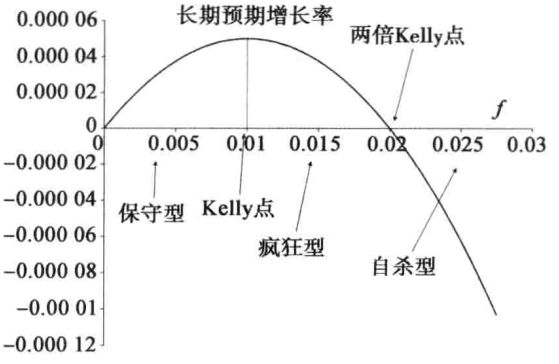


图17-5 长期预期增长率作为投资比率的函数

由于在现实操作中，你很少能够确切知道概率，所以保守型下注是有道理的，以防万一落入疯狂型区域。因此很多人选用“半Kelly点”的下注方法，即选取Kelly点的一半作为下注比率进行下注。用此种方法能有效地让玩家远离疯狂型区域，而预期增长率只降低25%。

如果你一个晚上可以玩M局，使用Kelly准则将获得的预期总收益为

$$\frac{\mu^2 M}{2\sigma^2} \tag{17-2}$$

这给出了一个选择资产组合的可能的方法，包括对哪些资产进行投资（黑杰克）以及投资的量取多少（f^*）。当面对其他可能的投资机会时，你可以依据“式（17-2)最大化”规则来进行决策。这个规则将依赖于收益率的均值、标准差以及该投资机会的发生频率。这些思想对技术分析师和图表分析师来说尤为重要，他们的交易往往基于一些信息比如黄金交叉、碟形底以及头肩形等。除了这些信号的风险和收益率很重要外，其发生频率也相当重要。

Kelly准则的目标是最大化长期预期增长率，很多人认为这是一个会导致大

额亏损的相当激进的策略。确实，还有许多其他的最优化数量方法存在，所以 Kelly 准则也许并不适用你。你可以选择最小化损失或者最大化经风险调整的收益率等目标，这些内容将在下一章进行讨论。

17.6　你可以赢得轮盘赌吗

让我们回到爱德华·索普，不过要回到他研究黑杰克之前的几年。

1955 年春天，爱德华·索普正在 UCLA 物理系读研究生二年级。在一个周日的下午茶时间，他与同事聊到怎样可以赚到“快钱”。话题焦点很快锁定在了赌博上，特别是轮盘赌。究竟有没有可能预测到旋转转盘的结果呢（预测精度至少要达到可利用的程度）？他的一些同事认为，轮盘打造得极其精细，以至于无法找到哪怕一点点瑕疵，更别提利用这些瑕疵赚钱了。但是索普的观点很简单：如果轮盘是完美的，那么通过最简单的牛顿定律就能够预测球的路径和最终的落点。

索普在 20 世纪 50 年代末期投入到这个问题的研究。他反复在一个廉价的微缩轮盘上实验，对球的转动进行录像和计时。1959 年他曾与信息理论之父克劳德·香农（Claude Shannon）有过一次交流。他们开始交谈的话题从最初的黑杰克很快转移到了轮盘赌上。香农被深深地吸引住了。不久之后，他们在香农家中第二次见面。香农家的地下室里到处都是各种机械以及工程学的小装置，真是进行轮盘赌实验的完美游乐场。

索普与香农两人携手把轮盘赌的研究推到了新的高度：他们投资了 1500 美元买了一个实际大小的专业轮盘。根据实验校准了一个简单的数学模型，以尝试预测小球将要落入待定空格的时机。通过这个模型，他们可以对一个特定数字进行预测，标准差是 10 个空格。对于单数字押注来说，这相当于 44%的优势。[⊖] 在特定的八分圆区押注能给他们带来 43%的优势。

1960 年 11 月到 1961 年 6 月，索普和香农设计并制造了世界上第一台可穿戴电脑。他们通过脚拇指的拨动向拥有 12 个晶体管的烟盒大小的电脑录入数据。拨动一次可以初始化电脑而之后的拨动用于对小球和转子的转动进行计时。电脑的预测结果通过耳机中的八种声音的一种传达给玩家（索普和香农认为最优的下

⊖ 优势（edge）在这里指的是预期收益率。以美式单数字轮盘赌为例，由于轮盘上共有 38 个数字，押中某个数字的概率为 1/38，而赔率为 35∶1。对于玩家来说，他输掉赌注的概率为 37/38，而赢 35 倍的概率为 1/38，因此其优势（预期收益率）等于 $-1\times37/38+35\times1/38=-5.26\%$。——译者注

注方法是八分圆区的下注方法而不是押注于单个数字。因为信息理论之父知道，面对 n 个选项进行选择将花费的时间是 $a+b\log(n)$)。

1961 年夏天这台电脑在拉斯维加斯得到实验。如果不是因为电线损坏以及耳机掉了出来，这将是一次成功之行。之后有很多类似的系统被制造出来，如针对幸运大转盘的系统——它甚至拥有 200%的优势。1985 年 5 月 30 日，内华达州颁布法令，禁止在赌场使用任何可以对结果做出预测或进行概率分析或策略分析的设备。

17.7 赌马和无套利

之前我们已经看到了多次，没有套利机会如何导出风险中性定价的思想。期权的价值可以解读为预期回报的现值，该预期是风险中性路径下的预期。在这里，风险中性的含义是：资产价格的增长率与无风险利率的增长率一致。换句话说，我们对该资产的价格在未来的真实行为（以增长率体现）的信念其实是不重要的。我们甚至不需要知道一个资产价格的增长率而只需知道其波动率就能为它的期权定价。

我们可以在体育类博彩领域看见一些类似的现象。

17.7.1 为一项体育比赛设置赔率

在赛马、足球比赛或者棒球比赛中，博彩赔率的设定并不与一匹马或某参赛队伍获胜的真实概率相联系。由于博彩赔率的设置直接取决于下注的行情，庄家/博彩经纪人是一定不会亏钱的。举个例子，在一场英格兰与德国的足球比赛中，德国更可能打赢比赛，但是狂热的英格兰球迷被爱国情绪鼓舞将下重注押英格兰队赢（假设）。此时英国的博彩经纪人开出的赔率将体现这种下注情形，以至于从赔率上看英格兰队获胜的概率更高。

当然，在德国的情况会完全反过来。当你身处英格兰时，最优的下注策略将是押德国队赢；身处德国时，押英格兰队赢的策略更优。不过，实际上一个国家的博彩经纪人都会根据其他国家的下注情况来调整赔率，使两国的赔率大致相同，否则将出现十分直接的套利机会。

所以，稳赚不赔的单笔下注机会是不存在的（除非经纪人犯了错误，或者比赛被控制，或者你能找到两个或者更多的经纪人不去互相直接或间接地摊平他们的赔率）。

但是平均来看，你是可以赢的，这需要利用一匹赛马胜利的真实概率与你可以交易的赔率之间的不同（真实赔率和所有的赌场赌局赔率之间总有不同，但只有黑杰克的赔率差异能够被利用）。

17.7.2　数学

假设一场赛马比赛有 N 匹马，第 i 匹马的下注总额为 W_i，博彩经纪人赔率为 $q_i:1$。这表示如果押 1 元赌第 i 匹马赢，那么如果这匹马输掉比赛，你将输掉这 1 元钱；如果它赢得比赛，你将得到 q_i+1 元，其中包括你下注的本钱 1 元。那么这个博彩经纪人将如何设定赔率 q_i 以确保不会输呢？

比赛前收到的总额为

$$\sum_{i=1}^{N} W_i$$

如果第 j 匹马赢得比赛，经纪人必须支出

$$(q_j+1)W_j$$

经纪人所要做的就是必须保证

$$\sum_{i=1}^{N} W_i \geqslant (q_j+1)W_j$$

或者等价地

$$q_j \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{N} W_i}{W_j} - 1 \text{ 对所有 } j$$

推导简单清晰。

请注意赔率的确定如何体现下注情况。在整个推导过程中都没有用到第 j 匹马赢得比赛的可能性。

17.8　无套利

假设博彩经纪人在设置赔率时犯了个错误，你该如何去判断是否存在套利机会呢（不要忘记只有正值的下注是允许的，这里无法卖空）？

我们引入更多的记号和变量来说明这个问题。w_i 表示你对第 i 匹马下注的金额（可以不去考虑其他人的下注 W_S）。假设你的筹码总数为 1，那么有

$$\sum_{i=1}^{N} w_i = 1 \tag{17-3}$$

如果第 j 匹马获胜，你将得到

$$(q_j+1)w_j \tag{17-4}$$

对每一个 i，你能不能找到对应的 $w_i>0$ 使得它们加总起来等于 1，并保证对任意的比赛结果式（17-4）恒大于等于 1?[⊖] 如果可以，就存在套利机会。

要求式（17-4）恒大于等于 1 可以等价地写为

$$w_j \geqslant \frac{1}{q_j+1} \tag{17-5}$$

那么我们能否寻找到大于 0 的 w，使式（17-3）和式（17-5）成立呢？至少在只有两三匹参赛马时，这个问题还是很容易被形象说明的。让我们看一看两匹马比赛时的情况。

在图 17-6 中，坐标轴分别表示的是对两匹马下注的金额。图中直线表示的是约束式（17-3），下注组合必须落在这条线上。而图中两个点标记的是两种情况，坐标为

$$\left(\frac{1}{q_1+1},\frac{1}{q_2+1}\right) \tag{17-6}$$

其中一个点表示的是正常情况，此时不存在套利机会；另一个点具有相对应的套利机会。接下来看一看细节。

为了找到一个无套利机会，我们必须找到一对（w_1，w_2），其两个值必须高于一个特定的依赖于 q 的值。将套利机会点（17-6）在图中描出并且从这个点开始水平向右和垂直向上两个方向如图所示画线。

这两条线所定义出的四分区域是否包括了约束线的任何部分？如果没有，正如图中较高点的情况，说明不存在套利机会；如果有，就存在套利机会。

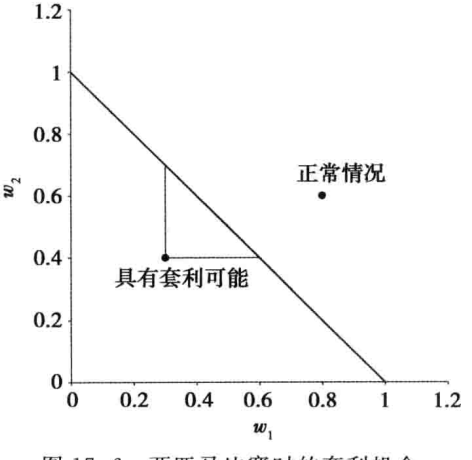


图 17-6 两匹马比赛时的套利机会

⊖ 原文此处为“令式（17-4）恒大于 0”，但与套利概念矛盾且同后文逻辑不一致。文中翻译已做出正确修改。——译者注

套利机会中可以获得的最优利润是多少

一个很简单的测试可以分辨我们是否处于套利情况之下。一般地，如果

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{q_i + 1} \geqslant 1$$

就不存在套利机会。反过来，若该和小于 1，就存在套利机会。

可以通过调整下注金额 w_i 使其生成的四分区域与约束线保证一定的重合从而获得套利利润，至于选择哪一部分直线来重合取决于你的要求。这么说的意思是指，你必须对你所想要达到的目标或优化的倾向做出说明，其中一种可能的目标是，考虑最差情景并对偿付进行最大化要求。或者，你也可以设定每一匹马赢得比赛的真实概率。

17.9　如何下注

我们已经看到博彩经纪人的赔率是如何设定的，甚至看到了体育类博彩的套利机会。当然，在实际操作上你可能花一辈子的时间追寻在现实生活中极少出现的套利机会。现在我们将考虑的是，能否利用博彩经纪人给出的赔率与你估计的概率的差别做些什么。记住，博彩经纪人设置的赔率总是由全部的投注额所决定的，而这往往比冷冰冰的客观概率要非理性（“我要押这一匹马赢，因为它同我小时候养过的一只宠物鼠同名”）。

我们需要更多的记号与变量。用 p_i 表示第 i 匹马获胜的概率，这是真实的客观概率而非博彩经纪人的概率。那么显然，概率必须加总等于 1：

$$\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$$

如果我们下注 w_i 到第 i 匹马，那么我们预期赚

$$m = \left(\sum_{i=1}^{N} p_i w_i (q_i + 1)\right) - 1 \tag{17-7}$$

这基于假设下注总量即所有 w 之和等于 1。那么很显然，我们的目标是令式（17-7)是个正数，也就是说我们想要一个正的平均收益。但是似乎有很多方法令它为正，如何分辨出哪种方法最好呢？

另一个我们需要考虑的量是盈利的标准差：

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{N} p_i (w_i (q_i + 1) - 1 - m)^2} \tag{17-8}$$

这个量衡量的是盈利偏离其均值的离散程度，通常用来体现对风险的度量。如果这个值是0，我们的利润或者损失都是一个确定的值（参见表17-1）。

表17-1 赛马的赔率与概率

赛　马	经纪人赔率	你估计的概率	下注比率
尼津斯基	5	0.2	
红色朗姆	6	0.2	
伯朗兹	1	0.1	
赤色掠夺者	1	0.1	
快乐少年	2	0.1	
洛克福尔	2	0.1	
赤色角斗士	2	0.1	
谢尔加	2	0.1	

你应该如何下注呢？接下来的计算可以在一个电子表格中简单完成。

情景一：预期收益最大化

由于没有为了减少风险支付任何溢价，因此你应该将全部资金压在赛马上来最大化

$$p_i(q_i+1)$$

这个例子中是红色朗姆，预期收益为40%，标准差为280%。这是一个极有风险的下注（见表17-2）。

表17-2 预期收益最大化

赛　马	经纪人赔率	你估计的概率	下注比率
尼津斯基	5	0.2	0
红色朗姆	6	0.2	1
伯朗兹	1	0.1	0
赤色掠夺者	1	0.1	0
快乐少年	2	0.1	0
洛克福尔	2	0.1	0
赤色角斗士	2	0.1	0
谢尔加	2	0.1	0

情景二：标准差最小化

这是一个有趣的策略。

说有趣是因为，该策略将在保证 0 标准差的同时保证－62％的预期收益。换句话说，一个确保的损失（见表 17-3）。

表 17-3　标准差最小化

赛　马	经纪人赔率	你估计的概率	下 注 比 率
尼津斯基	5	0.2	0.063 062
红色朗姆	6	0.2	0.054 068
伯朗兹	1	0.1	0.189 203
赤色掠夺者	1	0.1	0.189 246
快乐少年	2	0.1	0.126 108
洛克福尔	2	0.1	0.126 108
赤色角斗士	2	0.1	0.126 108
谢尔加	2	0.1	0.126 108

情景三：预期收益与标准差之比最大化

该策略寻求从正的预期收益与较小的风险中获益。基于数学上的原因（中心极限定理），这是一个自然的策略。结果在表 17-4 中给出。

表 17-4　预期收益与标准差之比最大化

赛　马	经纪人赔率	你估计的概率	下 注 比 率
尼津斯基	5	0.2	0.459 016
红色朗姆	6	0.2	0.540 984
伯朗兹	1	0.1	0
赤色掠夺者	1	0.1	0
快乐少年	2	0.1	0
洛克福尔	2	0.1	0
赤色角斗士	2	0.1	0
谢尔加	2	0.1	0

该策略的预期收益率为 31％，而标准差为 164％。

17.10　总结

赌博中所用到的数学与投资中所用到的数学几乎完全一致。赌博与投资最主要的区别在于，赌博中的参数更容易估计。如果你不能从容应对赌博中的数学（以及情绪波动），那么你就不应该去银行上班。

延伸阅读

- Kelly1956 年的论文原稿。
- 关于黑杰克的经典书籍：Thorp（1962）和 Wong（1981）。
- 关于 John Kelly，Claude Shannon，Ed Thorp 和众多有趣角色的扣人心弦的故事可以在 Poundstone（2005）中找到。

第 18 章

投资组合管理

本章内容

- 现代投资组合理论和资本资产定价模型
- 最优化你的投资组合
- 其他可选的方法，比如协整
- 如何分析投资组合绩效

18.1 引言

衍生品定价理论是一个关于确定性回报的理论：我们用标的对冲衍生品来消除风险，得到无风险的投资组合，进而赚取无风险利率。银行通过这个对冲过程获利：以略高于某资产真实价值的价格出售资产，同时对冲风险以得到确定的利润。

但并不是每个人都在进行对冲。基金经理买卖资产（包括衍生品）的目的是得到高于银行的收益率，但他们这样做承担了风险。我会在本章阐述投资风险与投资回报背后的一些理论，同时还会介绍分散投资的优点，投资组合与单个资产的风险收益如何取得关联以及如何通过优化投资组合使资金获得最大价值。

本章大部分内容需要如下假设：

- 我们持有“一期”投资组合，并观察该组合期末的行为。
- 资产的收益率在持有期间服从正态分布。
- 资产的回报率可以用每个资产的预期收益（漂移率）、收益的标准差（波动率）和资产收益率间的相关系数衡量。

18.2 多样化

本节引入了更多的符号，并展示多样化对投资组合收益率的影响。

我们持有由 N 个资产组成的投资组合。第 i 个资产今天的价值为 S_i，在时间长度 T 内的随机收益率为 R_i。这些收益率服从均值 $\mu_i T$、标准差 $\sigma_i T$ 的正态分布。第 i 个资产收益率和第 j 个资产收益率间的相关系数是 ρ_{ij}（其中 $\rho_{ii}=1$）。依照惯例，参数 μ、σ 和 ρ 分别对应漂移率、波动率和相关系数。此外请注意具体的时间长度。

如果我们持有第 i 项资产权重为 w_i，那么投资组合价值为

$$\Pi = \sum_{i=1}^{N} w_i S_i$$

在持有期结束时，投资组合的价值是

$$\Pi + \delta\Pi = \sum_{i=1}^{N} w_i S_i (1 + R_i)$$

我们可以将资产组合价值的相对变化表示如下

$$\frac{\delta\Pi}{\Pi} = \sum_{i=1}^{N} w_i R_i \tag{18-1}$$

其中，权重

$$w_i = \frac{w_i S_i}{\sum_{i=1}^{N} w_i S_i}$$

w_i 加总为 1。

由式（18-1），我们很容易算出投资组合的预期收益率

$$\mu_\Pi = \frac{1}{T} E\left[\frac{\delta\Pi}{\Pi}\right] = \sum_{i=1}^{N} w_i \mu_i \tag{18-2}$$

和收益率的标准差

$$\sigma_{\Pi}=\frac{1}{\sqrt{T}}\sqrt{\mathrm{var}\left[\frac{\delta\Pi}{\Pi}\right]}=\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}w_i w_j\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j} \tag{18-3}$$

在此，我们把单个资产的参数和整个投资组合的预期收益及标准差联系了起来。

不相关资产

假设投资组合中的资产是互不相关的，即 $\rho_{ij}=0$，$i\neq j$。为简化问题，假定资产是等权重的，即 $w_i=1/N$，那么投资组合的预期收益率由所有资产预期收益率的平均值表示

$$\mu_{\Pi}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mu_i$$

而投资组合的波动率为

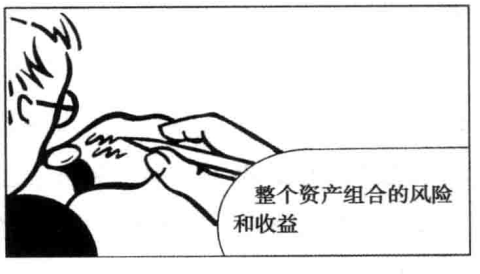
$$\sigma_{\Pi}=\sqrt{\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sigma_i^2}$$

由于波动率是 N 项的加总，波动率自然是 $O(N^{-\frac{1}{2}})$。随着我们增加投资组合中资产的个数，收益率的标准差将趋近于零。当然，所有资产之间完全不相关这一假定比较极端，但在接下来要描述的资本资产定价模型中，我们将发现类似的结论——在不降低预期收益率的条件下，多样化降低了波动率。

现在我们将波动率或标准差当作**风险**（risk），我们要（合理地）尽量避免它；将预期收益率作为**报酬**（reward），它对我们来说多多益善。

18.3　现代投资组合理论

现在，我们可以用上面的框架来讨论“最佳”的投资组合了。诺贝尔经济学奖得主哈里·马科维茨成功地定义了这里的“最佳”。他的模型提供了一种判定**有效**（efficient）投资组合的方法。一个有效的投资组合需要满足：对于给定的风险水平会提供最高的报酬，或在给定的报酬下具有最低的风险。如果想要了解这个命题，不妨想象一下：世界上有四种资产 A、B、C 和 D，其报酬和风



险如图 18-1所示（暂时忽略 E）。如果你能购买其中的任何一种（但不允许你买多于一种），你会买哪一种？你会买 D 吗？不会，因为它和 B 有相同的风险但报酬更少，和 C 有相同的报酬但风险更高，因而我们可以排除 D。那么 B 或 C 怎么样呢？当与 D 相比较时它们都是有吸引力的，但当彼此比较时结果就没有那么明确了。B 有更高的风险，同时也有更高的报酬。然而，当与 A 比较时，发现它们都没有可比性。A 是完美的选择。如果我们引入与 B 具有等量风险但报酬高于 A 的资产 E，那么我们就不能客观地判断 A 和 E 哪一个更好。这是一个主观选择，选择结果取决于投资者的**风险偏好**(risk preferences)。

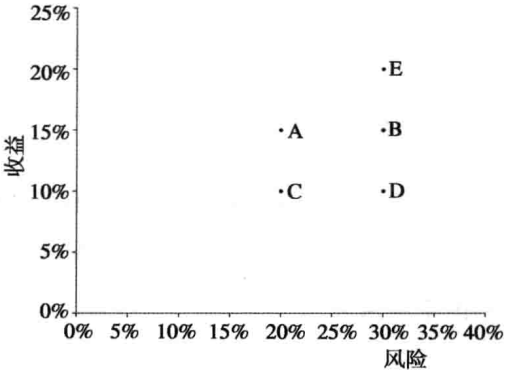


图 18-1 五项资产的风险和补偿

现在假定我有图 18-2 中的 A 和 E 两项资产，并且可以在投资组合中组合它们，那么这对我的风险/报酬有什么影响？

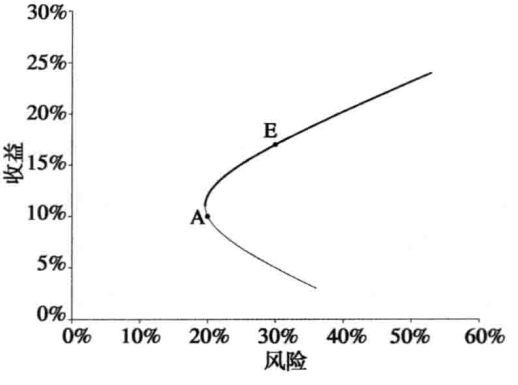


图 18-2 两项资产和任意组合

由式（18-2）和式（18-3）我们有

$$\mu_{\Pi} = W\mu_A + (1-W)\mu_E$$

和

$$\sigma_{\Pi}^2 = W^2\sigma_A^2 + 2W(1-W)\rho\sigma_A\sigma_E + (1-W)^2\sigma_E^2$$

此处 W 是资产 A 的权重；记住权重之和必须为 1，那么资产 E 的权重是 $1-W$。

当我们改变 W 时，风险和报酬也随之变化。风险/报酬空间的曲线是以 W 为参数的一条双曲线（见图 18-2）。这条曲线的粗体部分是比剩余部分更可取的有效部分。需要再一次指出的是，投资个体的偏好会决定他想要落在粗体曲线的位置。若其中一个资产的波动率为零，该曲线会变为直线。曲线上两点之间的任意一点所代表的组合都要求两个资产的多头头寸。一旦到了这个区间之外，便需要

通过卖空资产之一来融资以购买其他资产。在之前的假设条件下，我们可以卖空任意多的资产；当卖空有限制时，结果会稍微改变。

如果投资组合中存在很多个资产，我们得到的将不再只是一条关于潜在风险/报酬的简单双曲线，而是类似于图 18-3的图形。该图形使用了所有的 A、B、C、D 和 E，而不仅仅是 A 和 E。尽管 B、C 和 D 作为个体都没有吸引力，但它们在投资组合中却可能是有用的，这取决于它们与其他投资是否相关并且如何关联。在该图形中我们用粗体标记**有效边界**（efficient frontier）。给定所有可选的投资组合，我们将会选择持有一个位于有效边界上的组合。

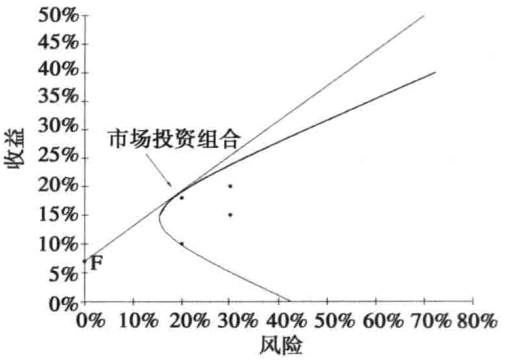


图 18-3　可选的投资组合和有效边界

给定回报的风险计算如图 18-4 中的电子数据表所示。通过将这个电子数据表反复用于各个目标收益率，我们就可以找到有效边界。

图 18-4　计算有效边界上一点的电子数据表

将无风险投资纳入考虑

无风险投资获得有保障的收益率 r，在图 18-3 中体现在 F 点。如果我们允许在投资组合中持有该资产，那么由于该资产的波动率为零，我们将得到新的有效边界，即图中的直线。这一条直线与原有效边界相切的投资组合被称为**市场投资组合**（market portfolio），直线本身被称为**资本市场线**（capital market line）。[⊖]

18.4 我该站在有效边界的哪个位置

已经找到了有效边界，我们现在想知道该选择哪个位置进行投资。选择因人而异。在数据给定时，有效边界是客观的，但“最佳”位置是主观的。

风险/报酬图是一种选择最佳投资组合的可能有用的方式。以下是关于风险/报酬图的解释。

投资组合 Π 的收益率服从正态分布，因为它是由本身服从正态分布的资产组成的。该投资组合均值为 μ_Π，标准差为 σ_Π（忽略了与时长 T 相关的考虑）。

连接投资组合 Π 与无风险利率的直线斜率是

$$s=\frac{\mu_\Pi-r}{\sigma_\Pi}$$

这是一个重要值，用于衡量 Π 的收益率超过 r 的可能性。如果 $C(\cdot)$ 表示标准正态分布的累积分布函数，那么 $C(s)$ 则表示 Π 的收益率至少为 r 的概率。更一般地

$$C\left(\frac{\mu_\Pi-r^*}{\sigma_\Pi}\right)$$

表示收益率超过 r^* 的概率。这表明，如果我们要最小化收益率小于 r^* 的概率，应选择有效边界集合 Π_{eff} 上斜率

$$\frac{\mu_{\Pi_{\text{eff}}}-r^*}{\sigma_{\Pi_{\text{eff}}}}$$

⊖ 在风险中性世界，人们认为所有的投资都位于经过点 $(0, r)$ 的水平线上。

最大的投资组合。

相反，如果固定直线斜率为 s，那么我们有信心认为，$C(s)$ 的损失将不超过

$$\mu_{\Pi_{\text{eff}}} - s\sigma_{\Pi_{\text{eff}}}$$

投资组合的选择通过最大化该值来决定。这两种策略示意图见图 18-5。

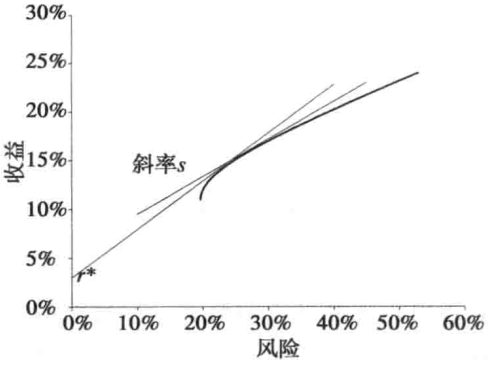


图 18-5　两种选择最佳有效投资组合的简单方法

当资产中存在无风险投资和不受限制的卖空时，由于会产生无穷的借贷，两种方法都不能给出令人满意的结果。

另一种选择最优投资组合的方法需要**效用函数**（utility function）的协助，这种方法很受经济学家的喜爱。图 18-6展示了**无差异曲线**（indifference curves）和有效边界。之所以被称为无差异曲线，是因为它们表示每条曲线上投资者对风险/报酬间的权衡是没有差别的。投资者总想高收益低风险兼得。面对图中 A 和 B 的投资组合，他能看到 A 具有低收益低风险，而 B 有更高的报酬但伴随更高风险的代价。这两个投资组合对投资者是没有差别的。不过 C 比它们两个更好，因为它在一条更优的曲线上。

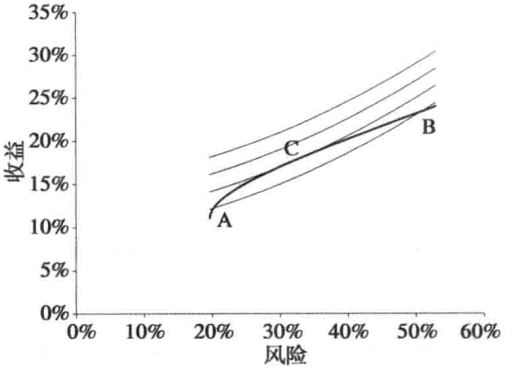


图 18-6　有效边界和无差异曲线

18.5　马科维茨在实践中的运用

马科维茨模型的输入量是预期收益率、波动率和相关系数。N 项资产意味着一共有 $N+N+N(N-1)/2$ 个参数。它们中的大多数不能准确得知（甚至于是否存在也不确定），只有波动率是完全可靠的。输入这些参数后，我们必须最优化

资产组合中所有资产的权重：选择一个投资组合的风险，找到在该波动率下使投资组合收益率最大的权重。除非拥有的资产数量较少，否则计算过程将非常耗时。

该模型在实际操作中存在的问题，是下一节更简单模型得以发展的原因之一。

18.6 资本资产定价模型

在讨论**资本资产定价模型**（Capital Asset Pricing Model，CAPM）之前，我必须引入证券贝塔的概念。与投资组合 M 相关的资产的贝塔（β_i）是证券收益率与投资组合收益率的相关系数与投资组合方差的比值。因此

$$\beta_i = \frac{\mathrm{Cov}[R_i R_M]}{\mathrm{Var}[R_M]}$$

18.6.1 单指数模型

现在我将建立一个**单指数模型**（single-index model），随后会介绍它的扩展。我将所有资产的收益率与一个代表性指数收益率 M 相联系。在单指数模型中，该指数通常被视为一个广泛的股票市场指数。第 i 项资产的收益率表示为

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_M + \epsilon_i$$

观察该式，我们看到资产收益率可以分解成三部分：恒定的漂移率、与指数 M 一致的随机部分和与其不相关的随机部分 ϵ_i。随机部分 ϵ_i 是对应第 i 项资产独特的量，且均值为零。注意，所有资产均与指数 M 相关，而在其他方面却完全不相关的。图 18-7 展示了迪士尼股票收益率与 S&P 500 收益率的关系，其中 α 和 β 可由线性回归分析确定。图中所用数据的时间范围从 1985 年 1 月到大约 1997 年年底。

指数的预期收益率用 μ_M 表示，标准差用 σ_M 表示。第 i 项资产的预期收益率是

$$\mu_i = \alpha_i + \beta_i \mu_M$$

标准差为

$$\sigma_i = \sqrt{\beta_i^2 \sigma_M^2 + e_i^2}$$

其中 e_i 是 ϵ_i 的标准差。

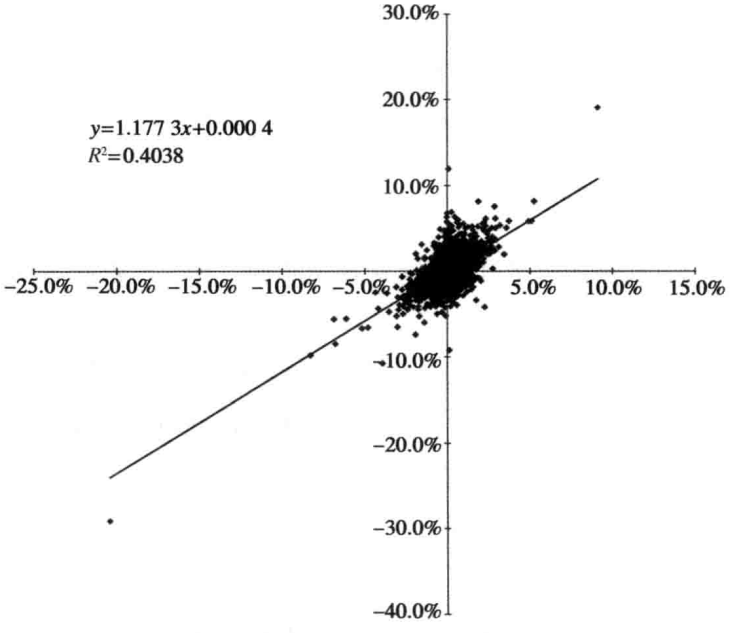


图 18-7　迪士尼股票收益率与 S&P 500 收益率的关系图

如果我们持有这样的资产组合，那么收益率由下式给出

$$\frac{\delta \Pi}{\Pi} = \sum_{i=1}^{N} w_i R_i = \left(\sum_{i=1}^{N} w_i \alpha_i\right) + R_M \left(\sum_{i=1}^{N} w_i \beta_i\right) + \sum_{i=1}^{N} w_i \epsilon_i$$

由此可得

$$\mu_\Pi = \left(\sum_{i=1}^{N} w_i \alpha_i\right) + E[R_M]\left(\sum_{i=1}^{N} w_i \beta_i\right)$$

若令

$$\alpha_\Pi = \sum_{i=1}^{N} w_i \alpha_i \text{ 和 } \beta_\Pi = \sum_{i=1}^{N} w_i \beta_i$$

那么

$$\mu_\Pi = \alpha_\Pi + \beta_\Pi E[R_M] = \alpha_\Pi + \beta_\Pi \mu_M$$

类似地，Π 的风险度量如下

$$\sigma_\Pi = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} w_i w_j \beta_i \beta_j \sigma_M^2 + \sum_{i=1}^{N} w_i^2 e_i^2}$$

如果权重都差不多（即 N^{-1}），那么平方根内后一项也是 $O(N^{-1})$。因此，当

$N \to \infty$，该表达式为

$$\sigma_{\Pi} = \left| \sum_{i=1}^{N} w_i \beta_i \right| \sigma_M = | \beta_{\Pi} | \sigma_M$$

随着投资组合中资产个数的增加，我们发现不相关资产 ϵ 对投资组合的贡献逐渐消失。与 ϵ 相关的风险称为**可分散的风险**（diversifiable risk）。而其余风险，即与指数相关的风险，称为**系统性风险**（systematic risk）。

18.6.2 选择最优的投资组合

最优投资组合的选择原理与马科维茨模型相同。唯一的差异是输入的参数少了很多，且计算速度快了很多。

过程如下：选择适合的投资组合收益率的值 μ_{Π}，在该约束下最小化 σ_{Π}。对不同的投资组合收益率重复这个最小化过程，我们将得到有效边界。而之后在有效边界上的位置确定则是一个主观选择。

18.7 多指数模型

以上介绍的模型是单指数模型，这个概念可以扩展，将更具代表性的一些指数纳入模型。举个例子，就像一个指数可以代表股票市场一样，一个多指数模型可能包括代表债券市场的指数、代表货币市场的指数，甚至包括与相关资产有关的经济指数。在多指数模型中，每个资产的收益率表示如下

$$R_i = \alpha_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_{ji} R_j + \epsilon_i$$

其中有 n 个收益率为 R_j 的指数。指数间可以彼此相关，其结论与单指数模型相似。

拥有超过三个或四个指数通常是不值得的，因为参数越少，模型越稳健；另一个极端是令马科维茨模型中每项资产具有一个对应指数。

18.8 协整

不管是用 MPT 还是 CAPM，你都会担心参数的准确性。这两种方法的准确性完全依赖于输入数据的准确性，其中 CAPM 通常比 MPT 更可靠，因为前者参数更少。

还存在另一种方法，它正变得日益普及，我将在这里对它进行简要介绍。遗

憾的是，这个技术比较复杂，要求熟练的统计分析（正确地运用它），而这种方法在本质上具有很大的意义。与探求两个序列是否相关不同，我们探求它们是否**协整**（cointegrated）。

两只股票可能在短期内是完全相关的，但在长期则是发散的，一只增长一只下降。相反，两只股票也可能互相追随，永远不超过一定的距离，但相关性可能是正向的、负向的或不断变化的。如果我们进行 Delta 对冲，在短期内相关性会比较关键，但如果在未对冲的投资组合中长期持有股票，相关性就可能不会构成问题。考察两只股票是否紧密联系我们需要**平稳**（stationarity）的定义。如果时间序列具有有限恒定的均值、标准差和自相关方程，那么它是平稳的。股票通常具有正的增长趋势，因此不是平稳的。从某种意义上说，一个平稳序列不会偏离其均值太多。

从我们第一个掷硬币实验可以看到平稳与非平稳的区别。每次掷出正面记为 1，反面记为 -1 的时间序列是平稳的。这意味着均值为零、标准差为 1 且所有非零滞后项的自相关函数为零。但是，如果将结果累加起来，就像我们在每次投掷时都要下赌注一样，结果会怎样呢？这个时间序列是非平稳的，因为加和序列的标准差按抛掷次数的平方根增长。它的均值仍为零，但会游荡得离均值越来越远。

检测时间序列的平稳性涉及线性回归，需要找出下式回归中的系数 a、b 和 c

$$X_t = aX_{t-1} + b + ct$$

如果发现 $|a|>1$，则该序列是不稳定的；如果 $-1 \leqslant a < 1$，则序列是平稳的；如果 $a=1$，则序列是非平稳的。与一切统计一样，只能说，我们对 a 值的准确性有一定程度的信心。决定序列是平稳还是非平稳的，需要我们通过迪基 - 富勒统计量（Dickey-Fuller Statistic）估计出结果的置信度。从这个方面开始，协整的工作变得复杂起来。

这在金融中如何运用呢？尽管个别股票价格可能是非平稳的，但资产的线性组合（如投资组合）可能是平稳的。我们能否找到这样的 λ_i，在 $\sum_{i=1}^{N}\lambda_i = 1$ 的条件下，使得 $\sum_{i=1}^{N}\lambda_i S_i$ 是平稳的？如果可以找到这样的 λ_i，那么我们说这些股票是协整的。

例如，假定我们发现 S&P 500 和由 15 只股票组成的投资组合间有协整关系，我们可以用这 15 只股票**跟踪指数**（track the index）。该跟踪投资组合的误差具有

恒定的均值和标准差，因此不会与其均值相差太远。这显然要比用所有的 500 只股票来跟踪容易得多（当然，后者的跟踪误差为 0）。

我们并不一定要跟踪指数，可以跟踪任何我们想要的东西（比如选择一个投资组合，使其收益率为 20%来跟踪 $e^{0.2t}$）。我们可以分析两只相关股票的协整属性，比如耐克和锐步，这将是配对交易。显然，MPT 和 CAPM 有类似的概念，比如均值和标准差。主要区别在于，协整对单个时间序列的性质的假设要少得多。更重要的是，协整不需要明确的波动率和相关系数。

18.9 绩效度量

如果一直遵循上文所述的资产配置策略，或只是依照直觉进行交易，如何得知交易的效果呢？出色的业绩是否应归因于不可思议的自然本能，或者糟糕的业绩只能归咎于运气不佳？

理想的业绩是收益率跑赢了无风险利率，且要求持久的效果。不仅仅是通过资产组合管理得到高收益率，而且高收益率的实现应该伴随着尽可能低的随机性。

对“每单位风险的回报”最常见的两种测度是体现“易变性报酬”的**夏普比率**（Sharpe ratio）和体现“波动率报酬”的**特雷诺比率**（Treynor ratio），其定义如下：

$$\text{夏普比率} = \frac{\mu_\Pi - r}{\sigma_\Pi}$$

和

$$\text{特雷诺比率} = \frac{\mu_\Pi - r}{\beta_\Pi}$$

其中 μ_Π 和 σ_Π 是投资组合在此期间实现的收益率和标准差，β_Π 是对投资组合波动率的测度。夏普比率通常用于某投资人整体投资的情况评估，而特雷诺比率通常用于评估诸如公司整个投资组合中的某一部分业绩的情况。当所研究的投资组合具有高度多样化程度时，这两种测度是相同的（取决于市场标准差的因子）。

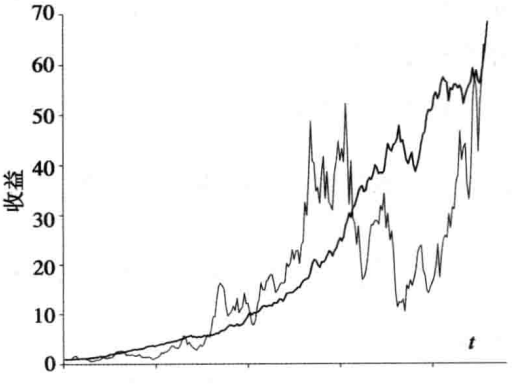


图 18-8 优秀与平庸；相同的收益率，不同的波动率

在图 18-8 中我们可以看到在不同

时间内，一位优秀的管理人和一位平庸的管理人所经营的投资组合的价值。

18.10　总结

投资组合管理和资产配置所研究的，是如何通过承担风险来换取报酬。问题是如何决定该承担多少风险，以及如何获取最佳的回报。衍生品理论的基本原则是不承担任何风险，所以本书并未在资产组合管理上着太多的笔墨。另一方面，正如我一直强调的，金融学科有如此多的不确定性以至于消除风险几乎是不可能的，任何涉足衍生品理论或实践的人都应当感激投资组合管理背后的理念。我试图用最易于理解的数学来解释这门学科，下面所列的资源对想要更进一步了解这门学科的人非常有帮助。

延伸阅读

- 参见马科维茨最初的书中关于 MPT 所有的细节，Markowitz（1959）。
- 投资学最优秀的教材之一是 Sharpe（1985），其中包括投资组合管理的章节。
- 关于协整的介绍和计量经济学中的其他技术，参见 Hamilton（1994）和 Hendry（1995）。
- 关于投资组合绩效更进一步的讨论，参见 Farrell（1997）。
- 我还没有讨论连续时间的资产配置问题，但罗伯特·莫顿的论文集中对该主题已经有细致精彩的解释，Merton（1992）。
- 交易费用对应该不断再对冲的投资组合有很大的影响。有成本的模型参见 Morton 和 Pliska（1995），而渐近的结果参见 Atkinson 和 Wilmott（1995）、Atkinson，Pliska 和 Wilmott（1997）和 Atkinson 和 Al-Ali（1997）。
- 参见 Alexander 和 Giblin（1997）关于混沌方法在金融中应用的描述，以及他们赢得第一届国际非线性金融预测大赛的过程。
- 关于当前风险管理思考的评述参见 Alexander（1998）。

第 19 章

在　险　值

本章内容

- 在险值的含义
- 实务中如何计算在险值
- 含衍生品的投资组合在险值的一些计算难点

19.1　引言

无论是拥有数十亿美元资产的大银行还是只有几百美元的退休职员，他们或多或少都会对金融市场的典型运动所可能带来的损失有所考虑，这是审慎投资者所共有的属性。话虽如此，仍然有广为人知的例子显示，有些机构对其参与的部分奇异交易可能带来的后果一无所知，而这些交易通常都涉及衍生品。

作为使投资更具透明度的探索工作的一部分，在险值这一概念已经形成。它是度量一项投资或投资组合可能产生的下行风险大小的工具。

19.2　在险值的定义

这里给出**在险值**（Value at Risk，VaR）的一种定义，这也是目前被普遍认

可的定义：

投资组合可以指由单个交易员持有的投资组合，此时在险值度量的是让该交易员掌控公司资金所带来的风险；也可以是指整个公司的投资组合。前者用于度量交易员的效率，后者则被公司所有者所关注。公司所有者更想知道股票市场的变动对公司盈亏底线的影响。

> 在险值是在给定置信度下，投资组合在未来一定时间内的最大可能损失量的估计。

典型的置信度通常设置在95%、97.5%、99%等。所关注的时间长度可以是一天或者几个月，这取决于考虑的是单笔交易活动还是投资组合管理，应该是与投资组合有序清算有关的时间表，意味着在足够低的速度下出售资产对市场的影响微乎其微。因此，在险值是对可实现损失的估计，而不仅仅是账面损失。

这里有一个在险值的例子，我们可以计算出（通过这里描述的方法）未来一周内损失不超过1000万美元的概率是95%。可以表示成：

$$\text{Prob}\{\delta V \leqslant -\$\ 10\text{M}\} = 0.05$$

其中，δV 表示投资组合价值的变化（用 $\delta \cdot$ 表示“变化”来强调我们考虑的是一段时间的变化量），符号化表示如下：

$$\text{Prob}\{\delta V \leqslant -\text{VaR}\} = 1 - c$$

其中，c 是置信度，在上例中为95%。

计算在险值时，需要假设处于正常的市场环境之中，这意味着崩盘等极端的市场情况并没有被纳入考虑或者另行考虑。因此，在险值可以度量机构日常运行中可被预期发生的情况。

计算在险值要求至少有以下数据：投资组合中所有资产的现价、波动率和各资产间的相关系数。如果资产是可交易的，我们可以从市场中得到价格（**盯市**，marking to market）。对场外交易合约我们必须使用一些“被认可的”模型定价，比如布莱克-斯科尔斯模型，这就是**盯模**（marking to model）。通常假定投资组合中的各组成部分的变动是随机并服从正态分布的。我在这里提出这个假定，随后会做一般性的说明。

19.3 单个资产的在险值

首先从只有单个资产的投资组合的在险值估计开始。

我们持有总量为 Δ 的股票，价格为 S，波动率为 σ。我们想要知道在 99% 的置信度下，未来一周内损失的最大值。此处我故意使用了和衍生品相类似的符号。

图 19-1 是时间长度为一周的收益率的分布。如何计算在险值呢？首先假定分布是正态分布。由于时间长度非常短，有理由假定均值是零。由于时间长度是一年的 1/52，所以这段时间股票价格的标准差为

$$\sigma S\left(\frac{1}{52}\right)^{1/2}$$

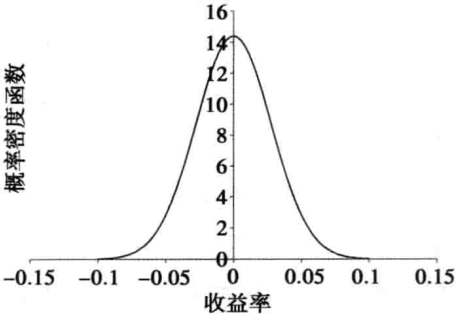


图 19-1 未来股票收益率的分布

最后，我们必须计算分布最左尾1%＝(100－99)%分位点所对应的位置。我们只需要对标准正态分布进行以上操作，因为其他的正态分布可以通过比例变换得到。参照表 19-1，我们可以看到 99% 的置信区间对应着 2.33 的平均标准差。由于我们持有 Δ 数量的股票，那么在险值为$2.33\sigma\Delta S\left(\frac{1}{52}\right)^{1/2}$。

表 19-1 置信度及其与标准差的关系

置信度（%）	标准差的倍数
99	2.326 342
98	2.053 748
97	1.880 79
96	1.750 686
95	1.644 853
90	1.281 551

更一般的，如果时间长度是 δt，要求的置信度是 c，我们有

$$\mathrm{VaR} = -\sigma\Delta S(\delta t)^{1/2}\alpha(1-c) \tag{19-1}$$

其中 $\alpha(\cdot)$ 是标准正态累积分布的逆函数，如图 19-2 所示。

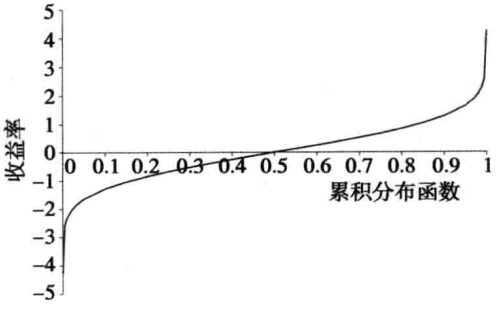


图 19-2 标准正态累积分布的逆函数

在式（19-1）中，我们假定资产收益率服从均值为零的正态分布。零均值的假定对于短期是有效的，原因在于：收益率的标准差和时间的平方根成正比，而均值和时间本身成正比。

对长的投资期而言，收益率则以投资期限的一定比例向右移动（人们希望的）。因此，对于较长的时间尺度，由于资产价值的漂移，应该对式（19-1）进行修正。如果漂移率是 μ，则式（19-1）应为

$$\mathrm{VaR} = \Delta S(\mu\delta t - \sigma\delta t^{1/2}\alpha(1-c))$$

应当注意的是，此处用的是真实漂移率，而不是风险中性的漂移率。在本章的剩余部分，不再考虑该漂移率的调整。

19.4 投资组合的在险值

如果已知投资组合中所有资产的波动率和它们之间的相关系数，那么就可以计算整个投资组合的在险值。

如果第 i 项资产的波动率是 σ_i，第 i 项和第 j 项资产的相关系数是 ρ_{ij}（$\rho_{ii}=1$），且持有第 i 项资产的头寸为 Δ_i，那么含有 M 项资产的投资组合的在险值为：

$$-\alpha(1-c)\delta t^{1/2}\sqrt{\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{M}\Delta_i\Delta_j\,\sigma_i\,\sigma_j\,\rho_{ij}\,S_i\,S_j}$$

可以发现，除了前面的乘法因子，上式根号部分和第 18 章中股票投资组合收益率的标准差的形式一样。

此处在险值的计算方法具有的缺陷是显而易见的[⊖]：收益率不服从正态分布，波动率和相关系数难以度量，并且不允许投资组合中有衍生品。我们稍后讨论第一个缺陷，现在先描述将衍生品纳入考虑时计算在险值的一些细节方法。

19.5 衍生品的在险值

考虑含有衍生品的投资组合，估计其在险值的关键点是，即使标的资产的变化服从正态分布，衍生品本质上的非线性特征也保证了衍生品的变化模式将与正态分布大相径庭。然而，如果我们考虑标的资产非常小的变化，例如在一个非常

⊖ VaR 就像你的星座一样。你必须告诉你的投资者或高危人群你的 VaR 是多少，就像你必须告诉和你交谈的人你的星座一样。你并不一定要相信这两者中任何一个有意义。

短的期限内，我们可以用期权的 Delta 值来近似估计投资组合标的资产变化的敏感性。对于较大的变动，我们可能需要更高阶的近似。接下来，我们就介绍这些方法及其缺陷。

19.5.1 Delta 近似

考虑一个由单个标的资产的衍生品组成的投资组合 S。一份期权或者期权组合对标的资产的敏感度就是 Delta，Δ。如果标的资产分布的标准差是 $\sigma S\delta t^{1/2}$，则期权头寸分布的标准差为

$$\sigma S\delta t^{1/2}\Delta$$

这里的 Δ 必须是整个头寸的 Delta，是所有相关期权对特定标的资产的敏感性，即同一标的资产所有期权头寸 Delta 之和。

显然，只要一小步就可以计算出期权组合的在险值：

$$-\alpha(1-c)\delta t^{1/2}\sqrt{\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{M}\Delta_i\Delta_j\,\sigma_i\,\sigma_j\,\rho_{ij}S_i\,S_j}$$

这里的 Δ_i 是期权组合对第 i 项资产的敏感性。

19.5.2 使用哪个波动率

对于单个标的资产，在险值的 Delta 近似依赖于标准差

$$\sigma S\delta t^{1/2}\Delta \tag{19-2}$$

正如我们多次见到的，波动率的类型很多。[⊖]那么到底应将哪个波动率纳入公式中呢？

假定真实波动率的估计值为 σ，它不同于隐含波动率 $\bar{\sigma}$。哪一个应纳入式 (19-2)？答案是两者都要。Delta 表示期权价值如何随着股价的变化而变化，由期权的市价决定，因此在计算 Delta 时使用的是 $\bar{\sigma}$。然而，前文的 σ 指股票的变动，描述股票的真实变动，因此这里要用真实波动率。这是个相当微妙的问题。

⊖ 幸或不幸取决于你是否通过这些差异赚到了钱。

19.5.3 Delta-Gamma 近似

Delta 近似适用于标的资产发生微小变动时的情况。我们通过考虑更高阶情况如加入 Gamma 或凸性影响的方法，可以得到更好的近似。

举个例子，假定投资组合包括一份股票期权，标的资产的变化 δS 和期权价值的变化 δV 的关系为

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial S}\delta S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(\delta S)^2 + \frac{\partial V}{\partial t}\delta t + \cdots$$

由于我们假定

$$\delta S = \mu S\delta t + \sigma S\delta t^{1/2}\phi$$

其中 ϕ 是标准正态分布的随机样本，我们可以写出

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial S}\sigma S\delta t^{1/2}\phi + \delta t\left(\frac{\partial V}{\partial S}\mu S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\phi^2 + \frac{\partial V}{\partial t}\right) + \cdots$$

上式可以重写为

$$\delta V = \Delta\sigma S\delta t^{1/2}\phi + \delta t(\Delta\mu S + \frac{1}{2}\Gamma\sigma^2 S^2\phi^2 + \Theta) + \cdots \tag{19-3}$$

第一项中期权价值的随机变化与标的资产的随机变化成比例；第二项表示 δV 中含有确定性的漂移，这来源于 S 的确定性漂移和期权的 Θ 值。然而，更重要的是，Gamma 的作用是在 δS 随机构成项中引入了非线性的部分。

图 19-3 中有三条曲线。第一条曲线表示标的资产变化的假定分布，它是标准差为 $\sigma S\delta t^{1/2}$ 的正态分布，在图中由粗线表示。第二条曲线表示仅在 Delta 近似下期权变化的分布，为标准差为 $\Delta\sigma S\delta t^{1/2}$ 的正态分布。第三条曲线表示在 Delta-Gamma 近似下标的期权变化的分布。

由图形我们可以看出 Delta-Gamma近似的分布与正态分布已相去甚远。实际上，因为式（19-3）是关于 ϕ 的二次式，δV 必须满足以下约束

$$\delta V \geqslant -\frac{\Delta^2}{2\Gamma} \text{ 如果 } \Gamma > 0$$

或者

$$\delta V \leqslant -\frac{\Delta^2}{2\Gamma} \text{ 如果 } \Gamma < 0$$

在

$$\phi = -\frac{\Delta}{\sigma S \Gamma \delta t^{1/2}}$$

成立时，取到极值。

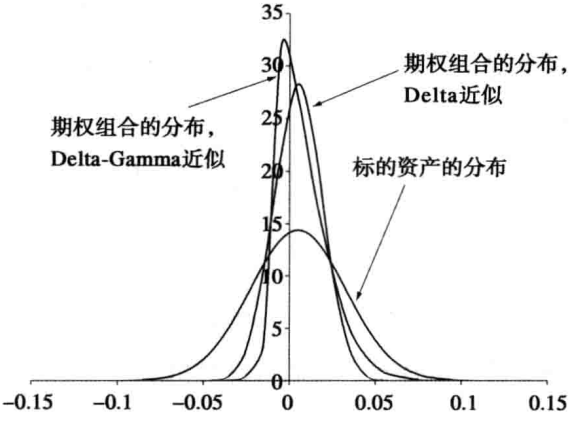


图 19-3 标的资产变化的正态分布（实线），Delta 近似下期权变化的分布（另一个正态分布）和 Gelta-Gamma 近似下期权变化的分布（显然不是正态分布）

接下来要考虑的问题是："这是否就是我们关注的 ϕ 的尾部概率临界值?" 如果不是，Delta 近似才可能是令人满意的；否则 Delta 的近似将一定不可接受。如果我们不能用近似的方法，便不得不采用估值公式进行模拟。

一个显而易见的结论是，正的 Gamma 值对投资组合是有利的，而负的 Gamma值则对投资组合不利。正的 Gamma 值可以限制下跌，而负的 Gamma 值则限制上涨。

19.5.4 估值模型的应用

关于非线性产品的问题，比较显然的方法是：首先对标的资产的随机行为进行模拟，然后用估值公式或算法推断整个投资组合变化的分布。这种方法是估计非线性产品在险值的最后选择，因为它具有非常耗时的缺点。总之，我们可能需要运行成千上万次的模拟；如果每次模拟都需要解一个多元偏微分方程，那么求解在险值将花费更长的时间。

19.5.5 固定收益投资组合

当资产或投资组合依赖利率时，通常认为每个产品的到期收益率都服从正态分布，而不同产品的收益率之间也具有适当的相关性。价格和收益率变化的关系

通过久期（高阶时通过凸性）体现，所以固定收益资产可以看做收益率的衍生品。显然，在险值的估计中我们用久期代替了 Delta（凸性代替了 Gamma）。

19.6 模拟

本书介绍了两种模拟方法，基于正态分布随机数生成技术的**蒙特卡罗模拟**（Monte Carlo）和从历史数据得到实际资产价格变动的**靴襻法**（bootstrapping）。

根据投资者的兴趣、模型及数据所涉及的时间长短，上述模拟方法有两种途径生成未来的情境。如果投资者关注的时间长度为一年，并且收益率模型或数据的时间频率也是一年，那么可以很容易地生成未来情境的分布。另一方面，如果模型或数据类型的时间频率较短，比如说随机微分方程或日数据，而投资者关注的时间长度是一年，那么必须通过模型生成整年资产价格的路径来建立一年的分布。后者更耗时，但对路径依赖合约很重要，因为对于该合约必须对资产价格的整条路径建模。

需要记住的是，模拟必须使用真实收益率而不是风险中性收益率。

19.6.1 蒙特卡罗模拟

蒙特卡罗模拟通过随机数来生成资产收益率分布和（或）资产价格路径。该内容将在第 80 章深入讨论。该方法可应用于在险值的估计，通过从正态分布中抽取 ϕ 建立未来情境的分布。对每一种情境，通过定价方法计算得到投资组合（标的资产和期权）的价值，从而直接估计它的在险值。

19.6.2 靴襻法

另一种生成资产价格随机变动序列的方法是使用历史数据。再一次指出，生成未来情境的方法依然是两类：如果要求的时间长度与收益率分布模型的时间频率相一致，那么只需操作一个步骤；如果只有短期的模型或数据，并希望给更长期限建模，就需要多个步骤操作。

我们使用的数据由日收益率组成，比方说过去几年所有标的资产日收益率的数据。每天的数据作为向量录入，每项资产都是向量中的一个元素。

假定我们有 N 项资产的真实时间序列数据，并且是跨度为 4 年的日数据，

即每项资产有大概 1000 个日收益率数据。我们将用这些收益率进行模拟，方法如下。

给每日的变化数据分配一个“索引”。对每个收益率向量赋值，这样我们就编制了 1000 个数字。为了更形象，想象把所有 N 项资产的收益率写在笔记本的空白页上。在第一页，我们记录发生在 1998 年 7 月 8 日至 1998 年 7 月 9 日之间资产价值的变化。第二页也是一样，记录从 1998 年 7 月 9 日至 1998 年 7 月 10 日之间的变化。第三页从 7 月 10 日至 7 月 11 日，依次类推。如果我们有 1000 个数据组就要写 1000 页。现在，从 1 到 1000 依均匀分布随机抽取一个数：假设是 534。翻到笔记本的第 534 页，在今天资产价格的基础上，根据当页所记录的收益率向量，计算明天所有资产的价值。现在在 1 至 1000 之间再随机抽取一个数并重复这个过程，把抽到的向量作用到这一新的价值上。持续这样的操作，直到达到要求的时间长度。这是资产路径的一个实现过程，重复这个模拟可以生成很多可能的实现过程，从而得到所有未来价格的一个精确的分布。

通过这种方法，我们生成了基于历史数据的未来可能情境的分布。

请注意我们如何将所有资产价格在同一天的变动放在一起。只有这样才能确保捕捉到资产间可能存在的相关性。

靴襻法非常容易实现。这种方法的优点是它可以捕捉到资产间的所有相关性和资产价格变化的所有非正态性特征。不过它并不能捕捉到数据间的自相关性，当然，基本形式的蒙特卡罗模拟也不能捕捉。靴襻法的主要缺陷是需要非常多的历史数据，而这些数据可能对应的是并不适用于目前的甚至完全不同的经济环境。

图 19-4 显示了不同股票的历史日收益率和在随机选择中使用到的“索引”。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Index	Prob.	TELEBRAS	ELETROBRAS	PETROBRAS	CVDR	USIMINAS	YPF	TAR	TEO	TGS	PEREZ	TELMEX	TELEVISA
2	1	0.001	-0.0152210	0.0180185	0.0118345	-0.0240975	-0.0111733	0.0355909	0.0185764	0.0071943	0.0121214	-0.0182190	-0.0235305	-0.0153849
3	2	0.001	0.0091604	0.0072214	-0.0046130	0.0001039	-0.0226244	0.0207620	0.0121953	0.0106953	0.0000000	-0.0026393	0.0327898	0.0746615
4	3	0.001	-0.0498546	-0.0397883	-0.0324353	-0.0246926	-0.0115608	0.0068260	-0.0121953	-0.0106953	0.0119762	-0.0067506	-0.0139213	-0.0144930
5	4	0.001	-0.0357762	-0.0494712	-0.0358569	-0.1001323	-0.0602100	-0.0068260	-0.0123458	-0.0254097	0.0000000	-0.0144520	-0.0284379	-0.0371790
6	5	0.001	0.0033058	-0.0204013	0.0112413	0.0264184	0.0114388	-0.0068729	0.0061920	0.0036697	-0.0240976	0.0096238	0.0000000	0.0000000
7	6	0.001	0.0424306	0.0260111	-0.0255043	-0.0022909	0.0004155	0.0067340	0.0452054	0.0438519	0.0115608	0.0140863	0.0421608	0.0932575
8	7	0.001	0.0279317	0.0006216	0.0006216	0.0006216	-0.0234759	0.0040080	-0.0208341	0.0000000	-0.0114287	0.0000000	0.0123205	-0.0065147
9	8	0.001	-0.0139801	-0.0383626	-0.0346393	0.0161040	0.0122250	0.0000000	0.0259755	0.0176996	0.0114287	-0.0020299	0.0439192	0.0384663
10	9	0.001	-0.0052219	-0.0036563	0.0403377	0.0142520	0.0229896	0.0063898	0.0101524	0.0085349	0.0114287	-0.0019638	0.0000000	0.0171924
11	10	0.001	-0.0130693	0.0000000	-0.0116961	-0.0047282	0.0112996	0.0000000	0.0100503	0.0112677	0.0112996	0.0081304	-0.0267702	-0.0229895
12	11	0.001	-0.0106656	-0.0148639	0.0069306	-0.0048541	-0.0114030	0.0000000	-0.0100503	-0.0169496	-0.0112996	-0.0166294	-0.0116960	0.0057971
13	12	0.001	0.0079035	0.0184167	-0.0023392	-0.0240975	0.0112996	0.0000000	-0.0050633	-0.0085837	0.0335227	-0.0170073	0.0039139	0.0228581
14	13	0.001	0.0000000	-0.0072225	-0.0284021	0.0001035	-0.0226248	0.0000000	-0.0257084	-0.0380719	-0.0110498	-0.0063762	0.0000000	0.0112361
15	14	0.001	0.0000000	-0.0042230	0.0242792	-0.0004134	-0.0126835	-0.0061920	0.0100001	0.0057471	0.0109291	0.0144183	0.0411581	0.0745331
16	15	0.001	-0.0475377	-0.0138620	-0.0251059	-0.0444106	-0.0254146	-0.0062305	-0.0150379	-0.0057471	0.0000000	0.0300138	-0.0080972	0.0000000
17	16	0.001	0.0297428	0.0102652	0.0114445	0.0714950	-0.0008256	0.0415490	0.0277796	0.0309303	0.0408220	-0.0035537	0.0419109	0.0475023
18	17	0.001	-0.0037045	-0.0192060	-0.0248187	0.0078541	-0.0129914	-0.0116280	-0.0045977	0.0052771	0.0000000	0.0007187	-0.0075758	-0.0105264
19	18	0.001	-0.0208341	-0.0205823	-0.0264421	-0.0021947	-0.0267507	0.0231224	0.0091744	-0.0052771	-0.0304592	0.0152095	-0.0269766	-0.0268113
20	19	0.001	0.0568874	0.0828276	0.1052577	0.0477150	0.0612661	0.0271019	0.0753494	0.0746435	0.0388398	0.0599762	0.0498324	0.0438026
21	20	0.001	0.0655911	0.0209154	0.0209922	0.0420456	0.0224756	-0.0173917	0.0165293	0.0223058	0.0000000	0.0232360	0.0036036	0.0194181
22	21	0.001	-0.0091109	0.0309987	0.0615672	-0.0428678	0.0221646	0.0058309	0.0122201	0.0145988	0.0392207	0.0139353	-0.0592766	-0.0342332
23	22	0.001	0.0231470	-0.0036810	-0.0003084	0.0158210	0.0099482	0.0342891	0.0160646	0.0264121	0.0204089	0.0208262	0.0679507	0.0386522
24	23	0.001	0.0157998	-0.0014713	-0.0122804	-0.0094697	-0.0014375	0.0277026	0.0504962	0.0440396	0.0492710	0.0285456	-0.0073260	0.0280392
25	24	0.001	-0.0045147	-0.0054003	-0.0008614	-0.0020500	0.0379553	-0.0054795	-0.0191210	-0.0136988	0.0000000	0.0101176	-0.0073801	-0.0233111
26	25	0.001	0.0270287	0.0275012	0.0583711	0.0001022	0.0361421	0.0280130	-0.0038536	0.0069849	0.0000000	0.0034104	-0.0109690	-0.0432968
27	26	0.001	-0.0089286	0.0068362	0.0038686	0.0248968	-0.0087868	0.0000000	-0.0116506	-0.0093241	0.0000000	0.0110554	-0.0036832	-0.0044346
28	27	0.001	0.0133632	0.0232183	0.0512933	0.0202027	0.0436750	-0.0167135	-0.0117880	-0.0285055	-0.0099503	-0.0080555	0.0000000	0.0088496
29	28	0.001	-0.0110341	0.0417395	0.0176995	0.0506932	0.0085108	0.0000000	-0.0240012	-0.0268636	0.0000000	0.0005324	0.0000000	0.0043956
30	29	0.001	-0.0044544	-0.0289144	0.0069770	-0.0002423	-0.0002043	-0.0056023	0.0000000	0.0024907	0.0000000	-0.0037901	0.0000000	-0.0277796
31	30	0.001	0.0044544	0.0001022	-0.0344781	-0.0075315	0.0086859	0.0056023	0.0202027	0.0049628	0.0204089	0.0147792	0.0038241	0.0277796
32	31	0.001	-0.0044544	-0.0065956	-0.0225751	0.0151071	-0.0173439	0.0111112	-0.0040080	0.0024722	0.0396091	0.0090663	-0.0115164	-0.0184337
33	32	0.001	0.0088685	-0.0067409	0.0284793	0.0204063	0.0261791	0.0096270	0.0043197	-0.0052632	0.0000000	0.0184492	-0.0076923	0.1048796
34	33	0.001	-0.0178163	-0.0084174	0.0036982	0.0183391	-0.0186661	-0.0242436	-0.0350913	-0.0240332	-0.0202027	-0.0280518	-0.0234386	-0.1242977
35	34	0.001	-0.0205219	-0.0174839	-0.0199091	-0.0849882	-0.0120831	-0.0061539	-0.0134834	-0.0108697	0.0000000	-0.0075047	0.0039448	0.0097562
36	35	0.001	-0.0092167	0.0172806	0.0323986	0.0769500	-0.0145534	-0.0313505	-0.0368705	-0.0221003	0.0202027	-0.0096608	-0.0320027	-0.0600180
37	36	0.001	-0.0256977	-0.0470936	-0.0464976	-0.0325785	-0.0460766	-0.0128207	-0.0189579	-0.0340942	-0.0100503	-0.0547012	-0.0081633	0.0102565
38	37	0.001	0.0303167	0.0398480	0.0188954	0.0204067	0.0278547	0.0625204	0.0421608	0.0396653	0.0000000	0.0471675	0.0322609	0.0497615
39	38	0.001	0.0000000	0.0178185	0.0003050	0.0122735	0.0093548	0.0000000	0.0091325	0.0082988	0.0298530	0.0320480	0.0039604	-0.0097562
40	39	0.001	-0.0113079	-0.0069686	0.0628009	-0.0039604	0.0266682	0.0180185	-0.0091325	-0.0109690	0.0194181	0.0310527	-0.0039604	-0.0148151
41	40	0.001	-0.0479236	-0.0464835	-0.0264332	0.0000000	-0.0266682	-0.0180185	-0.0279088	-0.0198027	-0.0096619	-0.0065198	-0.0119762	-0.0150379
42	41	0.001	-0.0374621	-0.0690578	-0.0427517	-0.0537785	-0.0563828	0.0000000	-0.0094787	-0.0229895	-0.0196085	-0.0109291	-0.0161947	0.0050378

图19-4　靴襻法数据的电子表格

19.7 在险值在业绩评价中的应用

在险值的一种应用是，对银行、部门或单个交易员的绩效进行评价。过去，“交易能力”只是单纯用利润来衡量，交易员的奖金和利润相关。这将鼓励交易员冒险：试想抛一枚硬币，你可以得到一定比例的利润而没有下行风险（风险由银行承担），你愿意赌多少呢？在这样一场赌局中，对交易能力更好的衡量方法是考虑风险并对收益风险比率高的人给予奖励。这个比例就是**夏普比率**（Sharpe ratio）：

$$\frac{\text{风险溢酬}}{\text{波动率}} = \frac{\mu - r}{\sigma}$$

或者，用在险值作为风险的衡量，利润/损失作为收益的衡量：

$$\frac{\text{日盈亏}}{\text{日在险值}}$$

19.8 极值理论的介绍

更多现代技术使用**极值理论**（extreme value theory）估计尾部风险。由于很多重要风险都存在于外部极限中，极值理论的思想就是更准确地表示收益率分布的外部极限。正态分布因为尾部太细以至于不能捕捉到频繁的市场崩盘（或回升），因而被抛弃。关于极值理论，我们不会在这里深入讨论，这个题目的内容丰富到可以写整整一本书（而且已经存在，Embrechts，Klüppelberg 和 Mikosch 1997，非常好的一本书）。

一些极值理论结果

1. 最大值/最小值的分布

如果 X_i 是独立同分布的随机变量，且

$$x = \max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

那么 x 的分布收敛于

$$\exp\left(-\left(1+\frac{\xi(x-\mu)}{\sigma}\right)^{-1/\xi}\right)$$

当 $\xi=0$ 时，这是 Gumbel 分布；当 $\xi<0$ 时，为 Weibull 分布；当 $\xi>0$ 时，为 Frechet 分布。由于和厚尾有关，Frechet 分布是金融领域比较关注的一个分布。

2. 跨越阈值的尖峰

考虑损失超过 u 的量为 y 的概率（给定阈值 u 已经被超过）：

$$F_u(y) = P(X - u \leqslant y \mid X > u)$$

它可由广义帕累托分布近似如下：

$$1 - \left(1 + \frac{\xi X}{\beta}\right)^{-1/\xi}$$

在厚尾情况下，$\xi > 0$，且并不是所有阶矩均存在：

$$E[X^k] = \infty \text{ for } k \geqslant 1/\xi$$

模型中的参数由最大似然估计法拟合得到，比如通过历史数据进行估计；而在参数已估计的基础上，我们可以推知未来。

3. 示例

（来自 Alexander McNeil，1998）

用 28 个年度最大值[⊖]来拟合 Frechet 分布，从 1960 年至 1987 年 10 月 16 日（大事件前一工作日），然后计算各个收益率的概率。比如，50 年收益率水平应是在每 50 年内只有一年被超过的平均水平。结果是 24%。接下来一天 10 月 19 日是 20.4%。注意，在该数据库中跌幅最大的也“只有”6.7%。

19.9 一致性

有一些风险测量方法会比其他方法显得更合理。Artzner、Delbaen、Eber 和 Heath（1997）指出合理的风险度量应该具有的一些性质，他们称具有这些性质的度量指标是“一致的”。如果我们用 $\rho(X)$ 表示对一组结果 X 的风险度量，那么这些必要性质如下。

1. 次可加性：$\rho(X+Y) \leqslant \rho(X) + \rho(Y)$。这仅仅表示如果将两个投资组合相加，总风险并不会比将两个投资组合的风险分别相加更糟糕。确实，抵消作用或规模经济使风险改善。

2. 单调性：如果对每一种情境都有 $X \leqslant Y$，那么 $\rho(X) \leqslant \rho(Y)$。非常明显，如果一个投资组合在所有情境下都比另一个投资组合有更好的价值，那么前者的风险状况也将更好。

3. 正同质性：对所有 $\lambda > 0$，有 $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$。你的投资组合翻倍了，风险

⊖ 指损失的最大值。——译者注

也会相应翻倍。

4. 平移不变性：对所有常数 c，有 $\rho(X+c)=\rho(X)-c$。想象一下在投资组合中加入现金的情况。

常见的风险度量是否满足这些合理准则？令人惊讶和相当可惜的是，几乎都不满足！比如，经典的在险值就违背了次可加性。

19.10 总结

对任何投资组合下行风险的估计无疑是非常重要的。对它的不了解可能会导致银行的倒闭，而且也确实发生过。实际上，相比起交易员，在险值对银行管理者来说更加重要。如果银行刚倒闭交易员就能找到一份新工作，那他怎么会在乎呢？

我已经介绍了估计在险值最简单的方法，但是这个主题可以更复杂地展开。“复杂”并不是准确的词，“麻烦”和“耗时”更准确。目前有很多软件商、银行和学者宣传自己的方法有望成为市场准则，其中的一些我们将在第 42 章进行更详细的讨论。

延伸阅读

- 在险值方法在衍生品领域的应用参见 Lawrence (1996)。
- 关于风险管理更广泛的讨论和实际生活中在险值重大“危机”的细节，参见 Chew (1996)。
- 关于在险值数学方面进一步的信息，参见 Jorion (1997)。
- 关于银行资本的配置，可见 Matten (1996)。
- Alexander 和 Leigh (1997)、Alexander (1997a) 对在险值协方差估计进行了讨论。
- Artzner, Delbaen, Eber 和 Heath (1997) 讨论了一个合理的在险值模型所应该具有的性质。
- Lillo, Mantegna, Bouchaud 和 Potters (2002) 介绍了衡量股票离散程度的概率“多变性”(Variety)。

第 20 章

预测市场

本章内容

- 一些用于预测市场方向的常用技术方法
- 一些用于市场及其微观结构建模的现代方法

20.1 引言

自从盘古开天地以来，人们都在对未来进行预测，而其中对金融市场未来的预测一直特别受欢迎。尽管许多“传说中的”投资者声称他们能准确预测市场，但我们仍不清楚究竟是因为他们使用的方法有效，还是他们只是幸存者偏差的例子：最大的输家往往会保持缄默。

人类似乎很喜欢确定性的事物，面对随机性的事件往往觉得棘手（这一点在文明早期时体现得更突出）。这种情况早在人类穴居时代就存在。一天 Ug 和他的朋友 Og 站在洞穴口，而一只剑齿虎正慢慢靠近。老虎拖走了 Og 当晚餐。非常凑

巧，在这一切发生的过程中 Ug 正在挠他的左耳。现在，每当 Ug 看到剑齿虎，他都会挠左耳来保障自己的安全。Ug 当时做什么与 Og 被拖走也许并没有什么联系，但或许有呢，况且在未来谨慎行事也并没有什么坏处。

在本章中，我们将介绍一些决定市场走势的传统方法，即技术分析，以及一些比较新（通常来源于物理学）的方法。我不会描述那些受到质疑的想法，比如占星术，但是我们天蝎座往往持怀疑态度。[⊖]

20.2 技术分析

技术分析（technical analysis）是一种只通过观测历史价格来预测未来价格走势的方法。历史价格还可能包括交易量在内的其他变量。这种方法与**基本面分析**（fundamental analysis）不同。在基本面分析中，预测是基于对影响股票或其他产品的因素的考察而得出，可能包括一般的经济或政策分析，或者是股票具体因素的分析。比如，若投资者关注的是一家旅游公司，那么他会考虑全球变暖对阿尔卑斯山降雪的影响。在实际中，大部分交易员会将技术分析和基本面分析结合起来使用。

由于价格等指标的图形表示是技术分析重要的组成部分，因此技术分析也被称为**图表法**（charting）。技术分析被认为是对市场变动时机进行把握的上佳方法——通过基本面分析也许能得到正确的变动方向，但不能确定该变动将在何时发生。

20.2.1 作图

最简单的一种图是，在以时间为横轴、价格为纵轴的坐标系上依次连接每天的价格点。在本书中，你已经看到很多这种类型的图。有时候纵轴选用价格的对数以表示收益率而不是绝对水平。稍后我们会见到一些更复杂的图。有时候你会发现交易量和价格出现在同一张图中，它也可以用于预测，但我不会在这里详细介绍（见图 20-1）。

⊖ 我曾经认识一个交易员一直把星象图放在他的电脑上。我原以为那只是在他离开办公桌时用来隐藏实际策略的屏幕保护程序。在他被解雇后不久，我们发现实际上……

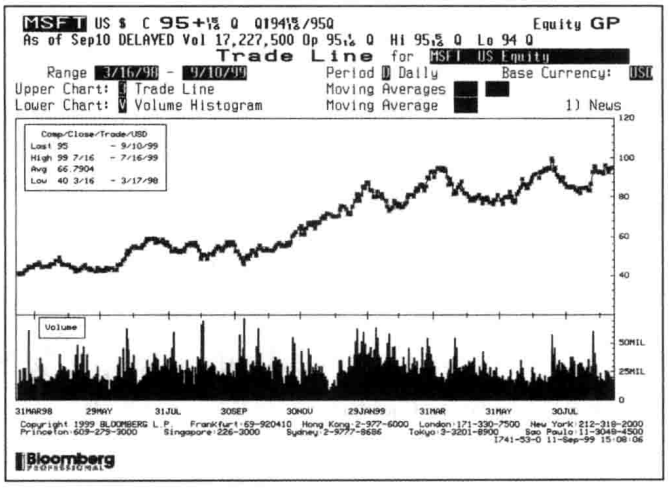


图 20-1 价格和交易量

资料来源：Bloomberg L. P.

20.2.2 支撑位和阻力位

阻力位（resistance）是资产似乎难以超越的一个价格水平，可能是之前实现的最高值，也可能是一个重要的（整数）心理价位。**支撑位**（support）是资产价格似乎很难跌破的一个价格水平。在这个低价格水平上有足够的需求来阻止它进一步下跌。支撑位和阻力位的例子见图 20-2。

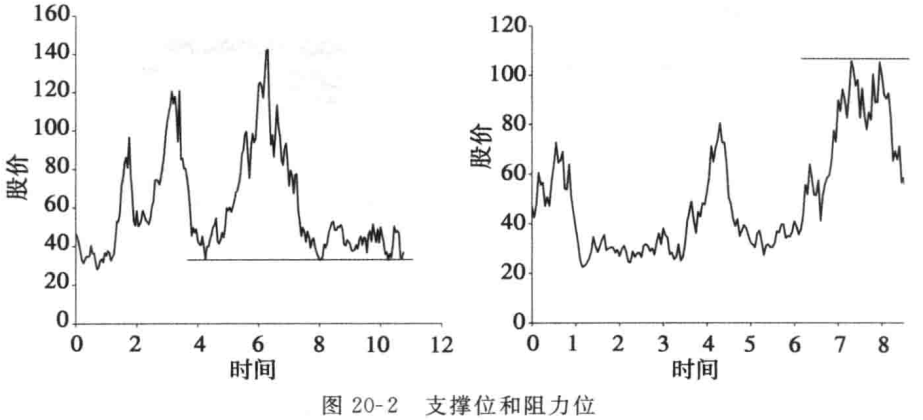


图 20-2 支撑位和阻力位

据说当支撑位或阻力位水平最终被突破时，价格变动将非常剧烈。

20.2.3 趋势线

与支撑位和阻力位相似的是**趋势线**（trendlines）。趋势线是通过连接历史价格连续的高峰和/或低谷，形成一个上升或下降的支撑位或阻力位。示例见图 20-3。

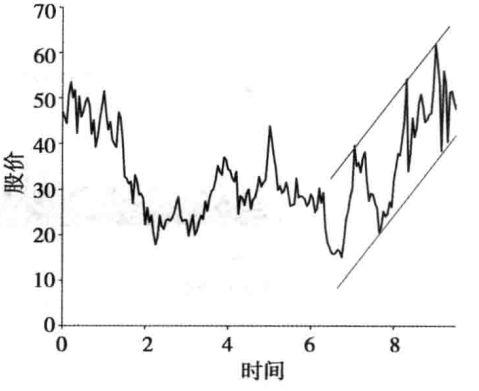


图 20-3 具有趋势线的股票

20.2.4 移动平均

移动平均线（moving averages）可以用多种方法计算。我们可以使用不同的时间窗，甚至可以选取指数加权平均来计算。移动平均线旨在通过平滑随机噪声提炼价格的基本走势。

有时候会需要同时计算两条移动平均线，比如 10 天移动平均线和 250 天移动平均线。这两条线的交叉处标志着潜在趋势的变化以及买卖的时机。

虽然我不是技术分析的狂热支持者，但有证据表明移动平均线确实具有价格预测的能力。

图 20-4 显示了彭博资讯中微软公司股价 5 天和 15 天的移动平均线。

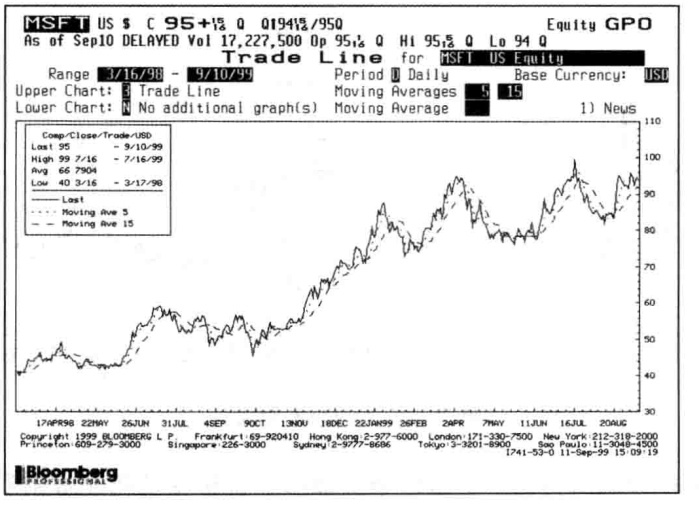


图 20-4 两条移动平均

资料来源：Bloomberg L. P.

20.2.5 相对强度指标

相对强度指标（relative strength）是过去 N 天中上涨天数所占的百分比。高于70%被认为是超买，因此价格很可能下跌；而低于30%被认为是超卖，价格很可能上涨。

20.2.6 震荡线

震荡线（oscillator）是指示超买或购买不足状况的另一个指标。计算它的方法之一如下所示：

定义 k 为

$$100 \times \frac{\text{当前收盘价} - n \text{期的最低收盘价}}{n \text{期的最高收盘价} - n \text{期的最低收盘价}}$$

现在取过去3天（比如）的移动平均，将该平均值绘制在以时间为轴的图形上，任何超过30%～70%这一范围的变动都可能是资产变动的迹象（见图20-5）。

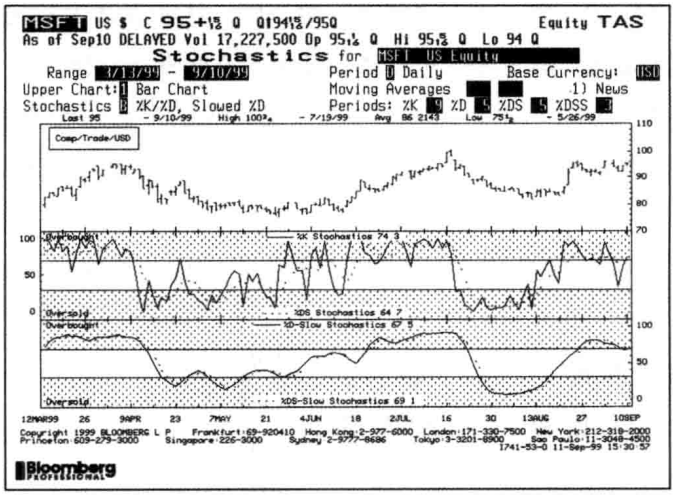


图20-5 震荡线

资料来源：Bloomberg L. P.

20.2.7 布林带

布林带（Bollinger bands）是比特定移动平均线高、低特定数量的标准差所覆盖的范围，见图20-6。

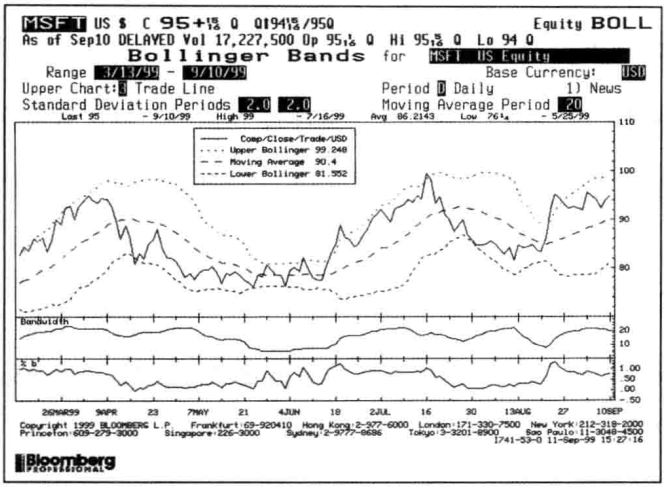


图 20-6 布林带

Source: Bloomberg L. P.

20.2.8 各种形态

图有“数量”的一面，也有“艺术”的一面。从业者认为特定的图形形态预示了特定的未来走势，就像你的祖母通过杯中的茶叶占卜一样。

头肩顶形态（head and shoulders）是一类常见的形态，图 20-7 给出了最好的描述。头部常伴随有左肩和右肩。从右肩开始紧接着资产价格会有一个剧烈下跌。

这个形态被认为是最可靠的预测指标之一。在上下颠倒的形态中也可以见到。

碟形顶和碟形底（saucer tops and bottoms）也称为**圆弧顶和圆弧底**（rounding tops and bottoms）。它们是供给关系逐渐变化的结果，形状随着价格的涨跌通常比较对称。这些形态非常少见，它们不包含新走势强度的信息。见图 20-8。

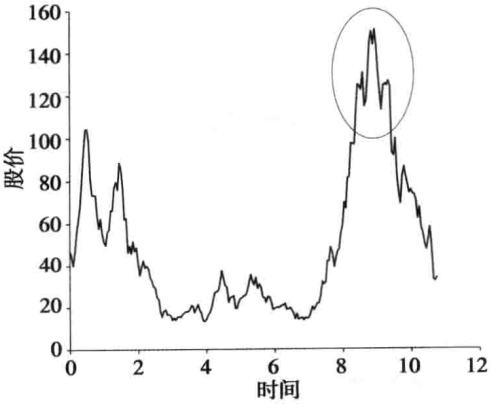


图 20-7 头肩顶形态

双重和三重顶和底（double and triple tops and bottoms）是非常少见的形

态，三重比双重更少见。双重顶看起来像一个“M”，而双重底看起来像一个“W”。三重顶与双重顶类似，只是峰顶有三个，如图 20-9 所示。关键的一点是，各波峰和各波谷都应在差不多的水平上。

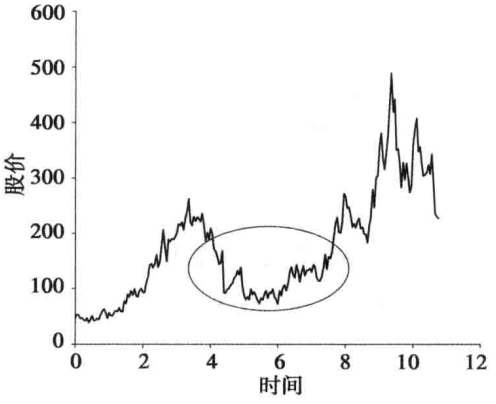


图 20-8 碟形底

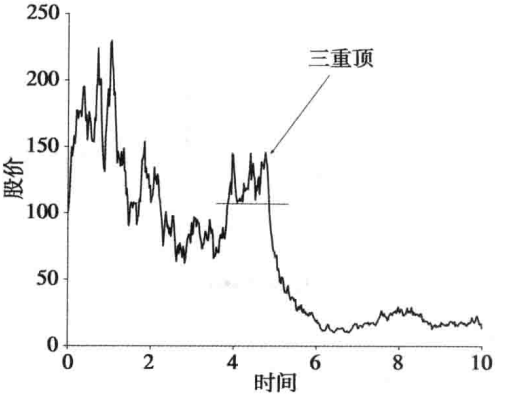


图 20-9 三重顶

20.2.9 日本蜡烛线

日本蜡烛线（Japanese candlesticks）比之前描述的简单图形包含了更多的信息：记录了每日开盘价和收盘价，以及每日最高价和最低价。一个长方形的上下边准确地对应该日开盘价和收盘价位置，如果收盘价高于开盘价就标为白色，如果收盘价低于开盘价则标为黑色（见图 20-10），而最高价到最低价的范围由一条连续的直线标示。

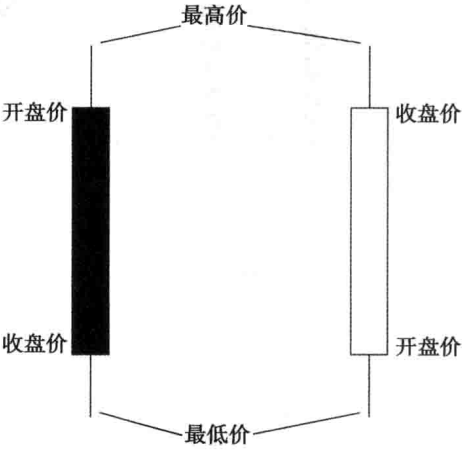


图 20-10 日本蜡烛线

某些连续显示的蜡烛线的组合具有特殊的含义和名称，比如“上吊线”和“上行缺口两乌鸦”。实际的蜡烛线见图 20-11。在该图中，“HR”是熊势形态，“D”是十字线（表示悬而未决），“BH”是牛势形态，“EL”是看跌吞没线，“H”是上吊线（表示趋势后的反转）。

图 20-12 显示了一些可能的蜡烛线形态及其对它们的解读。

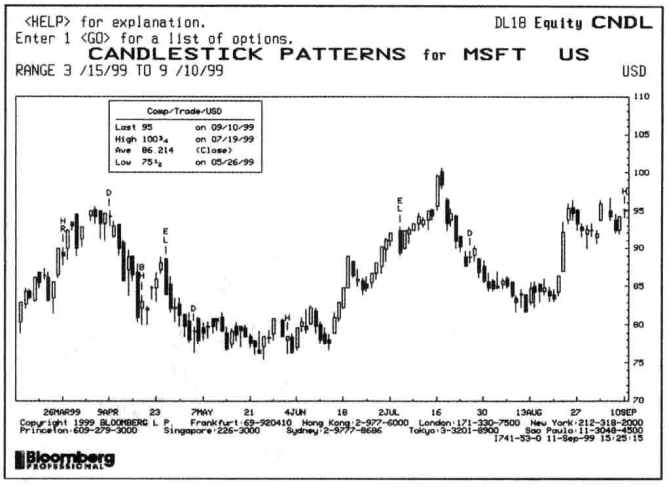
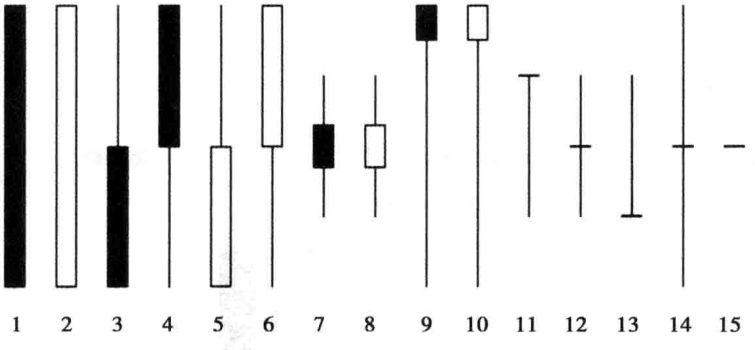


图 20-11 蜡烛图

Source：Bloomberg L. P.



1. 极度看跌
2. 极度看涨
3. 行情看跌
4. 行情看跌
5. 行情看涨
6. 行情看涨
7. 多空力量均衡
8. 多空力量均衡
9. 下降趋势时，看涨；上升趋势时，看跌
10. 下降趋势时，看涨；上升趋势时，看跌
11. 转折期
12. 转折期
13. 下跌趋势终止
14. 转折期
15. 可能转折期

图 20-12 各种蜡烛线的含义

20.2.10 点数图

点数图（point and figure charts）与之前描述的图形有所不同，它们在水平轴上没有具体的时标。图 20-13 是点数图的一个示例。图形上的每一个方格代表一个预先设定的资产价格的变动。这些方格是价格变动的一种离散化表示，而不

是时间的离散化。考虑连续的资产价格的变化，每上升一个方格单位就在上升的列中由下往上画一个“×”。当这个上升趋势结束并且资产价格下跌时，开始在一个下降列中画“○”，该○列的起点在之前上升的×列的右边。

- 一长列的×表示需求超过供给。
- 一长列的○表示供给超过需求。
- 较短的上升下降栏表示供需平衡。

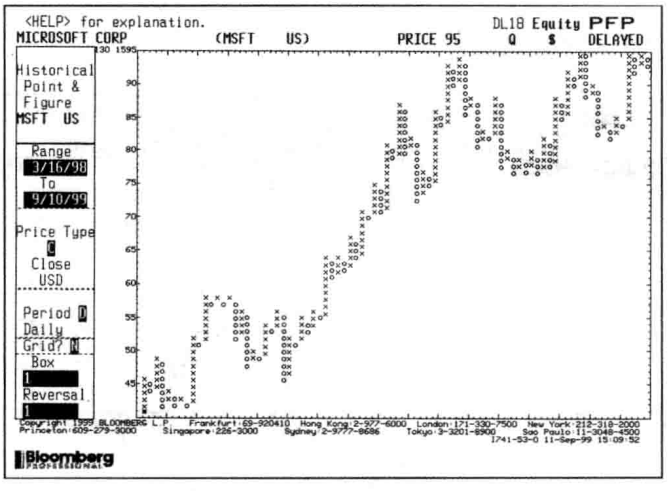


图 20-13 微软公司的点数图

20.3 波浪理论

与讨论价格变动时的绘图和趋势描绘一样，价格预测领域也存在着一些基于市场周期或波浪的预测理论。下面，我将简要介绍两种。

20.3.1 艾略特波浪和斐波那契数列

拉尔夫·艾略特观察到价格具有重复的形态、波浪或周期。粗略地讲，在一个牛势波浪中应该有5个点，接着一个熊势波浪中应有3个点（见图20-14）[⊖]。根据**艾略特波浪理论**（Elliott wave theory），每个波浪中峰顶的大小也具有预测能力。

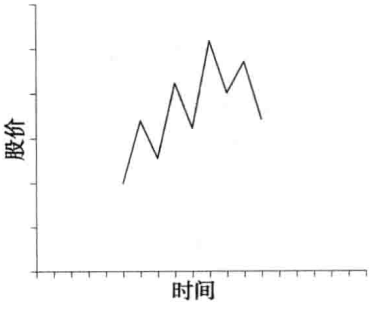


图 20-14 艾略特波浪

⊖ 当然，在布朗运动中，任何时期都有无限的波峰和波谷。

出于某些原因，趋势中波峰的比例应是相当稳定的。第二个波峰与第一个波峰的比例大约为 1.618，而第三个波峰与第二个波峰的比例则为 2.618。遗憾的是，1.618 是古希腊中**黄金比例**（Golden ratio）$\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ 的近似数。这也是**斐波那契数列**（Fibonacci series）中相邻数字的比例的极限值（斐波那契数列由 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ 给定，n 为较大整数时 $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ 近似等于 1.618）。我之所以说不幸是因为人们居然以此为依据进行疯狂的推断，如果这仅仅不过是一个巧合，那么……

图 20-15 显示了斐波那契数列的关键层次。

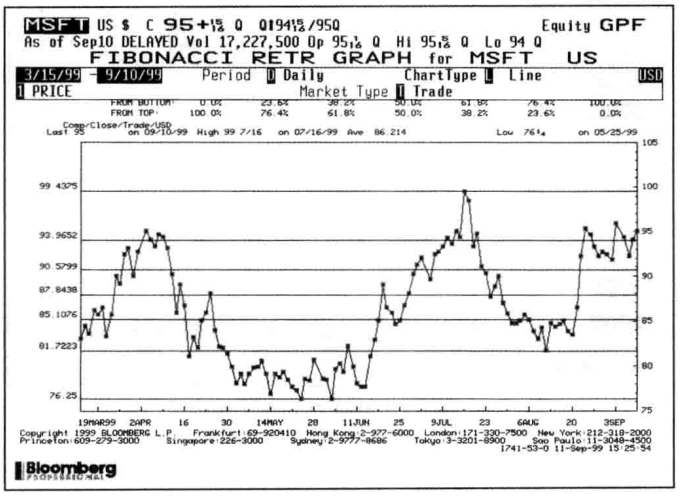


图 20-15 斐波那契线

资料来源：Bloomberg L. P.

20.3.2 江恩图

图 20-16 显示了一个江恩图。这些直线的斜率都是最低线斜率的分数。还需要我多说吗？

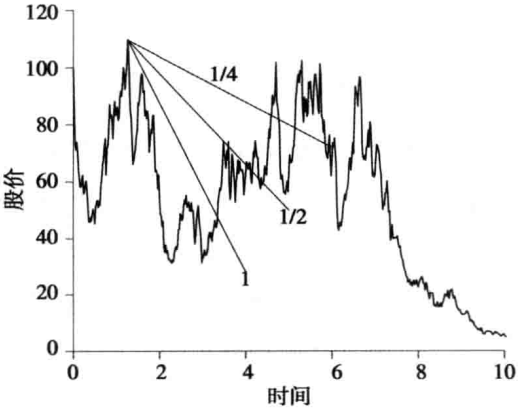


图 20-16 江恩图

20.4 其他分析方法

图形分析师几乎有无数种方法来分析数据。我在继续后文前将再提及一些。

交易量（volume）是给定时间内交易的合约量。上升的价格和高交易量意味着一个强上升走势的市场。但上升的价格和低交易量则可能是市场即将反转的信号。

未平仓合约数（open interest）是未平仓期货合约数，即那些还未结清的合约数。由于买方和卖方的数量是相等的，所以未平仓合约数并不一定能提供方向性信息，但是未平仓合约数的上升意味着当前市场的走势是强劲的。

20.5 市场微观结构建模

金融市场由多种类型的参与者组成。生产、制造或出售各种商品的“生产者”可能因套期保值需要而参与其中，而揣测市场走势的“投机者”希望利用市场趋势获利参与其中。这些投机者可能会利用前文所描述的技术分析，或者进行基本面分析，即通过考察公司的记录和未来发展计划以判断股价是被低估还是被高估。几乎所有的交易员都会不时地使用技术分析方法。另外还有一种市场参与者，那就是做市商。他们通过大量买卖并短期持有（一般只有若干秒）金融产品，从买卖价差中获利。

已经有很多人尝试对这些参与者之间的相互作用建模（比如运用博弈论的方法），进而对本书中已被视为理所当然的资产价格的变动进行建模。比如，由上述三类市场主体共同引起的动态行为，能否形成布朗运动和对数正态随机游走？

下面是关于这个领域的几个例子。

20.5.1 需求对价格的影响

买卖资产可以使价格变动。做市商通过提高价格应对市场需求，面临市场卖出时降低价格。如果我们可以对需求和价格的关系建模，就有可能分析各种类型的技术交易规则对价格变化的影响，并最终对价格的动态特征建模。

一般的建模出发点是，假设市场上存在有两类交易者和一个做市商。第一类交易者遵循技术交易规则（如关注移动平均线）；另一类交易者是随机进行买卖的**噪声交易者**（noise trader）。

从这些模型中得到一些有趣的结论，比如：

- 趋势追随者可以引出资产价格时间序列的形态；
- 这些人为导致的价格形态只能被一些适时追随相反趋势的人利用以获利；

- 和你追随同样趋势的人越多，你损失的钱将越多。

有充分的理由说明市场存在真实的趋势：信息从消息灵通者扩散到不灵通者是一个缓慢的过程。比方说，通过渐进式秘密收购一家公司将使其股价逐步上涨。

另一方面，如果形成趋势的真正原因并不存在，而只是趋势追随者导致的一个趋势，那么这个状态可能对持反向判断的一方有利。

20.5.2 市场微观结构和期权理论的结合

套利机会确实存在，许多人便由此获利。然而套利操作会通过需求/价格的关系消除市场上的套利机会，但是这个消除的过程也要求一定的时间。那么，明知自己的行为在一定程度上会弄巧成拙，利用套利机会的最佳操作方法该是什么样的呢？

20.5.3 模仿

另一种对市场微观结构建模的方法基于人们会互相模仿这样一个客观现象。在这类模型中，部分交易员根据关于某只股票的私人信息采取行动，部分交易员则像噪声交易者一样随机行动，剩下的部分交易员则模仿周围的人。这一类模型中可以产生诸如市场泡沫或市场崩盘的结果。

20.6 危机预测

金融领域也存在这样一些研究成果，它们通过分析各种时间跨度的数据以计算市场崩盘的可能性。一些源自地震建模的思想已经被用于推导一个（金融市场的）“里氏”——类似市场运动的衡量单位。当然，市场崩盘的有效预测：

- 当每个人都恐慌时会提高崩盘的可能性或规模；
- 当每个人都提前得到警示，可以据此冷静理性的行动时，会减小崩盘的可能性或规模。

20.7 总结

我多年前开始从事金融行业，绘制了所有的技术指标，但并不是很成功。我

只能得到一些具有明显季节效应的资产的正确走势方向，比如部分商品期货。

而我真正相信的技术指标只有一个：裙摆的长度无疑与国家经济之间具有很强的相关性。裙摆越短，经济越好。

延伸阅读

- 技术分析方面，Reuters（1999）和 Mayers（1994）的书都很出色。
- Farmer 和 Joshi（2000）对趋势追随和趋势产生进行了讨论和建模，并说明了阻止套利的需求和价格之间关系的性质。
- Bhamra（2000）主要研究的方面是金融市场中的模仿行为。
- Olsen 和 Associates（www. olsen. ch）目前致力于危机模型和预测领域的研究。
- Johnson，Hui 和 Lo（1999）对交易者的自发组织的分割行为进行建模，并得到谨慎交易者表现不尽如人意的结论。
- 以上只是对一个正在扩张领域中少量例子的简要介绍。关于市场微观结构模型更广泛的探讨可以参考 O'Hara（1995）。
- Bernstein（1998）有一整章关于黄金比例的介绍。
- Elton 和 Gruber（1995）描述了有效市场假说，并批判了技术分析。
- Prast（2000a，b）探讨了金融市场中的“羊群效应”。
- 关于支撑位和阻力位的数学模型参考 Osband（2004）。

第21章

一个交易游戏

本章内容

- 一个模拟期权交易的简单游戏

21.1 引言

很多阅读本书的人永远不会去交易期权，他们甚至连股票交易也不会参与。本章描述了一个非常简单的交易游戏，这个游戏里一群人可以试试手而不会把裤子当掉。这个游戏来自于我的学生大卫·爱普斯坦。

21.2 目的

这个游戏的目的是使学生熟悉在市场上交易的基本衍生品合约，并提升对与交易相关的概念的理解，比如买价、卖价、套利和流动性。

21.3 游戏目标

比你的对手赚更多的钱。在交易的最后一轮，每个玩家加总其利润和损失。获利最多的玩家就是胜者。

21.4 游戏规则

1. 一人（可能是报告人）是游戏的组织者，负责选择可交易合约的类型、交易回合的次数和时长、判定任何争论，并在游戏节奏不流畅时督促游戏顺利进行。

2. 交易游戏有许多回合。在每一回合结束时，掷一枚六面的骰子。在最后的一回合，所有骰子点数的和视为“股价”。

3. 交易合约可以包括部分或全部由组织者决定的远期合约、看涨和看跌期权（见图 21-1）。组织者也必须确定看涨或看跌期权的行权价格。

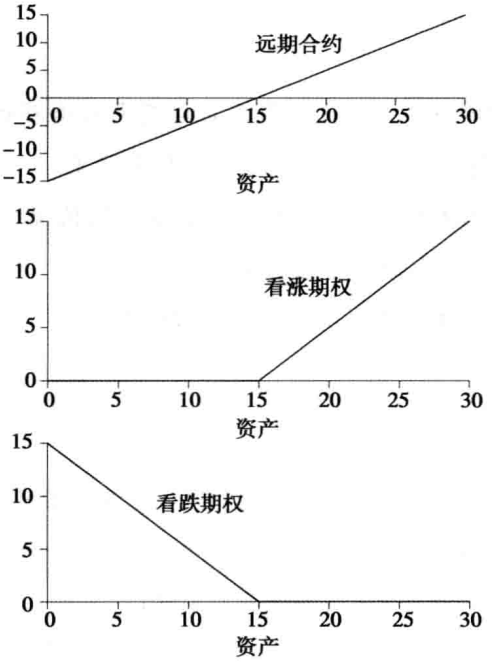


图 21-1 可交易的合约

4. 所有合约在最后一轮结束时到期。每个交易合约的结算值可以通过将股价代入相应公式得到。玩家在每次交易中的利润和损失可由此计算，加总的利润 / 损失是他们最后的得分。

5. 在一个回合中，玩家们可以为购买或出售任何交易合约给出买入或卖出报价，如果另一个玩家在已给出的报价下选择接受，那么交易达成，双方必须在各自的交易表上记录该笔交易。

6. 合约交易必须包括以下信息：

- 远期合约：远期价格和数量；
- 看涨或看跌期权：期权类型（看涨或者看跌）、行权价格、成本和数量。

组织者选择可交易的合约类型和执行价格。

交易中的远期价格或期权成本和数量由玩家选择。

初学者可以依以下顺序玩三个游戏：

1. 仅仅玩远期合约；
2. 玩远期合约和行权价 15 的看涨期权；
3. 玩远期合约和行权价 15 的看涨、看跌期权。

三个游戏反复五个回合（或以上），每回合约 5 分钟。

21.5 注释

1. 取决于玩家的预备知识多少，组织者可能需要解释各种交易合约的特点。在一开始就强调远期合约的签订不需要成本将很有必要。

2. 可能会存在组织者作为“做市商”促进交易的情况，例如，询问群体中是否有人想购买股票或在什么价位愿意购买。

3. 对于更高级的学生，考虑引入以下一些想法：

- 增加回合数；
- 减少每回合的时长；
- 添加不同行权价的额外看涨和看跌期权，或者在不同时间产生或到期的额外看涨和看跌期权。你必须在游戏之前确定这些额外合约的细节；
- 添加其他合约，比如亚式期权或障碍期权；
- 添加第二个骰子用于确定第二个标的股价。

4. 可以尝试包括按“日”盯市的期货合约，但这会放慢游戏节奏。然而，它确实说明了保证金的重要性，特别是当学生被允许的“债务”额度有限时。

21.6 如何填写交易表

21.6.1 在交易回合中

在图 21-2 的“合约”栏里，填入你已经购买/出售的金融产品的说明。尽可

能详细地说明相应合约的远期价格或行权价格（比如，在游戏中如果有一个以上的这种类型的合约）。

在“买/卖”栏里，填入你已经购买或出售的合约及其数量。

在“单个合约成本”栏里，填入单个合约的成本。

交　易　表

合　约	买/卖	单个合约成本	总　成　本	结算价值	利润/损失

图 21-2　交易游戏：由大卫·爱普斯坦 1999 年设计

21.6.2　在游戏结束时

在“结算价值”栏里，填入单个合约按最终股价计算的价值。

在“利润/损失”栏里，填入单个合约的利润/损失。

在“总利润/损失”栏里填入交易的总利润/损失（利润/损失×数量）。

示例

在一个回合中，你的交易如下：

买入 10 份行权价 20 的看涨期权，每份成本 2 美元；出售一份行权价 15 的看

跌期权，成本 1 美元；买入 5 份远期价格 19 的远期合约。

你的交易表应填写如下：

合　约	买/卖	每份合约的成本	总　成　本	结 算 价 值	利润/损失
看涨期权 20	买 10	2			
看跌期权 15	卖 1	1			
远期合约 19	买 5	—			

在游戏结束时，最终股价是 21。因此，交易表便以如下形式完成：

合　约	买/卖	每份合约的成本	总　成　本	结 算 价 值	利润/损失
看涨期权 20	买 10	2	21−20=1	1−2=−1	−1×10=−10
看跌期权 15	卖 1	1	0	1−0=+1	+1×1=+1
远期合约 19	买 5	—	21−19=2	+2	+2×5=+10

因此，该交易者的总利润和总损失是−10+1+10=+1。

切记：

- 如果你买入一份合约，利润/损失=结算价值−每份合约的成本。
- 如果你出售一份合约，利润/损失=每份合约的成本−结算价值。

这本书是《数量金融》（原书第2版）的第1卷：数理与金融基础，衍生品基本理论，风险与收益。这一卷向读者介绍了基本的数学工具以及各种必须的金融概念以帮助理解数量金融、组合管理和衍生品。本卷也刻画了投资世界与赌博世界之间的各种相似之处。两者之间值得玩味的是，前者受到人们的尊敬，后者却显得不那么体面。

本卷的主要章节

- 资产的随机行为
- 布莱克–斯科尔斯模型
- 布莱克–斯科尔斯期权定价公式和“希腊字母”
- 提前执行与美式期权
- 如何进行Delta对冲
- 固定收益证券和分析：收益率、久期和凸性
- 互换
- 二叉树模型
- 正态近似的准确性
- 从黑杰克和赌博学到的投资经验

作者列出了大量彭博资讯系统的页面，通过真实的条款佐证他所阐述的各项观点。同时也结合了大量必不可少的Visual Basic计算机代码、模型的电子数据表解释、产品说明书以及期权分类表格。

除了实用性导向外，作者以漫画的形式出现在整本书中，以带有个人色彩的口语化文字对书中讨论的关键部分内容给出强调与解释。

保罗关于数量金融那无与伦比的文字已成为我的研究生必读的材料。他的风格不可复制：简洁明了又诙谐有趣。而他天生具有教学的天分，这一点在他的文字中足以体现。我已经不记得有多少次通过推荐他的文章来拯救饱受晦涩文章折磨的学生。

—— **卡罗尔·亚历山大 教授**

国际资本市场协会商学院，风险管理主席和研究主管

WILEY
www.wiley.com

投稿热线：(010) 88379007
客服热线：(010) 68995261 88361066
购书热线：(010) 68326294 88379649 68995259

华章网站：www.hzbook.com
网上购书：www.china-pub.com
数字阅读：www.hzmedia.com.cn

上架指导：金融
ISBN 978-7-111-49501-7
9 787111 495017 >
定价：119.00元