

保罗·威尔莫特数量金融系列

数量金融

(原书第2版)

Paul Wilmott

ON

QUANTITATIVE

FINANCE

2ND EDITION

[美] 保罗·威尔莫特 (Paul Wilmott) 著 郑振龙 陈蓉 陈焕华 等译



机械工业出版社
China Machine Press

保罗·威尔莫特数量金融系列

数量金融

(原书第2版)

Paul Wilmott

ON

QUANTITATIVE
FINANCE

2ND EDITION

[美] 保罗·威尔莫特 (Paul Wilmott) 著 郑振龙 陈蓉 陈焕华 等译



机械工业出版社
China Machine Press

图书在版编目 (CIP) 数据

数量金融 (原书第 2 版·第 2 卷) / (美) 威尔莫特 (Wilmott, P.) 著; 郑振龙等译. —北京: 机械工业出版社, 2015.4

书名原文: Paul Wilmott on Quantitative Finance

ISBN 978-7-111-49487-4

I. 数… II. ①威… ②郑… III. 金融学—数量经济学 IV. F830

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 041436 号

本书版权登记号: 图字: 01-2014-2013

Paul Wilmott. Paul Wilmott on Quantitative Finance, 2nd Edition.

Copyright © 2006 by Paul Wilmott.

This translation published under license. Simplified Chinese translation copyright © 2015 by China Machine Press.

No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or any information storage and retrieval system, without permission, in writing, from the publisher.

All rights reserved.

本书中文简体字版由 John Wiley & Sons 公司授权机械工业出版社在全球独家出版发行。

未经出版者书面许可, 不得以任何方式抄袭、复制或节录本书中的任何部分。

本书封底贴有 John Wiley & Sons 公司防伪标签, 无标签者不得销售。

数量金融 (原书第 2 版·第 2 卷)

出版发行: 机械工业出版社 (北京市西城区百万庄大街 22 号 邮政编码: 100037)

责任编辑: 黄姗姗

责任校对: 董纪丽

印刷: 北京天宇万达印刷有限公司

版次: 2015 年 4 月第 1 版第 1 次印刷

开本: 185mm × 260mm 1/16

印张: 23.5

书号: ISBN 978-7-111-49487-4

定价: 119.00 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

客服热线: (010) 68995261 88361066

投稿热线: (010) 88379007

购书热线: (010) 68326294 88379649 68995259

读者信箱: hzjg@hzbook.com

版权所有·侵权必究

封底无防伪标均为盗版

本书法律顾问: 北京大成律师事务所 韩光 / 邹晓东

推荐序一

金融衍生品是 20 世纪最具革命性的金融创新，近 40 年来，全球金融衍生品市场发展迅猛，在高效管理风险、创造丰富投资工具与多样交易策略、创新金融产品等方面发挥了其他金融市场无法代替的作用。近年来，我国期货与衍生品市场的发展速度也在加快，沪深 300 股指期货、国债期货在中国金融期货交易所相继上市，上海证券交易所推出了上证 50ETF 期权。即使在国外，期权的出现也被称为“期权革命”，只要运用得当，其在资产配置、投资策略、风险管理乃至金融解决方案领域的应用之丰富、效果之奇妙常常令人称奇。伴随着我国经济的进一步对外开放和金融市场化改革的推进，我国的外汇期货与商品、金融等各类期权也将陆续推出，以远期、互换等交易工具和证券、信用等基础性资产为标的的场外金融衍生品市场也在迅速发展。衍生品正在成为我国各类金融机构和现货企业的重要工具，将被广泛地应用于外汇、利率、证券、大宗商品以及信用等各类基础产品的风险管理和金融创新。

现实的需求必然激发学习的热潮。然而，要想在日益复杂的衍生品市场中得心应手、游刃有余绝非易事。与期权等衍生品领域相关的学科——金融工程，被称为金融领域的“火箭科学”，其中至少涉及现代金融理论、复杂的数学知识技巧、数据处理分析技术和编程技术。大量深奥的数学知识和复杂技术的存在，使得许多人对此望而却步。进一步看，如何将这些复杂的知识与技术运用到实际市场中去，亦是一个不小的挑战。因此，对于金融工程领域的从业者和学习研究者来说，若有一本兼具理论深度和实际运用、清晰易懂的案头书籍备查，是一大幸事。

《数量金融》就是这样一套在金融工程领域难得一见的好书。作者保罗·威尔莫特博士是享誉国际的金融工程学家和金融顾问，是英国皇家学会的研

究学者，其主要研究领域是衍生品、风险管理和数量金融。他在牛津大学获得数学学士和流体力学博士学位，并进行了多年的研究工作。他创立了“数量金融证书”项目和《应用数量金融》杂志，出版了多部金融工程著作，发表了上百篇专业论文，被英国《金融时报》称为“诙谐的衍生品讲师”。他创办的网站 www.wilmott.com 在全球金融工程业界深受欢迎，主编的宽客杂志 *Wilmott* 在业界也有极大影响。书如其人，保罗·威尔莫特博士的这套《数量金融》既以简洁严谨的数学推导证明思想直觉的核心内涵，又以直观浅显的思想直觉阐释艰深复杂的数学推导，分析鞭辟入里、直击本质；既讨论复杂理论模型的基本原理，又专注于模型在实际运用中的诸多细节，让人受益匪浅；既涵盖极广，广泛涉及数学基础知识与技巧、定价原理、模型拓展、数值方法、程序实现等内容，又挖掘深入，展示金融工程问题的深刻本质与应用技巧。更难得的是，此书写作深入浅出，清晰易懂，读者略有基础就可以弄清复杂问题的来龙去脉，是一本将复杂广泛的金融工程问题讲得透彻务实的好书，值得大力推荐。

对于外文专业书籍的读者而言，译者的专业水准和表达能力至关重要。《数量金融》的中文版译者是我推荐此书的另一个重要原因。郑振龙教授和陈蓉教授带领的厦门大学金融工程团队是国内最优秀的金融工程教学和研究团队之一。作为中国金融工程学科的最初创始人之一，郑振龙教授带领团队长期潜心追踪和研究国际和国内金融工程的理论和实践动态，对复杂的金融工程问题理解透彻深入，对本质和前沿问题把握到位。不仅如此，郑振龙教授和陈蓉教授都擅长将复杂问题表达得浅显易懂，在学生和听众中享有很好的口碑。郑振龙教授和陈蓉教授主编的《金融工程》连续获评“十五”“十一五”和“十二五”国家级规划教材，郑振龙教授所讲授的本科“金融工程”被评为国家级精品课程。由于学生和听众的广泛好评，中国期货业协会多次邀请两位教授为期货公司高管和分析师授课，并专门与厦门大学金融工程研究中心合作开办多期“金融衍生品高级研修班”，为期货行业培养了数量众多的金融衍生品高端专业人才，这些专业人才在期货公司和其他金融机构的创新业务中正在大显身手。作为中国期货业协会人才发展战略规划的重要举措，这一研修班的举办在业内外受到高度评价。这样两位专家的翻译之作，值得信任与期待。

书为好书，出版恰逢其时，作者译者上佳。作为中国期货与衍生品市场发展的一名经历者，看到此书的出版，我十分高兴。由于译书不属科研成果，此次翻译整套大部头的《数量金融》，对于科研和教学任务繁重的两位教授来说，本是吃力不讨好之事。但两位教授出于对中国衍生品市场发展的拳拳之心，希望能引入与推广经典著作，促进中国金融工程高端专业人才培养。兴奋感动之余，特作序推荐此书。

李强

中国期货业协会

2015年3月9日

推荐序二

国际金融危机爆发以来，已经过了6年多，尽管全球场内衍生产品的活跃度远不如危机前多年那么活跃，全球场内衍生产品交易金额占全球GDP的比例从2007年40.3的峰值有所下降，但是近年来仍然保持在25上下的水平，在全球金融体系中的作用仍然重大且不容忽视。金融危机爆发后不久，国内不少人士认为：金融危机是金融衍生产品惹的祸，还好我国金融衍生产品当时并未真正起步和发展，因此不应急于发展那些易导致危机的市场。可喜的是，国内业界越来越多的同仁和专家认为金融衍生产品在金融危机前几十年都已存在，有些产品如信用违约互换在危机前后确有推波助澜的作用，但是金融衍生产品并不是金融危机的祸根；与国际金融衍生产品市场相比，金融危机前国际市场确实存在投机和炒作的问题，然而在国内很多领域作为基础风险管理工具的金融衍生产品，不是发展得太多太快，而是太少太慢，很多领域中的金融衍生品仍然处于缺位的状态。

近年来国内场内外衍生产品有了持续可观的发展。2010年我国成功推出股指期货，2014年国债期货成功恢复，2015年2月股指期权又成功推出，场内市场金融期货和期权缺位的局面有了明显的改善；场外银行间市场外汇远期交易早在2005年汇改后不久就成功推出，外汇互换、利率互换、远期利率协议、外汇期权等重要的银行间风险管理产品先后推出并达到了不同程度的活跃度。虽然目前除股指期货外其他场内外产品的市场活跃度仍有待提高，但场内外产品的丰富程度已有明显的提高。

笔者在20世纪90年代初期进入纽约金融市场时恰逢国际金融产品创新高峰。在2014年为《奇异期权》做推荐时，回顾自己初入国际市场时的感受，才首次联想到，20世纪80年代后期到90年代中期，国际金融创新高峰时期正好是全球最大经济体美国利率市场化的后期和当时第二大经济体日

本利率市场化结束的时期^①。国际金融产品创新的高峰期与两大经济体利率市场化的进程的关系绝非偶然，因为全球金融市场最大的市场风险是利率风险。利率市场化为金融创新和风险管理提供了巨大的推动力。

党的十八届三中全会决定提出要“鼓励金融创新，丰富金融市场层次和产品”“完善人民币汇率市场化形成机制，加快推进利率市场化……加快实现人民币资本项目可兑换”；2014年12月结束的中央经济工作会议又明确提出要“稳步推进人民币国际化”。利率市场化和汇率市场化是人民币国际化的前提或必要条件，也是国内债券、外汇、股市及相关风险管理市场活跃的前提。随着我国利率市场化的进一步推动和汇率市场化进一步完善，我国债券市场、外汇市场、股票市场及其相关的风险管理或衍生产品市场的丰富程度和活跃度将有显著的提升，金融创新和风险管理的需求将在今后数年步入快速发展的通道。我国对金融创新的技术、经验、管理等多方面的知识的需求也将有显著增长。

作为全球最复杂且技术含量最高的金融产品——金融衍生产品及市场的发展也当如债券、外汇、股票、商品等基础市场一样，有着自身的发展规律和发展路径。20多年来我国学习和借鉴了国外很多领域的发展成果和经验，场内外金融衍生产品市场也不能例外。境外包括金融期货和期权在内的金融衍生产品市场经过了40多年的发展和演变，特别是经过了巴林倒闭、加州奥兰治县、美国长期资本管理公司等重大风险事件后，风险管理的经验逐渐积累，已发展到了相对成熟的阶段。作为全球金融市场技术含量最高的金融衍生产品的设计、定价和风险对冲也有了相对成熟的统计、数学、编程等方面的知识、技能和实践方面的积累。这些将是国内金融产品设计、定价、风险对冲和市场发展不可少的必修课。

保罗·威尔莫特先生集金融顾问、培训师、作家和软件开发者等理论与实践经验于一身，将“火箭物理学家”才能理解的相关数理知识用深入浅出、简洁易懂的方式向读者做了介绍，同时也向读者介绍了理解数量金融必须的金融概念、组合管理和具有代表性的衍生产品。作者也介绍了投资与赌博之间的各种相似和差异。本书的特点可以用理论与实际结合，参数与市场结合，

^① 张光平. 人民币国际化和产品创新 [M]. 5版. 北京: 中国金融出版社, 2014.

产品与对冲结合这三个结合来简单概括。虽然本书简明扼要，但是要读懂仍需具备相当的数学、统计、市场等方面的基础知识，这些知识是推动国内金融创新，特别是国内金融产品设计、定价、风险对冲必需的基础知识。国内几乎所有的金融机构，特别是市场交易部门目前概无例外地在使用境外设计的产品定价、交易平台、风险管理模型等，然而却鲜有能够打开这些产品定价、交易平台和风险管理模型的“黑盒子”，因而只能知其然而不知其所以然，只能在别人多年前设计的“八阵图”内冲杀，不仅难以走出“八阵图”，更不用说要打赢“八阵图”的设计者了。《数量金融》为我们提供了打开这些“黑盒子”的基本知识和基本要素，是国内金融创新和国内金融机构及企业“走出去”在国际市场上直面市场竞争的必读物。

厦门大学金融工程团队在郑振龙教授和陈蓉教授指导下组织了一批博士和学生翻译了保罗·威尔莫特先生的《数量金融》一书，体现了厦大师生对金融工程知识的重视及对专业的认真态度。本书不仅对国内众多大专院校师生学习和研究金融工程、金融衍生产品、金融风险管理有用，而且对广大的金融从业人员开展金融创新、产品设计、风险管控也有必不可少的参考作用。

最后，值得提及的一个重要内容是学习过程中要结合国内市场的实际情况，并借鉴国外的知识和经验。记得十多年前，在国内市场仅有外汇远期结售汇等屈指可数的简单金融衍生产品的时候，国内曾经掀起学习金融工程的热潮，对后来国内金融市场的发展起到了一定的作用。然而十多年来，特别是2005年我国汇改以来，国内很多金融衍生产品从无到有，有些产品如外汇互换、利率互换、股指期货等市场已经有了较好的流动性，然而关于这些市场和产品相关实证研究却少之又少。之前国内少有或没有产品时学习只是学习别人的东西，而现在国内有了自己的产品和市场却少有人研究。由于我国利率、汇率等方面市场化程度有待进一步提高，国内产品定价和市场发展一定有与境外不同之处，这些不同之处我们只有经过实证研究才能发现，进而才能找到进一步完善国内市场的方法。尤其是近年来以人民币跨境贸易、其他经常项目、直接投资等相关结算为主的人民币国家化进程加速，境外人民币中心和业务快速发展，产品创新步伐加快。我们在学习和借鉴别人知识和经验的同时也需要结合国内产品和市场的发展来学习，结合国内利率和汇率市场化程度不断提高的进程来学习，结合人民币国际化的进程来学习，这样才

可以尽快地达到学以致用目的。否则，国内人民币产品创新和人民币国际化相关的问题研究我们都可能落在别人的后面，从而难以有效推动市场的发展和人民币国际化的进程，让国内学者、职业人士和其他国人面临尴尬的境地。

最后，希望我们各界同仁共同学习和借鉴别人的知识与经验，共同研究和探讨国内金融创新与人民币国际化相关问题，共同为我国金融创新和人民币国际化做出应有的贡献。

张光平

上海银监局副局长

2015年3月16日于上海

译者序

金融衍生品市场是现代金融体系的重要组成部分，主要负责风险的重新配置。它并不一定能阻止风险事件（比如经济危机）的发生，却可以让微观主体在风险事件发生时免于遭受损失。在一个完善的金融体系中，微观主体面临的任何风险（比如原材料涨价、产品价格下跌、利率上升、汇率波动、对手违约、气候变化、经济危机等），都可以通过衍生品来对冲。利用衍生品，还可以为各种宏微观问题提供解决方案，为合作双方提供求同存异的合作方案，以最大限度地发挥各个经济主体的比较优势，从而提高资源配置的效率。衍生品市场还是个信息集散地，从衍生品价格和成交量中可以提取出违约概率、相关系数、波动率、偏度、峰度等关于宏微观决策的重要信息。这种信息相对于统计信息而言，具有及时、真实、前瞻的特点，有助于提高决策的及时性、准确性和前瞻性。基于上述考虑，我国近年来也在稳步推进金融衍生品市场的发展，目前已经有股指期货、国债期货、利率互换、外汇期权、股票期权等产品。

要想熟练掌握金融衍生品的定价原理和应用技巧绝非易事。其中用到的数学知识和技巧非常复杂，有些人认为能掌握它们的只能是火箭物理学家之类的怪才，俗称宽客（quant），而相关的知识和技巧被称为金融工程（financial engineering）或数量金融（quantitative finance）。虽然冠名金融工程、数量金融或金融衍生品的书籍数量繁多，近年来仍不断有新作涌现，但大部分作品或者泛泛而谈，或者纠结于复杂的技术细节而让人望而生畏。只有保罗·威尔莫特的《数量金融》风格独特，通俗易懂，广受读者好评，其魅力经久不衰，被认为是该领域的必读书目。

该书受欢迎的一个原因是作者的传奇经历和个人魅力。保罗·威尔莫特是全球宽客领域的重量级人物。他在牛津大学获得了流体力学的博士学位，

进入数量金融领域前曾在多个行业从事过数学建模工作。他在数量金融领域发表了众多有影响力的学术论文，出版了许多重要教材，以其名字命名的杂志和论坛让万千从业人员和学者拥有了接触最新宽客技术和相互交流的平台。他主持的牛津大学“数理金融”项目和“数量金融认证”项目培养了大量的相关人才，是业界公认专业性最高的数量金融和金融工程的培训项目。最令人乐道的是他幽默风趣的讲述技巧和直击要害的洞察力，这些都在本套图书中得到了淋漓尽致的体现。

但本书不得不读或不得不备的最重要的理由还是其内容和风格的不可替代性。本书有三个显著的特点。第一个特点是既易懂又深刻，作者总是能以最简洁直接和清晰易懂的方式直击问题的本质，让读者不必具备火箭物理学家的头脑就可以明白复杂问题的来龙去脉。作为金融工程领域的专业学者和教育工作者，我们在翻译时深刻感受到，只有对金融与数学融汇贯通并对如何与读者沟通下了极大的工夫才能做到这一点。第二个特点是涵盖面广，本书涵盖了金融工程与数量金融领域可能涉及的大多数问题，并结合大量实际市场中的产品进行分析。既介绍了许多在学术界也尚在探索的高级模型，又囊括了许多在实际应用当中容易忽略却很重要的处理细节，是一套很好的案头备查书籍。第三个特点是实践性强，作者坚持以实际应用为导向的方式写作，试图引导读者自行思考解决问题的方法，并鼓励读者根据实际中遇到的问题灵活运用相关原理和知识，真正做到授人以渔。

由于所涉甚广，本书共分为3卷：第1卷介绍了金融衍生品定价的一些基本原理和需要用到的最简单的数学知识，第2卷介绍了大量不同类型的金融衍生产品和定价中可能遇到的特殊问题，第3卷介绍了许多更复杂的高级模型和实际定价的数值方法和程序。

本套书的主要读者对象为金融工程、数理金融、衍生品、宽客等领域的理论研究者和实务工作者。中国的衍生品市场蓄势待发，新的金融时代正在走近。如果你想在金融工程领域立足，理解相关领域的各类问题，并在未来的日子里有一个备查的重要资料来源，我们强烈建议你阅读并收藏这套书籍。

正如你们所见，本书是个大部头。我们的翻译团队来自厦门大学金融工程团队，第1卷的译者为郑振龙教授、陈蓉教授、史若燃博士、姚育婷、郭媛媛、郭博洋、唐易青和陈惠民，第2卷的译者为郑振龙教授、陈蓉教授、

陈焕华博士、李骅、洪集民、季锋、于爱颖、陈金钊和秦明，第3卷的译者包括郑振龙教授、陈蓉教授、刘杨树博士、邱紫华、郑国忠、王宜峰、江政雲、王忱、林晓鹏、姚莲莲、吴玮煌、王宏和贺晨。每册书先由金融工程硕士生、博士生初译，再由每册图书的第3名译者初校并修改，最后由两位教授（以郑振龙教授为主）逐字检查校对修改，共历时9个月。感谢每一个参与者的付出与努力，感谢机械工业出版社编辑的辛勤工作。

在翻译过程中，我们已经尽了最大努力，力求把原文忠实、清晰、简洁、达意地译成中文。由于本书难度较大，专业性较强，若有不当之处敬请读者见谅，欢迎沟通。

译者

2014年12月1日

第 2 版前言

这个版本相对于第 1 版来说有了相当大的升级和拓展。一如既往，书中内容以反映我本人的兴趣与见解为主。在两个版本之间的这段日子里，金融市场的规模越来越大，建模者可以运用的工具包越来越多，而我的腰围也变得越来越粗。从个人角度来说，我已经在实际操作领域投入了与在独立研究领域一样长的时间。那么很自然地，我将会在这个版本中引入许多新的材料，这些材料一方面能体现我作为科学家对模型精确性的要求，另一方面也能体现我作为实际操作者对模型高速、稳健且简明易懂的需要。正如我之前所说的，本书具有强烈的个人色彩。由于数量金融领域的主题一贯以来都是飞速变化的，我建议读者在本书学习过程中补充阅读我推荐的各种拓展阅读。

我想再次感谢在第 1 版序中致谢的人：Arefin Huq、Asli Oztukel、Bafkam Bim、Buddy Holly、Chris McCoy、Colin Atkinson、Daniel Bruno、Dave Thomson、David Bakstein、David Epstein、David Herring、David Wilson、Edna Hepburn-Ruston、Einar Holstad、Eli Lilly、Elisabeth Keck、Elsa Cortina、Eric Cartman、Fouad Khennach、Glen Matlock、Henrik Rassmussen、Hyungsok Ahn、Ingrid Blauer、Jean Laidlaw、Jeff Dewynne、John Lydon、John Ockendon、Karen Mason、Keesup Choe、Malcolm McLaren、Mauricio Bouabci、Patricia Sadro、Paul Cook、Peter Jackel、Philip Hua、Philipp Schönbucher、Phoebus Theologites、Quentin Crisp、Rich Haber、Richard Arkell、Richard Sherry、Sam Ehrlichman、Sandra Maler、Sara Statman、Simon Gould、Simon Ritchie、Stephen Jefferies、Steve Jones、Truman Capote、Varqa Khadem 和 Veronika Guggenbichler。

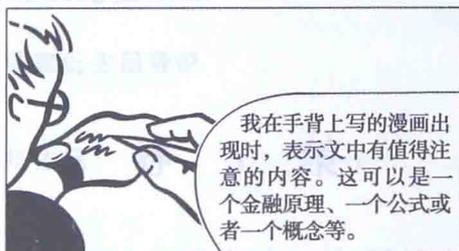
同时，我也想感谢以下人员。首先是我在各个项目中的合伙人：7 City 项目的 Paul 和 Jonathan Shaw，感谢他们无与伦比的奉献和他们对新项目的构想；Riaz Ahmad 和 Seb Lleo 对数量金融证书项目的帮助十分成功，分担了

我许多的任务。然后是与杂志相关的各位，尤其是 Aaron Brown、Alan Lewis、Bill Ziembra、Caitlin Cornish、Dan Tudball、Ed Lound、Ed Thorp、Elie Ayache、Espen Gaarder Haug、Graham Russel、Henriette Prast、Jenny McCall、Kent Osband、Liam Larkin、Mike Staunton、Paula Soutinho 和 Rudi Bogni。我感到十分幸运且感激 John Wiley&Sons 出版公司，他们对被认为十分古怪的计划也给予了支持；感谢 Ron Henley，他真是每个宽客做梦都想得到的对冲基金合伙人。“It’s just a jump to the left. And then a step to the right”。[⊖]还要感谢 Fulcrum 的 John Morris，带给我一段有趣的时光；也感谢纳西姆·塔勒布，我们之间有过一些有趣的谈话。

感谢 John、Grace、Sel 和 Stephen，他们不厌其烦地向我灌输着他们的价值观念，始终给予我有力的帮助。感谢 Oscar 和 Zachary，让我在一系列不幸的事件中能时刻保持理智。

最后，作为她的头号粉丝，我要感谢我的头号粉丝——Andrea Estrella!

⊖ 该句来自 1973 年脍炙人口的摇滚歌曲 *The Time Warp* 的歌词，此歌之后改编成电影《洛基恐怖秀》（*The Rocky Horror Picture Show*）与同名舞台剧。这个系列已经形成特有的以怪诞变性装扮和万圣节狂欢为主题的狂欢文化。此处应是作者向 Ron Henley 致谢并回味两人共同度过的欢乐时光。——译者注



全书简明目录

第 1 卷

第一部分 数理与金融基础、衍生品基本理论、风险与收益

第 1 章 产品和市场

第 2 章 衍生品

第 3 章 资产的随机行为

第 4 章 基本的随机微积分

第 5 章 布莱克 - 斯科尔斯模型

第 6 章 偏微分方程

第 7 章 布莱克 - 斯科尔斯期权定价公式和“希腊字母”

第 8 章 布莱克 - 斯科尔斯世界的简单拓展

第 9 章 提前执行与美式期权

第 10 章 概率密度函数和首次退出时间

第 11 章 多资产期权

第 12 章 如何进行 Delta 对冲

第 13 章 固定收益证券和分析：收益率、久期和凸性

第 14 章 互换

第 15 章 二叉树模型

第 16 章 正态近似的准确性

第 17 章 从黑杰克和赌博学到的投资经验

第 18 章 投资组合管理

第 19 章 在险值

第 20 章 预测市场

第 21 章 一个交易游戏

第 2 卷

第二部分 奇异合约及路径依赖

- 第 22 章 奇异及路径依赖衍生品导论
- 第 23 章 障碍期权
- 第 24 章 强路径依赖衍生品
- 第 25 章 亚式期权
- 第 26 章 回溯期权
- 第 27 章 衍生品和随机控制
- 第 28 章 各种各样的奇异衍生品
- 第 29 章 股权和外汇类产品的说明书

第三部分 固定收益的建模和衍生品

- 第 30 章 单因子利率建模
- 第 31 章 收益率曲线拟合
- 第 32 章 利率衍生品
- 第 33 章 可转债
- 第 34 章 按揭支持证券
- 第 35 章 多因子利率建模
- 第 36 章 瞬时利率的实证表现
- 第 37 章 HJM 和 BGM 模型
- 第 38 章 固定收益产品说明书

第四部分 信用风险

- 第 39 章 公司价值和违约风险
- 第 40 章 信用风险简介
- 第 41 章 信用衍生品
- 第 42 章 RiskMetrics 和 CreditMetrics
- 第 43 章 CrashMetrics
- 第 44 章 衍生品灾难案例

第 3 卷

第五部分 进阶主题

- 第 45 章 金融建模
- 第 46 章 布莱克 - 斯科尔斯模型的缺陷
- 第 47 章 离散对冲
- 第 48 章 交易成本
- 第 49 章 波动率模型概述
- 第 50 章 确定性波动率曲面
- 第 51 章 随机波动率
- 第 52 章 不确定参数
- 第 53 章 波动率经验分析
- 第 54 章 随机波动率和均值 - 方差分析
- 第 55 章 波动率的渐近分析
- 第 56 章 波动率案例学习: 棘轮期权
- 第 57 章 跳跃扩散
- 第 58 章 崩盘模型
- 第 59 章 用期权进行投机
- 第 60 章 静态对冲
- 第 61 章 流动性不足市场中对冲的反馈效应
- 第 62 章 效用理论
- 第 63 章 美式期权及相关问题的拓展讨论
- 第 64 章 红利建模高级方法
- 第 65 章 收益的序列自相关
- 第 66 章 连续时间资产配置
- 第 67 章 崩盘风险下的资产配置
- 第 68 章 无概率利率建模
- 第 69 章 衍生品定价与最优对冲: 无概率模型 (续)

第 70 章 无概率利率模型拓展

第 71 章 通货膨胀建模

第 72 章 能源衍生品

第 73 章 实物期权

第 74 章 寿险保单结算与保单贴现

第 75 章 发放奖金的时间

第六部分 数值方法与程序

第 76 章 数值方法概述

第 77 章 单因子模型的有限差分法

第 78 章 单因子模型的有限差分法进阶

第 79 章 两因子模型的有限差分法

第 80 章 蒙特卡罗模拟

第 81 章 数值积分

第 82 章 有限差分程序

第 83 章 蒙特卡罗程序

附录 A 你所需要的所有数学知识（一份执行摘要）

附录 B Visual Basic 计算机代码

目 录

推荐序一/李 强	
推荐序二/张光平	
译者序	
第 2 版前言	
全书简明目录	
第二部分 奇异合约及路径依赖	
第 22 章 奇异及路径依赖衍生品导论	2
22.1 引言	2
22.2 期权分类	3
22.3 时变性	4
22.4 现金流	4
22.5 路径依赖性	6
22.6 维度	7
22.7 期权的阶数	8
22.8 嵌入式抉择	9
22.9 分类表	10
22.10 奇异期权举例	11
22.11 数学/编程结论小结	17
22.12 总结	17
第 23 章 障碍期权	18
23.1 引言	18
23.2 障碍期权的不同种类	19
23.3 定价方法	20
23.4 在偏微分方程框架下为障碍期权定价	21
23.5 障碍式期权的其他特征	28
23.6 首次离开时间	32
23.7 市场实务：使用何种波动率	33
23.8 障碍期权的对冲	36
23.9 跳空成本	37
23.10 总结	38
附录 23A 更多的公式	40
第 24 章 强路径依赖衍生品	45
24.1 引言	45
24.2 用积分形式表示的路径依赖量	46
24.3 连续抽样：定价方程	47
24.4 用更新规则重新表示路径依赖量	48
24.5 离散抽样：定价方程	50
24.6 更高维数	52
24.7 期望定价法	53
24.8 提前执行	53
24.9 总结	54
第 25 章 亚式期权	55
25.1 引言	55
25.2 回报类型	56

25.3	平均值的类型	57	28.2	远期开始期权	86
25.4	求解方法	58	28.3	呐喊期权	88
25.5	扩展布莱克 - 斯科尔斯方程	59	28.4	有封顶的回溯和亚式期权	89
25.6	提前执行	63	28.5	混合路径依赖量: 回溯亚式 期权等	90
25.7	更高维度的亚式期权	63	28.6	波动率期权	92
25.8	相似性降维	63	28.7	相关性互换	95
25.9	闭式解和近似解	66	28.8	阶梯期权	97
25.10	期限结构效应	66	28.9	巴黎期权	97
25.11	一些公式	67	28.10	更多奇异产品	100
25.12	总结	68	28.11	总结	101
第 26 章	回溯期权	70	第 29 章	股权和外汇类产品的说明书	102
26.1	引言	70	29.1	引言	102
26.2	回报的类型	70	29.2	或有费用看跌期权	102
26.3	连续测量的最大值	71	29.3	篮子期权	104
26.4	离散情形下的最大值	73	29.4	敲出期权	107
26.5	相似性降维	73	29.5	范围中期债券	112
26.6	一些公式	74	29.6	回溯期权	115
26.7	总结	76	29.7	棘轮期权	118
第 27 章	衍生品和随机控制	78	29.8	通行证期权	120
27.1	引言	78	29.9	将奇异期权分解为普通 期权	121
27.2	完美交易员期权和认证期权	78	第三部分	固定收益的建模和 衍生品	
27.3	限制交易次数	81	第 30 章	单因子利率建模	125
27.4	限制交易的时间间隔	82	30.1	引言	125
27.5	非最优交易及其对期权 卖方的好处	84	30.2	随机利率	126
27.6	总结	84			
第 28 章	各种各样的奇异衍生品	86			
28.1	引言	86			

30.3	一般模型的债券定价方程	127	32.7	利差期权	158
30.4	什么是市场风险价格	129	32.8	指数摊销利率互换	158
30.5	解释市场风险价格和风险 中性	129	32.9	内嵌可决策条款的合约	161
30.6	易于处理的模型与债券定价 方程的解	130	32.10	利率不是瞬时利率的情况	162
30.7	常参数情形下的解	132	32.11	一些例子	163
30.8	人名模型	134	32.12	更多利率衍生品	165
30.9	随机利率下股票和外汇远期 以及期货	137	32.13	总结	166
30.10	总结	140	第33章 可转债		168
第31章 收益率曲线拟合		141	33.1	引言	168
31.1	引言	141	33.2	可转债基础	168
31.2	Ho & Lee 模型	142	33.3	市场实践	171
31.3	扩展的 Vasicek 模型—— Hull & White	143	33.4	将可转债视为期权	173
31.4	收益率曲线拟合：支持与 反对	144	33.5	利率已知时可转债的定价	174
31.5	其他模型	147	33.6	双因子建模：随机利率下的 可转债	177
31.6	总结	147	33.7	一个特殊的模型	180
第32章 利率衍生品		149	33.8	可转债的路径依赖	180
32.1	引言	149	33.9	稀释	181
32.2	可赎回债券	150	33.10	信用风险问题	182
32.3	债券期权	150	33.11	总结	182
32.4	利率顶和利率底	153	第34章 按揭支持证券		184
32.5	范围中期债券	156	34.1	引言	184
32.6	互换期权、利率顶期权和 利率底期权	156	34.2	个人按揭贷款	184
			34.3	按揭支持证券	186
			34.4	对提前偿还的建模	187
			34.5	MBS 定价	190
			34.6	总结	192

第 35 章 多因子利率建模	193	37.2 远期利率方程	220
35.1 引言	193	37.3 瞬时利率过程	220
35.2 两因子模型的理论框架	194	37.4 市场风险价格	222
35.3 常用模型	197	37.5 真实世界和风险中性世界	222
35.4 市场风险价格作为随机因子	199	37.6 衍生品定价	223
35.5 无随机性下的相平面	200	37.7 模拟	223
35.6 收益率曲线互换	202	37.8 树方法	224
35.7 一般多因子理论	203	37.9 Musiela 参数化	225
35.8 总结	205	37.10 多因子 HJM 模型	225
第 36 章 瞬时利率的实证表现	206	37.11 Excel 实现	225
36.1 引言	206	37.12 一个简单的单因子示例： Ho & Lee 模型	226
36.2 常见的单因子瞬时利率模型	207	37.13 主成分分析	227
36.3 隐含建模法：单因子	208	37.14 股票期权等产品的定价	230
36.4 波动率结构	209	37.15 非无穷小瞬时利率	230
36.5 漂移率结构	210	37.16 Brace、Gatarek 和 Musiela 模型	231
36.6 收益率曲线的斜率和市场 风险价格	211	37.17 模拟	234
36.7 收益率曲线斜率告诉我们 什么	213	37.18 为现金流贴现	234
36.8 远期利率曲线的“平均” 性质	214	37.19 总结	235
36.9 隐含建模法：两因子	216	第 38 章 固定收益产品说明书	236
36.10 总结	217	38.1 引言	236
第 37 章 HJM 和 BGM 模型	219	38.2 可选区间中期债券	236
37.1 引言	219	38.3 指数摊销利率互换	240
		第四部分 信用风险	
		第 39 章 公司价值和违约风险	246
		39.1 引言	246

39.2	默顿模型：将股权看作公司 资产的期权	247	41.2	什么是信用衍生品	279
39.3	使用可测的参数和变量建模	249	41.3	常见的信用衍生品	281
39.4	计算公司价值	252	41.4	由违约触发的衍生品	283
39.5	总结	253	41.5	收益率价差的衍生品	287
第40章	信用风险简介	254	41.6	基于信用评级变化的回报	288
40.1	引言	254	41.7	利用违约互换进行可转债 套利	289
40.2	风险债券	255	41.8	条款说明书	290
40.3	对违约风险进行建模	255	41.9	信用衍生品定价	293
40.4	泊松过程和瞬时违约风险	256	41.10	交换期权	294
40.5	时变强度和违约的期限 结构	260	41.11	违约只发生在需要支付的 时点	296
40.6	随机违约风险	261	41.12	基于评级改变的回报	297
40.7	正的回收率	262	41.13	多因子衍生品	298
40.8	特例和收益率曲线拟合	263	41.14	连接函数：为多标的信用 衍生产品定价	299
40.9	案例分析：阿根廷平价 债券	263	41.15	抵押债务凭证	301
40.10	对冲违约风险	266	41.16	总结	304
40.11	市场价格中包含信息 了吗	267	第42章	RiskMetrics 和 CreditMetrics	306
40.12	信用评级	267	42.1	引言	306
40.13	一个信用等级改变模型	269	42.2	RiskMetrics 数据集	307
40.14	定价方程	272	42.3	RiskMetrics 的参数计算 方法	307
40.15	可转债的违约风险	273	42.4	CreditMetrics 数据集	310
40.16	为流动性风险建模	275	42.5	CreditMetrics 方法	311
40.17	总结	277	42.6	风险债券组合	312
第41章	信用衍生品	278	42.7	CreditMetrics 模型的输出	313
41.1	引言	278	42.8	总结	313

第 43 章	CrashMetrics	314	43.12	对手方风险	331
			43.13	CrashMetrics 的简单拓展	331
43.1	引言	314	43.14	CrashMetrics 指数	332
43.2	为何银行会破产	315	43.15	总结	332
43.3	市场崩盘	315	第 44 章	衍生品灾难案例	333
43.4	CrashMetrics 介绍	316	44.1	引言	333
43.5	个股的 CrashMetrics 方法	316	44.2	奥兰治县	333
43.6	组合最优化和白金对冲	318	44.3	宝洁公司	335
43.7	多资产/单指数模型	320	44.4	德国金属公司	338
43.8	多资产模型的组合最优化和 白金对冲	326	44.5	吉布森贺卡公司	339
43.9	多指数模型	327	44.6	巴林银行	342
43.10	纳入时间价值	328	44.7	长期资本管理公司	343
43.11	追加保证金和保证金对冲	328	44.8	总结	347

第二部分

奇异合约及路径依赖

第 22 章 奇异及路径依赖衍生品导论

第 23 章 障碍期权

第 24 章 强路径依赖衍生品

第 25 章 亚式期权

第 26 章 回溯期权

第 27 章 衍生品和随机控制

第 28 章 各种各样的奇异衍生品

第 29 章 股权和外汇类产品的说明书



第 22 章

奇异及路径依赖衍生品导论

本章内容

- 怎样根据重要的特征对期权进行分类
- 怎样分析衍生品，以易于比较和区分不同的合约
- 多种基础奇异期权的名称及合约细节

22.1 引言

迄今为止，我们见到的只是最基础和最重要的期权合约，但是对于一些更有趣的衍生产品才具有的特征，还没有进行直接的描述。在本章中，我将为后续章节中讨论复杂产品做铺垫。

基于以下一些原因，奇异期权更令人关注。与香草期权相比，它们更难以定价，有时非常依赖模型。其合约中的内含风险通常更加难以捉摸，会导致意料之外的损失。因此小心地对冲十分重要，无论采用 Delta 对冲还是某种最小化现金流的静态对冲。事实上，在实际应用中，如何对冲是唯一真正重要的问题。对于奇异期权的价格，交易员还可以根据经验，或者通过观察市场上类似工具的价格，来进行合理的估计。但对于合约中的风险以及如何对冲掉这些风险，他或许

就不能做出那么有把握的判断了。

想要对所有的期权进行分类是一项不可能完成的工作。我们最多只能对衍生品中最常见的某些特征进行粗略的描述。在本章中，我列出了部分上述特征并给出了一些奇异期权作为示例。在后续几章中，我将深入介绍这些期权及其定价、对冲的细节。本章将要描述的特征有：时变性、现金流、强与弱路径依赖、维度、期权的“阶数”，以及有嵌入式抉择的期权。

目前，我们将继续采用布莱克 - 斯科尔斯理论框架，并展示如何在该框架下对奇异衍生品进行定价与对冲。在后续章节中，我们将放松该框架的假设。

有一种方法是我绝对不会使用的，那就是将奇异期权分解为香草期权组合。如果这种分解能精确完成，那么这份合约根本就不是奇异期权（提问：什么时候你可以将奇异期权分解为一个香草期权的组合？回答：当它并不是奇异期权的时候）。使用该方法，你或许可以找到一个近似价格和某种静态套保方法，但最终你可能还是不得不面对现实，对合约中的奇异特征进行全面准确的数学分析。

22.2 期权分类

我发现用六个准则或特征将奇异期权进行分类，会对定价和对冲产生难以置信的帮助。我觉得再怎么强调这种分类的有用性也不为过。这六个特征在本质上是数学性的，和期权的名称或标的资产类型没有一点关系。作为数学性特征，它们将快速地向你传递下述信息。

- 最好采用哪种定价方法？
- 是否可以使用以前的代码？
- 要花多久才能编好代码？
- 代码最终需要运行多久？

这 6 个特征是：

- (1) 时变性；
- (2) 现金流；
- (3) 路径依赖性；
- (4) 维度；
- (5) 阶数；

(6) 嵌入式抉择。

其中的一些特征类别还可以进一步分解，如图 22-1 所示。现在，让我们按照重要性由低到高逐个浏览一下这些特征。

22.3 时变性

我们已经见过了参数的时变性，并且展示了当利率、股利、波动率（以已知且确定的方式）时变时如何应用布莱克 - 斯科尔斯公式。这些是属于模型的特征，但在这里提到时变性，我们更关注的是期权合约中规定的时变性。比如某些合约仅允许在确定的时点或确定的时段提前行权。这种间歇性的提前行权是百慕大期权（Bermudan options）的一个特征。这样的合约被称作非时齐的。

时变性不是一个根本性的改动，因此我们将其放在了特征列表中的第一个。也许它具有重要性的唯一原因是要求我们在使用任何数值方法时要稍微注意一点。通过数值方法求解期权价格时，不可避免地要进行时间上的离散化。如果合约具有时变性特征，我们要在离散化过程中相应地设定一些限制。

- 如果期权合约中具有时变性，那我们使用数值方法离散化时必须合理规划，使得离散化的结果与合约中规定的某些事情发生的时点或时段相一致。
- 这意味着我们的代码不得不跟踪某些特定的时间、日期等，这并不难，只是有点烦。

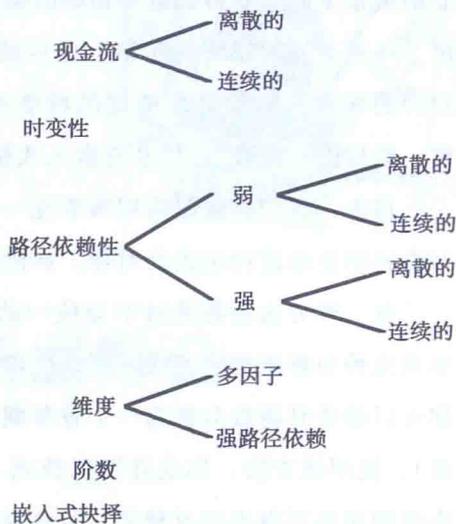


图 22-1 期权分类图

22.4 现金流

想象一份合约会在 t_0 时刻付给持有者金额 q ，这样的合约的标的可能是某只债券，而支付是债券的一次息票。如果我们用 $V(t)$ 表示合约价值（忽略对任何

标的资产的任何依赖性), 用 t_0^- 和 t_0^+ 表示现金流发生时刻的前一瞬间与后一瞬间, 基于简单的套利考虑可得出

$$V(t_0^-) = V(t_0^+) + q$$

这是一个跳跃条件 (jump condition)。合约的价值下跳了现金流的数额。如果合约价值不满足上述条件, 将产生套利的机会。图 22-2 描绘了跨过支付日时合约价值的变化。



如果合约价值是随标的的价格变化而变化的, 则可将其表示为 $V(S, t)$, 此时我们可以考虑基于资产价格水平 S 的现金流, 也就是说可以将现金流表示为 $q(S)$ 。更进一步, 如果我们将具有同一标的的所有期权合并为一个大的投资组合, 当跨越每个期权的行权日时, 整个组合的价值将出现等同于该期权回报的下跳。

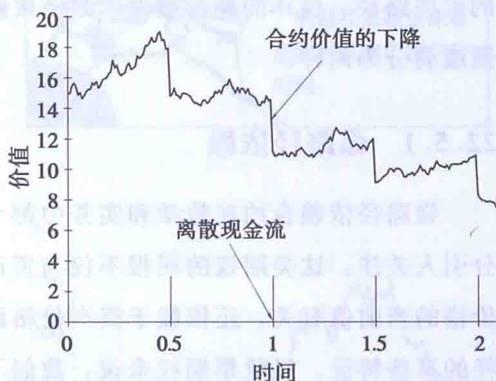


图 22-2 离散现金流及其对合约价值的影响

在这里有一个技术性要求, 现金流必须是时间和标的资产的确定性函数, 比如标的资产价格为 S 时合约持有者可以收到 S^2 的支付。但如果现金流取决于掷硬币的过程, 比如正面将获得 1 美元, 否则没有支付, 那么上述讨论将不再有效。由于现金流是不确定的, 跳跃条件将不一定适用。

如果现金流不是确定性的, 建模就没有那么简单了。此时不能再列出无套利条件, 且定价结果很容易受到个人风险偏好的影响。但是我们仍然可以写出某种跳跃条件, 例如可以假定合约价值的变动是现金流的期望值

$$V(t_0^-) = V(t_0^+) + E[q]$$

上述跳跃条件要求不确定性现金流没有风险补偿。

以上是离散现金流 (discrete cashflow) 的情况, 在期权合约中也可以见到连续现金流 (continuous cashflows)。例如, 期权的合约条款里面可能规定“当股价低于 80 美元时, 合约持有者每天收到 1 美元”。这实际上就是一种连续现金流。当现金流是连续支付的时候就没有什么跳跃条件了, 我们将修改基础布莱克 - 斯

科尔斯方程，加入一个红利率项。稍后我们会看到实例。

- 当合约具有离散支付的现金流时，你应预期必须应用跳跃条件。这也意味着这份合约具有时变性，详见上文。
- 连续支付的现金流意味着将对原方程做出一个相当简单的修改。

22.5 路径依赖性

许多期权的回报并不仅仅依赖于行权日的标的资产价格，也依赖于标的资产的价格路径。这样的期权被称作**路径依赖性**（path dependent）。路径依赖性可按强或弱分为两种。

22.5.1 强路径依赖

强路径依赖合约在数学和实务中都十分引人关注。这类期权的回报不仅与资产价格的当前值有关，还依赖于资产价格路径的某些特征。以股票期权来说，我们不能将期权价值表示为 $V(S, t)$ ，合约价值函数还得增加至少一个自变量。下面的例子给出了最好的说明。



亚式期权的回报取决于自开始至到期日间标的资产的平均价格。除了资产价格的当前值以外，我们还得跟踪关于价格路径的更多信息。在这里我们所需的额外信息包含在“变动的平均价”中，这指的是标的资产自开始至当前时点的平均价格。除此之外我们不需要其他信息。这个变动的平均价将作为一个新的自变量，期权价值将成为它与常用自变量、标的资产价格、时间三者的函数，偏微分方程中也将出现期权价值对变动平均数的偏导数。

现实中存在很多类似的合约，后文中我将说明如何将它们纳入同一个一般框架当中。

强路径依赖有两种形式，**离散抽样**（discretely sampled）与**连续抽样**（continuously sampled），取决于我们采用的是标的资产价格的离散子集还是连续分布。

- 强路径依赖意味着我们不得不在更高维度上作业。一个结果就是我们的代码可能需要运行更久。

22.5.2 弱路径依赖

弱路径依赖性质合约的一个简单例子是障碍期权 (barrier)。在到期日前的某个时刻，一旦标的资产价格的规定值被触及，障碍（敲入或敲出）期权将被触发。比如，只要标的资产价格保持低于 150 的状态，合约在到期日将有普通看涨期权的回报。然而在到期日前资产价格一旦达到 150，期权就将失效，也就是说期权被“敲出”了。



这份合约显然是路径依赖的，因为考虑如图 22-3 所示的两条路径，尽管在到期日那天标的资产的价格相同，但由于在其中一条路径下并未触及障碍，到期时合约持有者可以获得回报，在另一条路径下则没有回报。

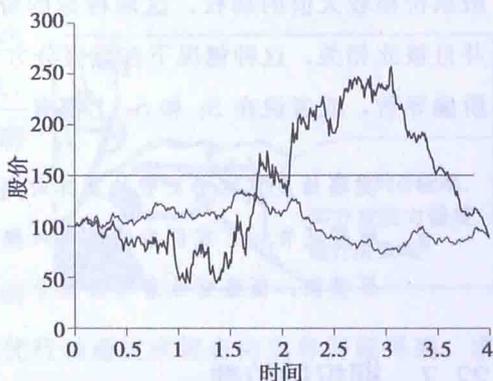


图 22-3 两条路径的到期股价相等，但障碍期权回报完全不同

在第 23 章中我们将看到该期权仅仅是弱路径依赖的，但仍然可以通过求解仅含有标的资产价格与时间两个变量的偏微分方程来定价。这就是强和弱路径依赖在数学上的差别：弱路径依赖合约不需要引入新的变量来解决路径依赖性。与强路径依赖一样，我们也可以采用离散与连续两种抽样形式。

- 弱路径依赖意味着不需要在更高维度上作业，因此代码运行相当快。

22.6 维度

所谓维度，是指相互独立的变量个



数。香草期权含有两个自变量—— S 和 t ，因此它是二维的。弱路径依赖合约同它们的非路径依赖近亲有同样维度，例如，障碍看涨期权与普通看涨期权一样，都是二维的。对它们来说，在资产价格上的维度与在时间上的维度在重要性上有本质差异，这一点在第 6 章的扩散方程中已经讨论过了。这是因为在布莱克 - 斯科尔斯偏微分方程中，对资产价格还有一个二阶偏导数，而对时间只有一阶偏导数。

有两种不同类型的三维度问题。第一种是强路径依赖合约造成的新维度，我们将在后续章节中见到实例。一般来说，新的自变量是对期权依赖的某个路径依赖特征的度量，比如说至今为止标的资产的平均价格。在这种情况下，我们在定价时只需要用到期权价值对新变量的一阶偏导数，因此这个新变量更像是另一个类似时间维度的变量。

第二种是第二个随机源造成的新维度，比如双标的资产，考虑一种基于两只股票价格较大值的期权。这两种标的资产价格均具有随机性，有各自的波动率，并且彼此相关。这种情况下在偏微分方程中将出现期权价值对每种标的资产的二阶偏导数，或者说在 S_1 和 S_2 上都有一个扩散项。

- 更高维度意味着更长的计算时间。
- 维度还告诉了我们应使用哪种数值方法。高维意味着我们可能会使用蒙特卡罗模拟，低维意味着有限差分。

22.7 期权的阶数

下一个分类是期权的阶数。阶数在用来给期权分类的同时，也引入了基本的建模问题。

基础的香草期权是一阶的，它们的回报仅依赖于标的资产，后者是我们建模的直接对象。如果路径依赖期权的回报仅

依赖于其标的价格的路径，它依然是一阶的。“高阶”是指期权的回报与价值随另一个期权价值变化而变化。最明显的二阶期权例子是复合期权，比如允许持有者以约定价格购买看跌期权的看涨期权。复合期权在某时刻 T_1 到期，给复合期权带来不确定性的标的期权在更晚的 T_2 时刻到期。从技术角度上看这样的期权是



弱路径依赖的。我们将看到该期权的理论定价是简单直接的。

从实务角度看，复合期权引起了一些重要的建模问题：它的回报依赖于标的期权的市场价格而非理论价格。如果你持有一份复合期权并想行权，那你就得接手标的期权。即使标的期权价值低于你认为其该有的价格（因为你的模型这样显示），你也无能为力。高阶期权的价值对基础定价模型非常敏感，应该谨慎处理。在本书的其他部分，将看到不仅要标的资产进行建模，也要对市场行为（不管是不是“正确”的行为）进行建模的问题。

- 当一份期权是二阶或更高阶的，首先应求解其中的一阶期权。就像我们要做一个多层蛋糕，必须从较低层做起，在其基础上建造高层。
- 这意味着为期权定价时，要求解多个计算问题。

22.8 嵌入式抉择

我们在美式期权中已经遇到过提前执行问题。提前执行也是合约的常见特征。比如在第 33 章中，可转债的转换与美式期权的提前执行在数学上是一致的。提前执行的关键是该权利的持有人理论上应该采取最优的行动，例如必须决定何时执行或



转换。在已建立的偏微分方程框架中，最优行动通过求解自由边界问题得到，求解自由边界问题时需对期权价值做出限制，而且还要满足平滑性条件。平滑性条件是指期权价值对标的资产的偏导数是连续的，正是这个条件确保了执行或转换的策略是最优的，或者说执行或转换最大化了期权价值。很有可能提前行权区不止一个。[⊖]

如果持有美式期权你将面临是否以及何时行权的决策。美式期权是包含可决策特性的合约中最普通的，其他合约需要做出更微妙更有趣的决策。在此我只提及一个实例，后续还有更多。

⊖ 美式期权以及那些通俗地讲具有提前执行特征的合约，其几乎未被提及的一个方面是它们是路径依赖的。在到期时，期权拥有者是否仍旧持有该期权取决于他是否已经行权，因此也取决于标的资产价格的路径。美式期权待求解的偏微分方程同相似的欧式合约相比并没有更多的自变量，从这个意义上说，美式期权的路径依赖性弱的。

将在第 28 章深入讨论的认证期权，是一项基于交易账户的期权。在买卖一些资产后，如果在期权到期日交易账户是盈利的，那么可以保留盈利；而一旦出现损失，将一笔勾销。在这里需要做出的决策是何时买入、卖出或持有资产，以及买入、卖出或持有的资产数量。

当合约中含有嵌入式抉择时，你需要一个算法来判断持有人会如何做出决策。这个算法相当于假设合约持有人的行为目标是使期权价值对进行 Delta 对冲的期权卖方来说尽可能高。该算法实际上是在搜索持有人所有可能的抉择策略中使期权价值最大的那一个。尽管听起来很难，但实际上正确完成非常简单，尤其在使用有限差分方法的时候。寻找最大化价值策略的理由是空方无法承担期权售价的任何降低，否则他将面临“决策风险”暴露。

类似地，当期权的空方或含权债的发行人作为决策方时，定价应基于寻找最小化合约价值的策略。

- 嵌入式抉择意味着我们最好通过有限差分方法定价。
- 代码中的一行将用来寻找最优价格，因此要留心 \geq 或 \leq 符号，不要弄反了。

22.9 分类表

注意留心如下所示的具体合约的分类表。



分 类	期权名称
时变性	细节是否时变 例如，离散抽样
现金流	期权有效期内现金 是否换手？
决策	持有人与/或空方 是否必须做出决策？
路径依赖性	弱或强？
维度	2, 3, 4, ……？
阶数	1阶, 2阶, ……？

范围中期票据分类表

22.10 奇异期权举例

这里仅列示一些基本的例子，好让你有个初步的印象。在第二部分的剩余内容中，我们将看到更多更复杂的合约。

22.10.1 复合期权与可选期权

简单地说，复合期权 (compound options) 与可选期权 (chooser options) 就是期权的期权。复合期权给予持有人买入 (看涨复合期权) 或卖出 (看跌复合期权) 另一个期权的权利。例如，想象我们持有一份看跌期权的看涨期权，这给予我们在规定的日期以规定的金额买入一份看跌期权权利。如果交割了复合期权，那么将持有一份看跌期权，即得到卖出标的资产的权利。由于复合期权给予了我们基于另一份衍生品的权利，因此它是二阶期权。尽管布莱克-斯科尔斯模型在理论上可以解决二阶合约，但在实务中这个模型不一定总能令人满意。这是因为当执行合约时将以市场价格得到期权，而不是理论价格。

在布莱克-斯科尔斯框架中，复合期权定价过程如下，共分为两步：首先对标的期权定价，然后对复合期权定价。假设标的期权在时刻 T 有回报 $F(S)$ ，复合期权可以在较早的时刻 T_{Co} 执行，得到回报 $G(V(S, T_{Co}))$ ，其中 $V(S, t)$ 表示标的期权的价值。第一步要对标的期权定价以得到 $V(S, t)$ ，它满足

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \text{ 且 } V(S, T) = F(S)$$

求解上述偏微分方程可得 $V(S, T_{Co})$ ，这是标的期权在时刻 T_{Co} 的 (理论) 价值，就是可以交割复合期权的那个时刻。现在进入第二步，为复合期权定价。其价值以 $C_o(S, t)$ 表示，满足

$$\frac{\partial C_o}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C_o}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C_o}{\partial S} - rC_o = 0, \text{ 且 } C_o(S, T_{Co}) = G(V(S, T_{Co}))$$

举个例子，如果我们有一份看涨期权的看涨期权，标的期权执行价为 E ，复合期权执行价为 E_{Co} ，我们有

$$F(S) = \max(S - E, 0) \text{ 和 } G(V) = \max(V - E_{Co}, 0)$$

图 22-4 给出了在香草看涨期权的看跌期权到期时标的期权的价值。这显然是在标的期权到期之前。该图中另一条线是该复合期权的回报。该回报是复合期权的布莱克-斯科尔斯偏微分方程的终值条件。

当波动率为常数时，在布莱克-斯科尔斯框架下可以找到基础复合期权的解析解，这些解析解中含有二元正态变量的累积分布函数。然而由于复合期权的二阶本质，它们对资产价格随机过程的精确性是非常敏感的，因此在实际中应用这一解析解是很危险的。业界通常采用随机波动率模型或者隐含波动率曲面来提高对资产价格描述的精度，后续章节将介绍这两种方法。

与复合期权类似，可选期权给予持有者购买另一份期权的权利。可选期权的持有者可以选择得到的是看涨期权还是看跌期权。

一般地，可以将可选期权的价值写为 $Ch(S, t)$ ，标的期权价值写为 $V_1(S, t)$ 和 $V_2(S, t)$ （或更多）。现在有

$$\frac{\partial Ch}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 Ch}{\partial S^2} + rS \frac{\partial Ch}{\partial S} - rCh = 0$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V_1}{\partial S} - rV_1 = 0$$

以及

$$\frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V_2}{\partial S} - rV_2 = 0$$

终值条件是标的期权在到期日的通常回报，且有

$$Ch(S, T_{Ch}) = \max(V_1(S, T_{Ch}) - E_1, V_2(S, T_{Ch}) - E_2, 0)$$

符号意义不再赘述。

可选期权定价的实际应用问题与复合期权相同。

图 22-5 给出了在到期日前某时刻香草看涨期权与香草看跌期权的价值，图中另一条线是基于这二者中最优者的可选看

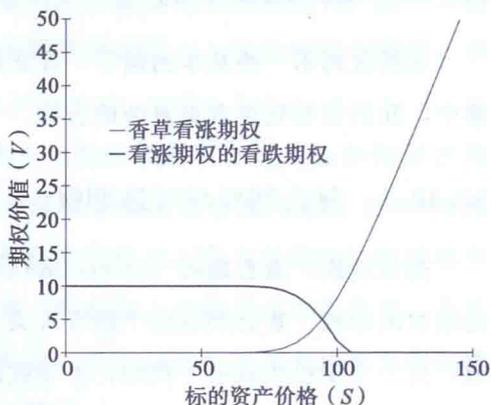


图 22-4 到期前某时刻香草看涨期权的价值及以其为标的的看跌期权回报

分类	复合期权/ 可选期权
时变性	无
现金流	无
决策	无(或细小)
路径依赖性	弱
维度	2
阶数	2阶

复合期权、可选期权分类表

涨期权回报（减去执行价）。这是布莱克 - 斯科尔斯偏微分方程的终值条件。

图 22-6 与图 22-7 给出了为可选期权定价的彭博界面。

可展期期权（extendible options）同复合期权及可选期权非常相似。在某个规定时刻，持有人可以选择接受原期权的回报，也可以选择延展期权的剩余期限，甚至更改执行价。有时具有展期权利的是期权空方。有能力的读者可以自行在布莱克 - 斯科尔斯框架下给该合约建模。

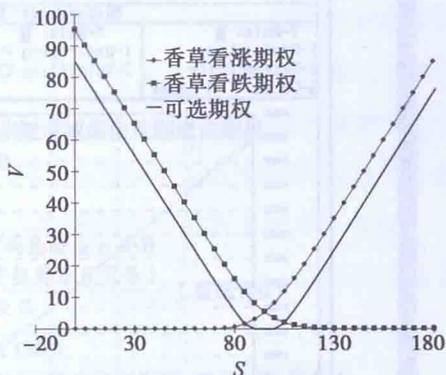


图 22-5 到期日前某时刻香草看涨期权与香草看跌期权的价值，以及以这二者中最优者为标的的可选期权的回报

Option Valuation and Risk Parameters		Dividends	
Price:	571.195	Value:	571.19519
Volatility:	14.35%	7-Day Decay:	29.86389
Delta:	0.08757	Premium:	5.12283
Gamma:	0.00112	Parity:	0.00000
Vega:	38.44012	Gearing:	19.52047

图 22-6 彭博可选期权估值界面

资料来源：彭博资讯。

22.10.2 范围中期票据

范围中期票据（range notes）是非常常见的合约，它存在于诸如股票、货币及固定收益产品等“对数正态”资产中。在最基本的股票衍生品中，当标的资产价格位于 $S_t \leq$



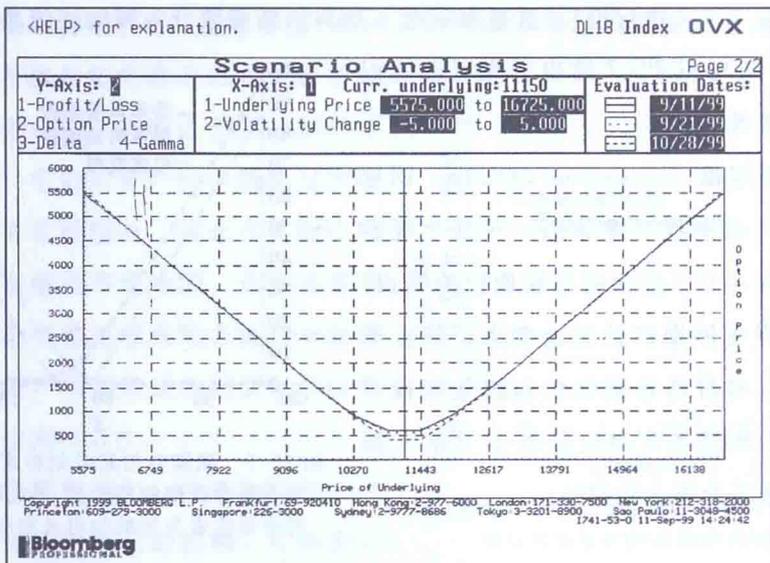


图 22-7 彭博可选项情景分析界面

资料来源：彭博资讯。

$S \leq S_u$ 这个给定的范围内时，范围中期票据每单位时间将支付比率为 L 的红利，也就是说，在每一个资产价格位于给定范围内的 dt ，你将得到金额 Ldt 。这里引入示性函数 $I(S)$ ，当满足 $S_l \leq S \leq S_u$ 时，该函数值为 1，否则为 0。于是范围中期票据满足

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV + L I(S) = 0$$

图 22-8 给出了墨西哥比索/美元汇率的范围中期票据的详细条款，当汇率处于给定范围内的天数多于处于范围外的天数时，该合约将支付二者的差值，支付日为合约到期日（这份合约与前面提到的范围中期票据略有不同，更为复杂。复杂在哪里呢？读完第二部分后你就能够为这份合同约定价了）。

分类	范围中期票据
时变性	无
现金流	有(连续的)
决策	无
路径依赖性	弱
维度	2
阶数	1阶

范围中期票据分类表

22.10.3 障碍期权

障碍期权 (barrier options) 的回报取决于标的资产价格在期权到期日前是否

6个月期墨西哥比索/美元汇率的范围敲进敲出增值期权	
结算日	交易日后1周
到期日	交易日后6个月
期权费	50 000美元起
期权类型	墨西哥比索/美元汇率敲进减敲出范围增值期权
期权支付日	到期日后两个营业日
期权回报	125 000美元 × 指数
其中指数	$\frac{\text{(即期汇率在范围内的营业日天数)} - \text{(即期汇率在范围外的营业日天数)}}{\text{总营业日}}$ (最低为0)
范围	MXN/USD 7.720 0-8.130 0
即期汇率	纽约时间下午3:00左右路透咨询终端“BNMX”屏幕上显示的墨西哥银行确定的墨西哥比索/美元官方即期汇率
当前MXN/USD即期汇率	7.7800

注：这个说明书既不是用于购买或出售证券或诸如期权、互换、远期合约和与场外衍生产品具有相似特征的结构票据等场外衍生品的要约，也不是购买或出售证券与场外衍生品的宣传单。说明书中的内容并不是实际交易中一份完整说明的全部内容，并可随意更改其中内容。

图 22-8 墨西哥比索/美元汇率的范围中期票据敲进敲出期权的说明书

达到某个规定水平。这个临界水平被称作障碍，有时候会设置多个障碍。障碍期权属于弱路径依赖，在第 23 章中将对其做深入讨论。

障碍期权主要有两种，“入局”障碍期权（敲入期权（knock-in））或“出局”障碍期权（敲出期权（knock-out）），前者只在到期日前障碍被触及的情况下才有回报，而后者只在到期日前障碍未被触及的情况下才有回报。这些合约都是弱路径依赖的，也就是说它们在某节点的价格只取决于标的资产在该节点的价格及合约剩余期限。我们会看到它们仍然满足布莱克-斯科尔斯方程，只是带有特殊的边界条件。

分类	敲出期权
时变性	无
现金流	无
决策	无
路径依赖性	弱
维度	2
阶数	1阶

敲出期权分类表

22.10.4 亚式期权

亚式期权（Asian options）的回报取决于到期日前某段时间内标的资产的平均

价格，这是我们将要研究的第一个强路径依赖合约。之所以称为强路径依赖是因为其到期日前某节点的价格不仅取决于该节点的标的资产价格，还取决于到达该节点的路径。准确地讲，它的价值决定于标的资产迄今的平均价格。这个迄今的平均价格对于我们来说十分重要，我们将它视为一个新的状态变量。我们将看到如何推导出一个为亚式合约定价的偏微分方程，这个偏微分方程中将含有三个自变量。

用来计算期权回报的平均数有许多不同形式的定义，既可以是算术平均也可以是几何平均。

分类	敲入期权
时变性	无
现金流	无
决策性	无
路径依赖性	弱
维度	2
阶数	2阶?

敲入期权分类表

分类	亚式期权
时变性	是，如果为离散的 否，如果为连续的
现金流	无
决策	无
路径依赖性	强
维度	3 (泊松分布, 可约简)
阶数	1阶

亚式期权分类表

在此所用的数据应为连续抽样得到的，也就是说用到了给定时段内每一个已实现的标的资产价格。但由于实务与法律原因，更常见的情形是所用的数据是离散抽样得到的，比如仅采用每周五的收盘价来计算平均价格。在第 25 章，我们将看到在不同平均数定义以及连续或离散抽样形式下如何对这类期权进行定价。

22.10.5 回溯期权

回溯期权 (lookback options) 的回报取决于到期日前某时段内标的资产已实现的最高或最低价格。一个极端但能显示这类合约特征的例子，是某个支付标的资产在下一年度最高价与最低价之差的期权。这使得期权持有人实现了每一个交易员的终极梦想：以最低价买入，以最高价售出。当然，要得到这样的回报是要付钱

分类	回溯期权
时变性	是，如果为离散的 否，如果为连续的
现金流	无
决策	无
路径依赖性	强
维度	3 (泊松分布, 可约简)
阶数	1阶

回溯期权分类表

的。这样的期权价格相当贵。

同样地，最高及最低价可以连续计算抑或离散计算，这取决于使用标的资产全部已实现价格抑或其子集。在实务中，最高或最低价是被离散计算的。

22.11 数学/编程结论小结

分 类	示 例	结 论
时变性	百慕大期权的执行、离散抽样等	代码中必须跟踪时间
现金流	互换、分期支付期权等	期权价值跳跃/偏微分方程引入红利率项
路径依赖性	障碍期权、亚式期权、回溯期权等	强路径依赖需要更高维度
维度	强路径依赖期权、多资产期权等	蒙特卡罗模拟优于有限差分
阶数	复合期权、敲入障碍期权等	先求解低阶期权，再代入高阶期权
决策	美式期权、认证期权、可选期权等	有限差分优于蒙特卡罗模拟，“最优决策”

22.12 总结

本章给出了在分析衍生品合约时简化问题的方法。能够比较不同合约的差异是理解它们的重要前提。在消化了本章及后续几章后，你将可以快速识别一份特殊合约在定价与对冲上的难易，同时你也知道布莱克 - 斯科尔斯框架是否适用，以及直接使用它是否危险。

本章我们也开始接触较之前更复杂的合约，我们将在后续几章从理论与实务两个视角对这些期权中的一部分进行深入研究。

拓展阅读

- Geske (1979) 中讨论了复合期权定价。
- 要了解我所描述的分类类型的更多细节，可参考 Taleb (1997)。这本书是一本精彩有趣的读物。
- Zhang (1997) 的书讨论了多种奇异期权，且附有大量公式。
- 要了解 Levy 过程及奇异期权定价的更多内容，可参考 Kyprianou, Schoutens 和 Wilmott (2005)。



第23章

障碍期权

本章内容

- 不同种类的障碍期权
- 如何在偏微分方程框架下为多种障碍期权定价
- 障碍期权定价与对冲的一些实务问题

23.1 引言

上一章中我简要介绍过障碍期权。在本章中我们将从理论与实务两个角度对其进行详细的研究。障碍期权是路径依赖期权，其回报取决于资产价格的已实现路径；当资产价格过高或过低时，合约的某些方面将被触发。例如，如果在到期之前的所有时刻标的资产都没有以 S_0 或更高的价格进行交易，那么向上敲出看涨期权在到期日的支付为常见的 $\max(S - E, 0)$ 。在这个例子中，如果资产价格触及了这个水平（显然从下方触及），那么期权将被“敲出”，变得一文不值。除了像这样的“敲出”期权，也存在“敲入”期权，它们只有在资产价格触及特定水平时才有支付，否则在到期时毫无价值。

障碍期权流行的原因很多。也许购买者用它们对冲具有类似特征的特殊现金

流。其购买者往往对市场未来方向有非常精确的判断。如果他想获得看涨期权式的回报，但相信在期权到期日前标的资产价格上升幅度有限，不愿意支付全部上行潜力的费用，那么他或许可以购买向上敲出期权。由于上涨幅度严格受限，障碍期权比相同的普通期权便宜。如果他的判断是对的并且障碍未被触及，他将得到他希望的支付。障碍同当前资产价格越接近，期权被敲出的可能性也越大，那合约也就越便宜。

相反地，相信某障碍水平会实现的人将购买“敲入”期权。同样地，这个期权也会比相应的普通期权便宜。

23.2 障碍期权的不同种类

障碍期权有两种主要类型。

- **敲出期权 (out option)**，只有在到期日前从未达到障碍水平下才产生支付。如果障碍被触及称期权被敲出了 (knocked out)。
- **敲入期权 (in option)**，只有在到期日前达到障碍水平才产生支付。如果障碍被触及称期权被敲入了 (knocked in)。



根据障碍水平与标的资产初始价格的相对位置可进一步对障碍期权进行分类。

- 如果障碍在资产初始价值以上，被称作**向上 (up)** 期权。
- 如果障碍在资产初始价值以下，被称作**向下 (down)** 期权。

最终，对到期日时收到的回报进行描述：

- 回报均是常见的形式，如看涨、看跌、二值等。

上面对最常见的障碍期权进行了分类。在上述所有合约中，障碍的位置都可以是时变的，障碍水平可能从一个初始值开始然后逐步上升。通常障碍水平是时间的分段常数函数。

另外一种类型的障碍期权称为**双边障碍期权 (double barrier)**。它有上下两个障碍，前者高于资产当前价格而后者低于资产当前价格。双“敲出”障碍期权的任何一个障碍被触及，则合约一文不值。双“敲入”障碍期权的两个障碍中至

少有一个在到期日前必须被触及，否则在到期时期权毫无价值。其他的可能性是不言自明的；比如一个障碍是“敲入”而另一个障碍是“敲出”，在到期日时合约可以是“敲入”式的回报或者“敲出”式的回报。

有时当障碍被触及时将产生称为部分退款（rebate）的回报。它通常出现在“敲出”障碍期权中，可以将其理解为对失去回报的一种补偿。部分退款可以在障碍被触及时就支付，也可以在到期日支付。

图 23-1 给出了以墨西哥比索/美元汇率为标的的双敲出障碍期权的说明书。较高的障碍设在 8.25，较低的障碍设在 7.45。如果在到期日前汇率一直在这个范围内，那么该产品就会有回报。这是障碍期权的一个非常普通的例子。

美元/墨西哥比索汇率的双敲出障碍中期票据	
本金	10 000 000 美元
发行者	× × × ×
到期日	交易日后 6 个月
发行价格	100%
息票	在中期票据有效期内的任何时候，如果美元/墨西哥比索即期汇率高于上障碍或者低于下障碍，则票据的价值为
	0
	否则
	$400\% \times \max\left(0, \frac{8.250 - FX}{FX}\right)$
	式中， FX 为到期日美元/墨西哥比索即期汇率
赎回量	100%
上障碍	8.250
下障碍	7.450
注：这个说明书既不是用于购买或出售证券或诸如期权、互换、远期合约和与场外衍生产品具有相似特征的结构性票据等场外衍生品的要约，也不是购买或出售证券与场外衍生品的宣传单。说明书中的内容并不是实际交易中一份完整说明的全部内容，并可随意更改其中内容。	

图 23-1 美元/墨西哥比索汇率的双敲出障碍期权的说明书

23.3 定价方法

23.3.1 蒙特卡罗模拟

根据下述原则使用蒙特卡罗模拟进行定价是很简单的。

- 期权价格就是在风险中性随机游走下其期望回报的现值。

定价的算法具体如下。

(1) 以今天的资产价格为起点，模拟在要求的时间范围内风险中性随机游走。这个模拟给出了标的资产价格的一条实现路径。

(2) 基于这条实现路径计算期权的回报。

(3) 模拟出更多该时间段的实现路径。

(4) 计算全部实现路径的平均回报。

(5) 算出这个平均回报的现值，即为期权价格。

1. 蒙特卡罗模拟的优点

- 编程简便。
- 编程中不容易犯错。

2. 蒙特卡罗模拟的缺点

- 要计算希腊字母需要更多的工作。
- 得到精确解需要进行数万次模拟，因此求解过程缓慢。

23.3.2 偏微分方程

障碍期权是路径依赖的，其回报及价格依赖于标的资产价格在到期前经过的路径的其他信息。

- 但是其路径依赖性为弱式的，我们仅需要知道障碍是否被触及，并不需要路径的其他信息。

23.4 在偏微分方程框架下为障碍期权定价

障碍期权是路径依赖的，但其依赖性为弱式的。这和后面的一些期权是有区别的，比如亚式期权，后者是强路径依赖的。这里用 $V(S, t)$ 表示障碍触及前期权的价格，这个值将满足布莱克 - 斯科尔斯方程

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

障碍特征的细节通过边界条件的具体形式来体现。

23.4.1 “敲出”障碍期权

如果标的资产价格触及了障碍，“敲出”障碍期权将一文不值。这个特征使得障碍水平为 $S=S_b$ 的向上敲出障碍期权有边界条件

$$V(S_u, t) = 0, \text{ 这里 } t < T$$

我们必须在 $0 \leq S \leq S_u$ 的范围求解布莱克 - 斯科尔斯方程, 方程在 $S = S_u$ 的边界条件如上, 还有一个与障碍未被触及时的关于回报的终值条件。对于看涨期权有

$$V(S, T) = \max(S - E, 0)$$

如果有一个障碍为 S_d 的向下敲出障碍期权, 则在 $S_d \leq S < \infty$ 范围内求解布莱克 - 斯科尔斯方程, 边界条件为

$$V(S_d, t) = 0$$

终值条件与到期日回报相关。

很容易将边界条件修改为适用于部分退款情形。如果障碍被触及时有大小为 R 的部分退款, 则

$$V(S_d, t) = R$$

23.4.2 “敲入”障碍期权

“敲入”期权只有在障碍被触及时才有回报。如果障碍未被触及, 那么到期时期权毫无价值

$$V(S, T) = 0$$

“敲入”期权的价值在于触及障碍的潜在可能性, 如果期权是向上敲入合约, 那么它在向上障碍上有和普通合约相同的价值

$$V(S_u, t) = \text{普通合约的价值, 是 } t \text{ 的函数}$$

使用符号 $V_v(S, t)$ 表示相应的普通合约的价格 (如果我们研究的是向上敲入看涨期权, 对应的普通合约就是普通看涨期权), 那么一定有

$$V(S_u, t) = V_v(S_u, t), \text{ 这里 } t < T$$

向下敲入障碍期权的边界条件与之类似。

当障碍被触及时我们得到的合约本身是一个衍生品, 因此“敲入”障碍期权是一个二阶合约。然而由于“敲入”障碍期权与同样条件的“敲出”期权之和是普通期权, 实际上我们可以将定价问题简化为一阶问题。

完全使用数值方法求解“敲入”障碍期权时, 必须先求解相应的普通期权的价值, 然后再求解障碍期权的价值。因此整个求解过程需要的时间大约是“敲出”障碍期权的两倍。^①

① 而且, 当然, 普通期权必须在 $0 \leq S < \infty$ 范围内求解。

23.4.3 当波动率为常数时的一些公式

当波动率为常数时可以求解出很多障碍合约的理论价格。这里给出部分例子，本章的结尾还有更多。（后面会讨论为什么在实务中很少使用这些公式。）

我们继续使用 $V_v(S, t)$ 表示相应的普通合约的价值。

1. 向下敲出障碍看涨期权

作为第1个例子，考虑向下敲出障碍看涨期权，障碍水平为低于执行价 E 的 S_d 。函数 $V_v(S, t)$ 是和障碍期权有同样的到期日和回报的普通期权的布莱克-斯科尔斯理论价格。向下敲出障碍看涨期权的价值由下式给出

$$V(S, t) = V_v(S, t) - \left(\frac{S}{S_d}\right)^{1-(2r/\sigma^2)} V_v\left(\frac{S_d^2}{S}, t\right)$$

我们来证明这的确是正确的解。首先，它是否满足布莱克-斯科尔斯方程？显然右边的第1项是满足的。第2项也是满足的。实际上，如果 V_{BS} 是布莱克-斯科尔斯方程的解，容易证明对任意的 X

$$S^{1-(2r/\sigma^2)} V_{BS}\left(\frac{X}{S}, t\right)$$

也是方程的解。

那么当 $S = S_d$ 时期权价值一定为 0 的条件呢？将 $S = S_d$ 代入上式，可以确认上式也是满足该条件的。终值条件呢？因为当 $S > S_d$ 时， $S_d^2/S < E$ ，所以 $V_v(S_d^2/S, T)$ 的值是 0。因此终值条件也得到满足。

图 23-2 展示了作为 S 的函数的该期权价值。

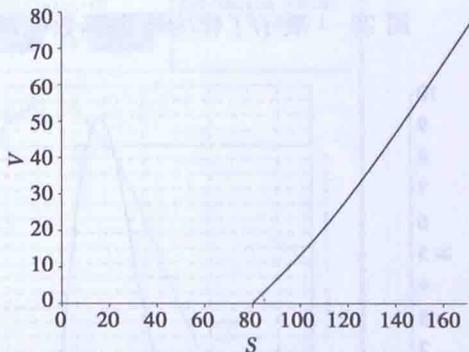


图 23-2 向下敲出障碍看涨期权的价值

2. 向下敲入障碍看涨期权

在没有任何部分退款时，“敲入”障碍期权和“敲出”障碍期权（具有同样的回报与障碍水平）的关系非常简单

$$\text{敲入期权} + \text{敲出期权} = \text{普通期权}$$

如果“敲入”障碍被触及，“敲出”障碍同样会被触及，因此无论障碍被触及与否在到期日都会有普通期权的回报。

因此，向下敲入障碍看涨期权的价格是

$$V(S, t) = \left(\frac{S}{S_d}\right)^{1-(2r/\sigma^2)} V_v\left(\frac{S_d^2}{S}, t\right)$$

图 23-3 展示了作为 S 的函数的该期权的价格，同时给出了普通看涨期权的价格。注意这两个价值在障碍水平处相交。

3. 向上敲出障碍看涨期权

向上敲出障碍看涨期权的障碍水平 S_u 一定在执行价 E 之上（否则期权会没有价值）。这使得价格的解更加复杂，我这里只做简要介绍。向上敲出障碍看涨期权的价格是

$$S(N(d_1) - N(d_3) - b(N(d_6) - N(d_8))) - Ee^{-r(T-t)}(N(d_2) - N(d_4) - a(N(d_5) - N(d_7)))$$

其中 $N(\cdot)$ 是标准正态分布变量的累积概率分布函数， a 、 b 和所有 d 的形式在章末给出。

图 23-4 展示了作为 S 的函数的该期权的价格。图 23-5 展示了其 Delta 值。

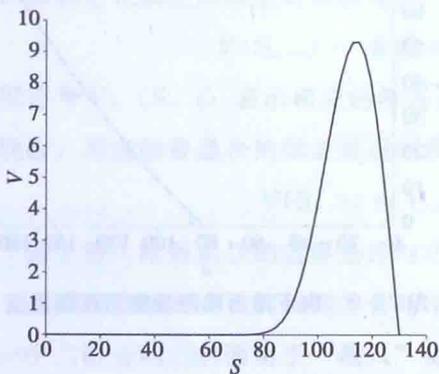


图 23-4 向上敲出障碍看涨期权的价格

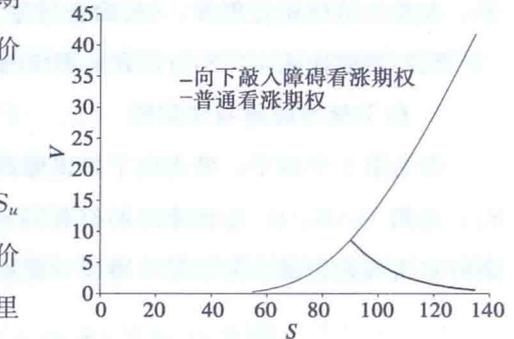


图 23-3 向下敲入障碍看涨期权的价格

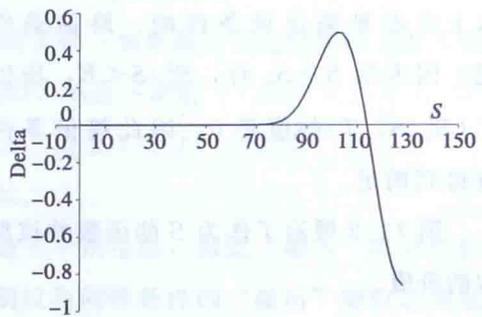


图 23-5 向上敲出障碍看涨期权的 Delta

在本章末的附录 23A 中有多个障碍期权的定价公式（假定波动率是常数）。存在双边障碍时可以用傅立叶级数的形式求解（见第 6 章）。

图 23-6 展示了彭博资讯的障碍期权计算器，图 23-7 展示了期权损益与资产价格的关系。

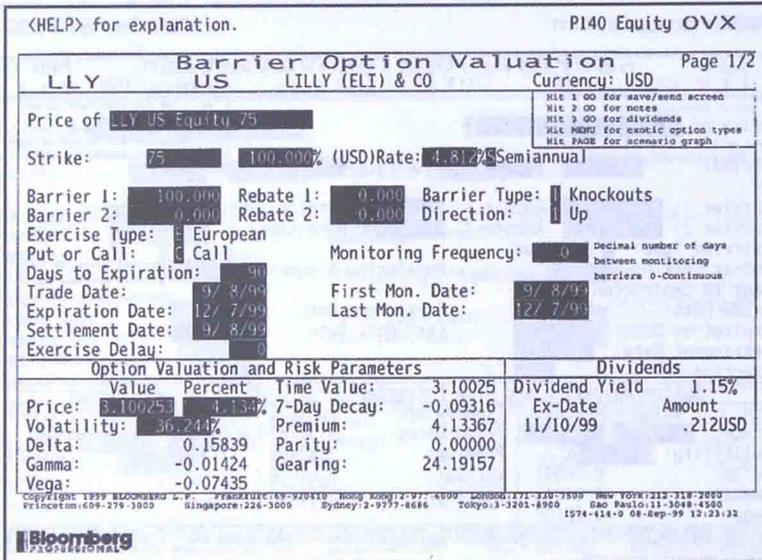


图 23-6 向上敲出看涨期权计算器

资料来源：彭博资讯。

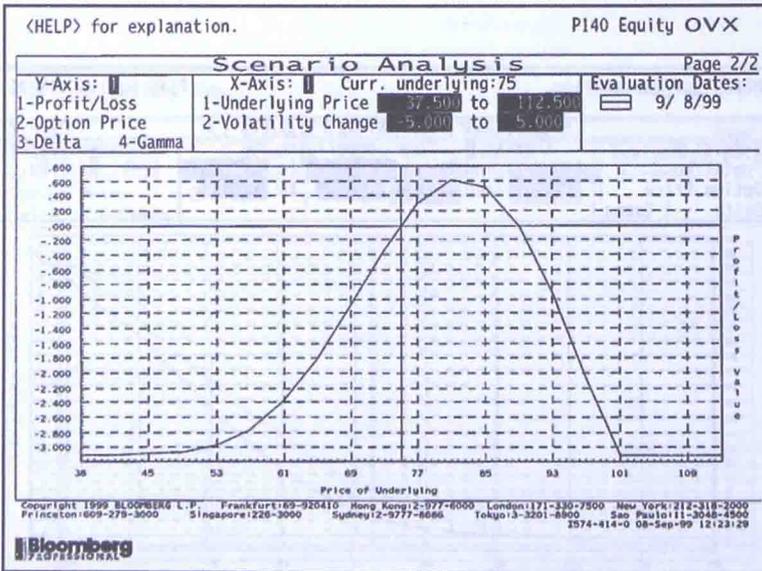


图 23-7 向上敲出看涨期权损益

资料来源：彭博资讯。

23.4.4 更多例子

图 23-8~图 23-13 均来自彭博资讯，其定价公式在前文或稍后有解释。

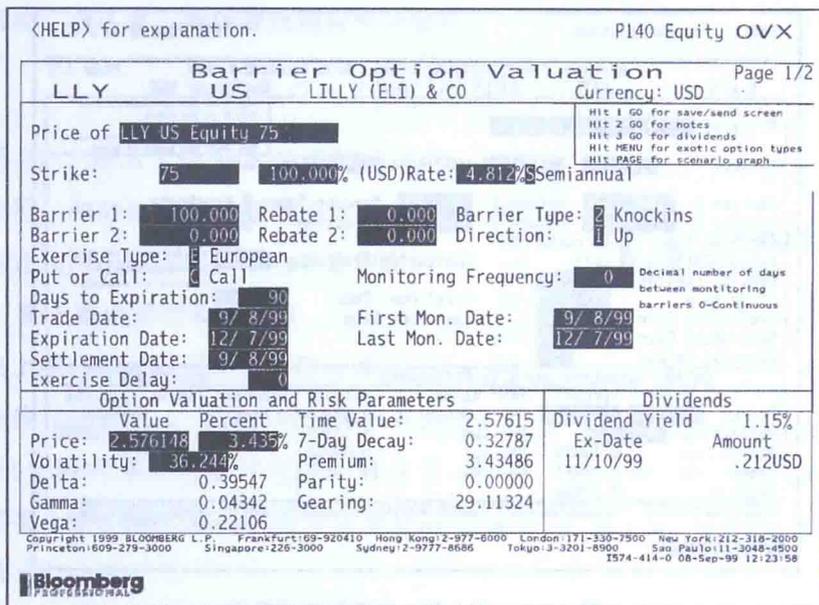


图 23-8 向上敲入看涨期权计算器

资料来源：彭博资讯。

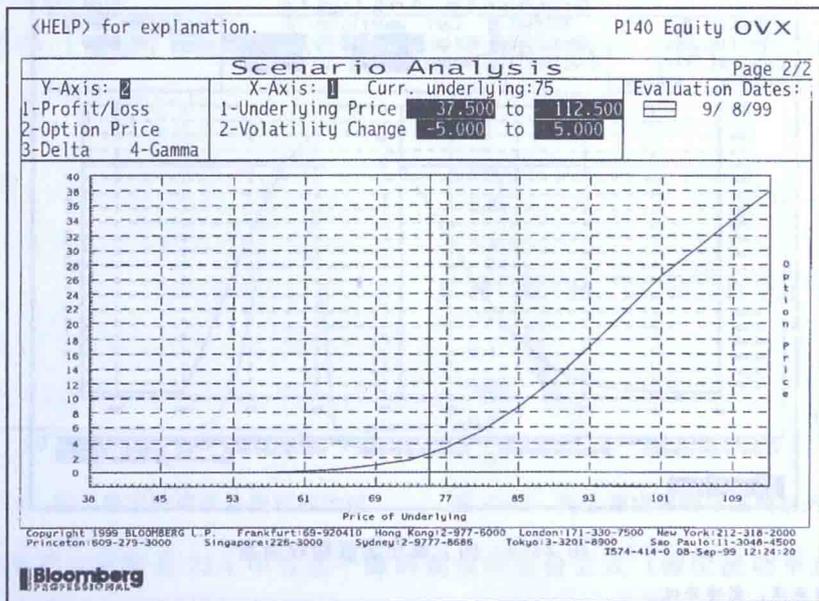


图 23-9 向上敲入看涨期权价值

资料来源：彭博资讯。

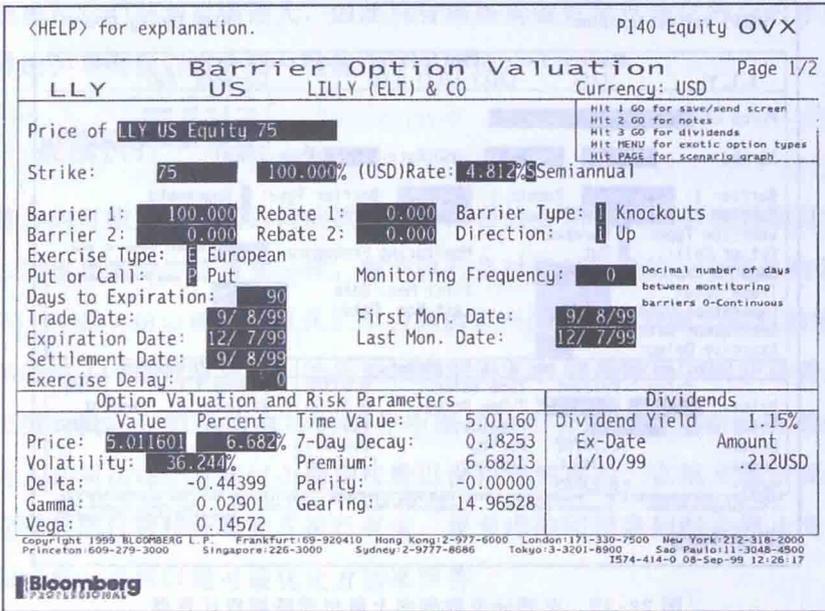


图 23-10 向上敲出看跌期权计算器

资料来源：彭博资讯。

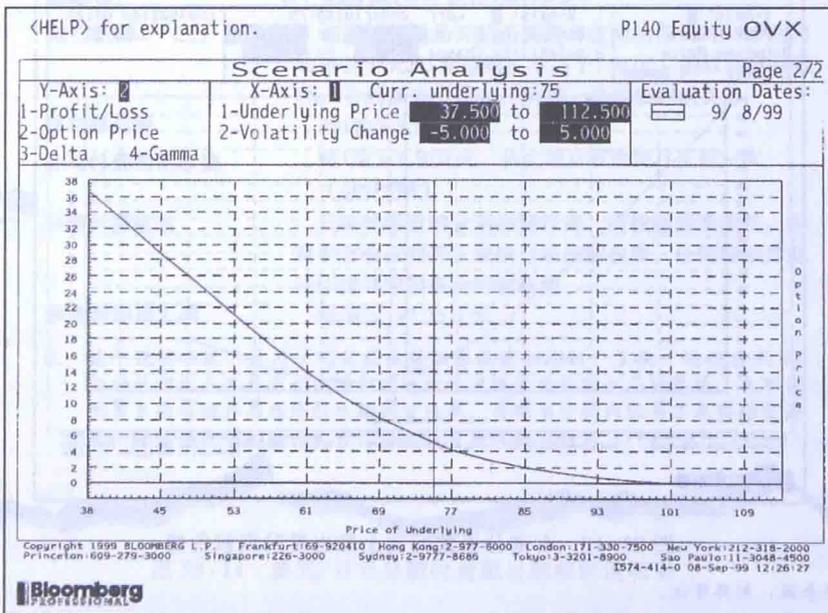


图 23-11 向上敲出看跌期权价值

资料来源：彭博资讯。

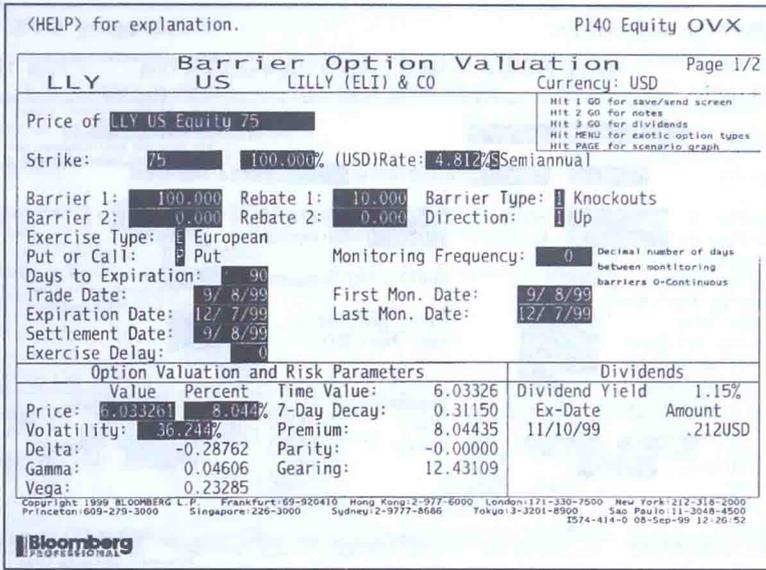


图 23-12 有部分退款的向上敲出看跌期权计算器

资料来源：彭博资讯。

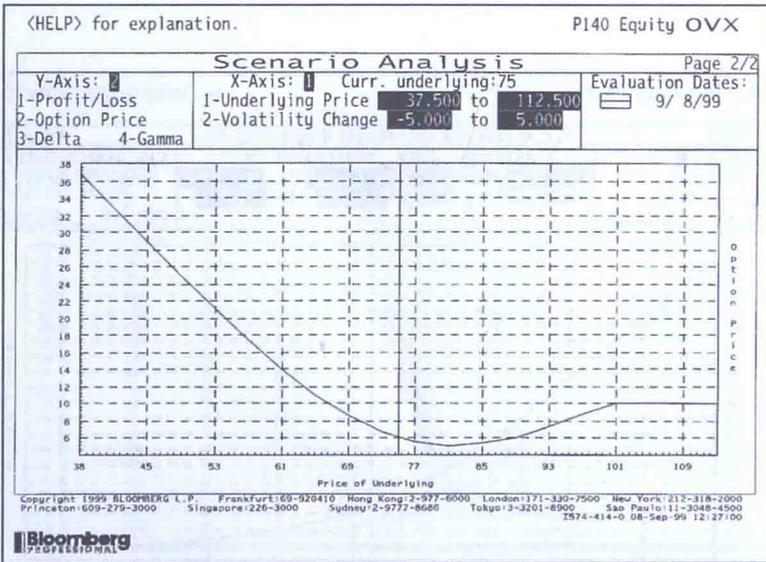


图 23-13 有部分退款的向上敲出看跌期权价值

资料来源：彭博资讯。

23.5 障碍式期权的其他特征

在不久之前障碍期权还是奇异的，它们的市场很小，很少有人能自如地为其

定价。但现在它们交易规模很大，因此只有那些具备更罕见特征的合约才应该被称为奇异的。下面我们将介绍一些此类罕见特征。

23.5.1 提前执行

有些合约可能具有美式的提前执行特征。合约必须说明一旦在到期日前提前执行那么回报是多少。与通常一样，提前执行是对期权价值的一个简单约束。

图 23-14 是 1 份以美元/日元汇率为标的资产的分期付款敲出期权的说明书。一旦汇率超过 140 期权将敲出。如果期权到期时未曾触及障碍，则获得普通看涨期权的回报。我在介绍提前执行的部分中提到这个合约是因为它具有类似的性质。持有人必须在每个月支付 1 期期权费以保持合约有效。在第 9 章中我们介绍了为何这种分期付款特征跟美式执行有关。要考虑的问题是何时会停止支付分期付款的期权费？这可以通过最优化方法来回答。

美元/日元分期付款敲出期权	
名义本金	5 000 万美元
期权类型	133.25 (平价) 美元看跌/日元看涨 带敲出 分期付款
到期日	交易日 6 个月之后
敲出机制	如果在从交易开始至到期日之间的任何时刻银行间市场的美元/日元即期汇率高于 140.00，期权将自动取消，合约双方将没有任何进一步的权利或义务
首次期权费	每 1 美元 1.50 日元
分期付款的期权费	每 1 美元 1.50 日元，从交易日开始每月支付一次 (共计 5 期)
分期付款机制	只要继续缴纳分期的期权费，期权将持续生效。但对手方有权利停止缴纳分期的期权费，任何时候如此操作将导致期权合约被取消
参考的即期汇率	每美元 133.25 日元
注：这个说明书既不是用于购买或出售证券或诸如期权、互换、远期合约和与场外衍生产品具有相似特征的结构票据等场外衍生品的要约，也不是购买或出售证券与场外衍生品的宣传单。说明书中的内容并不是实际交易中一份完整说明的全部内容，并可随意更改其中内容。	

图 23-14 美元/日元分期付款敲出期权的说明书

23.5.2 期间障碍期权

障碍的位置可以是时变的。时变障碍的一个极端例子是在某个特定的时间段

障碍将会消失。这样的期权被称作受保护 (protected) 或部分 (partial) 障碍期权。图 23-15 给出了一个例子。

这样的合约有两种类型。第 1 种合约当资产价格在障碍有效的时段超过障碍时障碍就会被触发。图 23-16 中给出了相应问题解决方案的图示。

第 2 种期间障碍期权仅当资产价格路径在某个有效日穿过障碍时障碍才被触发。一旦资产价格以迂回前行的方式通过障碍, 则障碍不会被触发。图 23-17 中给出了相应问题解决方案的图示。

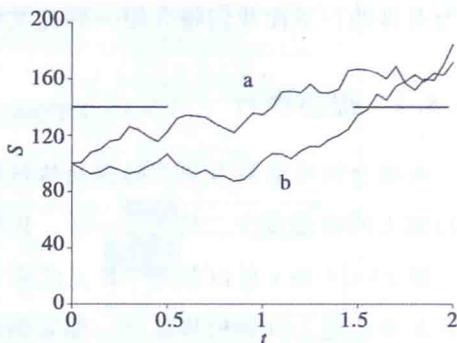


图 23-15 期间障碍期权。两个变种：
a. 在有效日期内如果资产价格超过障碍则障碍被触发；b. 仅当资产价格穿过障碍时障碍被触发



图 23-16 期间障碍期权：如果资产价格在有效日期内超过障碍则障碍被触发。解决方案



图 23-17 期间障碍期权：仅当资产价格穿过障碍时障碍被触发。解决方案

23.5.3 障碍的重复触及

前面见过的双障碍期权可以被设计得更加复杂。我们可以要求双障碍都被触及才会触发障碍, 而不是只需触及其中一个。

该合约的定价很简单。在其中一个障碍被首次触及时, 合约就变成了普通的障碍期权。因此对双障碍期权可以求解带有如下边界条件的布莱克 - 斯科尔斯方程: 在较低障碍上期权的价值等于一个向上障碍期权, 在较高障碍上等于一个向下障碍期权。由于要先求解另一份合约, 使得双障碍期权成为一个二阶期权。

在第 28 章中我们将看到与此类合约有关的巴黎期权, 其回报依赖于资产价格在障碍之上的时间长度。

23.5.4 障碍重置

另外一种可以通过像“敲入”障碍期权一样的两步（或多步）法来定价的障碍合约是重置障碍期权。当障碍被触及时，合约变成了另一份具有不同障碍水平的障碍期权。这个合约可以被认为是时变的，因为如果在某个时点之前触及障碍将得到一份新的障碍期权，如果在此时点之后触及障碍则得到普通期权的回报。

与此类合约有关的是滚动上升（roll-up）和滚动下降（roll-down）期权。它们一开始是普通期权，但当资产价格达到某个预定的水平时就变成了障碍期权。举例说明，对滚动上升看跌期权来说，一旦触及了滚动上升的触发点那么合约就变成了向上敲出看跌期权，看跌障碍期权的执行价就是滚动上升的触发点。障碍水平是一个事先设定的值。

23.5.5 外部障碍期权

外部（outside）或彩虹障碍期权（rainbow barrier option）的回报或触发特征依赖于另一个标的资产。因此障碍的触发基于一个资产，而回报依赖另一个资产。这类产品显然是多因子合约。

23.5.6 软障碍期权

软障碍期权（soft barrier option）允许合约被逐步敲入或敲出。合约设定了两个障碍水平，一高一低。在敲出障碍期权中，合约被敲出的比例取决于资产价格抵达的两个障碍之间的距离。比如，假设1份向上敲出期权具有范围为100至120的软障碍，如果在到期日前资产价格达到的最大值是105，那么将损失回报的 $5/20$ 或25%。

23.5.7 巴黎期权

巴黎期权（Parisian option）只有在标的资产价格超过障碍的时间长度超过指定的时间长度时，其障碍才被触发。这个额外的特征降低了操纵触发事件的可能性，同时使动态对冲更加简单。然而这个新特征也增加了定价问题的维度，因此我们要在几章之后才能完整地分析这种合约。在第28章中将详细地介绍巴黎期权。

23.5.8 紧急终止

紧急终止 (emergency exit) 是一项可以在任何奇异合约中找到的特征。这个逃离条款允许在预设的条件下退出某个头寸。例如, 合约中的紧急终止条款或许允许你在到期日前随时“逃离”并收到部分退款。这和美式期权的提前执行特征非常相似, 数学上建模的方法也类似。如果部分退款为 R , 那么

$$V \geq R$$

可能 R 是时变的, 使得逃离条款仅在部分预定时间内有效, 并且/或者是依赖于 S 的, 因此仅在股价处于某个水平时才可以逃离。

23.6 首次离开时间

障碍期权有路径依赖性是由于期权的回报依赖于障碍是否被触发。期权价值可以被解读为风险中性预期回报的现值, 但到期日前障碍被触发的可能性仅在使用真实的资产价格随机过程来计算概率时才有意义。对于向上敲入障碍期权, 到期日前障碍被触发的概率 $Q(S, t)$ 是下式的解

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial S^2} + \mu S \frac{\partial Q}{\partial S} = 0$$

边界和终值条件和第 10 章所讨论的一样:

$$Q(S, T) = 0 \text{ 和 } Q(S_u, t) = 1$$

由于使用的是 S 的真实过程, 因此问题中含有真实漂移率 μ 。由下至上触及障碍水平 S_u 之前所过去的预期时间 $u(S)$ 是下式的解

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{d^2 u}{dS^2} + \mu S \frac{du}{dS} = -1$$

即

$$\frac{1}{\frac{1}{2}\sigma^2 - \mu} \log\left(\frac{S}{S_u}\right)$$

此时 $2\mu > \sigma^2$ 。如果 $2\mu < \sigma^2$, 那么预期的首次离开时间为无穷大。

那些对标的资产价格的方向有观点, 并相信障碍会被或不会被触发的投机者可能会进行这样的计算。例如其观点会以概率的形式量化。或者他可以判断首次离开时间比剩余到期期限更长还是更短。

套期保值者也会发现此类计算的有用之处。如同我们后面要讨论的, 对障碍

期权进行 Delta 对冲极其困难，以至于通常还需要进行一定程度的静态对冲。静态对冲的选择可能受到障碍触发的真实预期时间的影响。

23.7 市场实务：使用何种波动率

实务操作者不会使用单一的常数波动率为合约定价。让我们看一下这样做的缺陷，然后了解实务操作者的真实做法。

图 23-18 展示了向上敲出看涨期权的价值，波动率别为 15%、20% 和 25%。这里选择了 3 个差异较大的波动率以说明问题。如果对波动率的值不确定（我们的确如此），那么在为合约定价时要使用哪一个？在大约 $S=100$ 的位置观察，期权的价值看起来对波动率并不敏感；Vega 是 0。看起来像是使用什么波动率根本无关紧要。这会造成严重的误导。

可以问一下自己，我真的相信波动率是 15%、20% 或者 25% 中的一个并且始终保持固定吗？或者我相信波动率会在 15% 和 25% 之间运动？显然后者更接近真相。但在衡量 Vega 时，图 23-18 假定到期日前波动率始终固定。如果关心交易的安全性，那么在购买合约时应该假定波动率的行为会使合约的价值最低。最坏的结果是波动率在执行价附近低而在障碍水平附近高。从金融的角度来说，这意味着在执行价附近时期权的回报较小，但在障碍附近时触及的概率较大。从数学意义上说，波动率路径的“最坏”选择取决于每个点上 Gamma 的符号。如果 Gamma 是正的那么低波动率是不好的，如果 Gamma 是负的那么高波动率是不好的。第 52 章会介绍一个当波动率不确定时对期权定价的更好方法。当 Gamma 的符号非单一时，用 Vega 来衡量就失去了

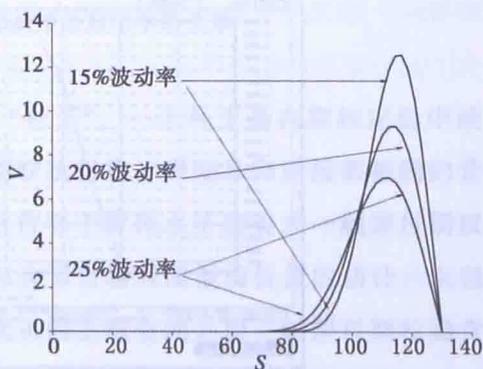


图 23-18 3 种不同波动率下向上敲出看涨期权的理论价格

意义。Gamma 符号非单一的障碍期权包括向上敲出看涨期权、向下敲出看跌期权以及许多双边障碍期权。

图 23-19~图 23-22 给出了双敲出看跌期权的详细信息，分别为期权价格与标的价格的关系，Gamma 与标的价格的关系，以及期权价格与波动率的关系。图 23-21展示了一个 Gamma 符号会改变的合约。为这样的合约定价时必须波动率的选择上非常小心。假设你想知道该合约价格为 3.2 时隐含的波动率，你会得到什么值呢？参考图 23-22。

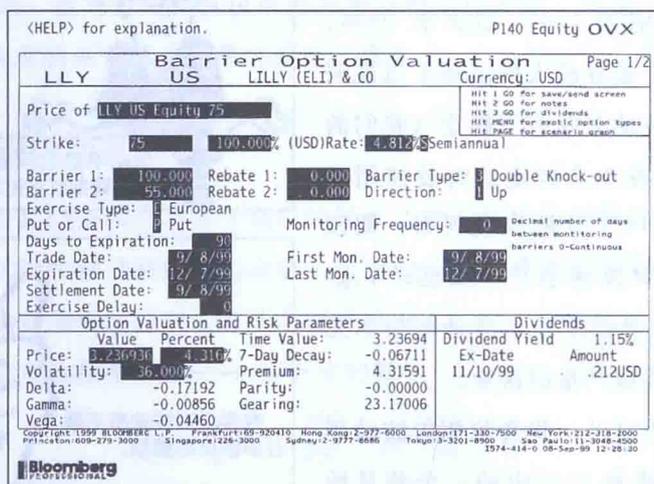


图 23-19 双敲出看跌期权的细节

资料来源：彭博资讯。

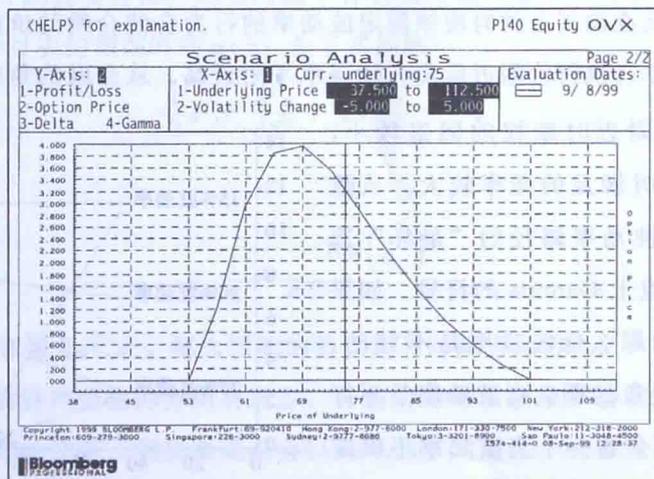


图 23-20 双敲出看跌期权的价格

资料来源：彭博资讯。

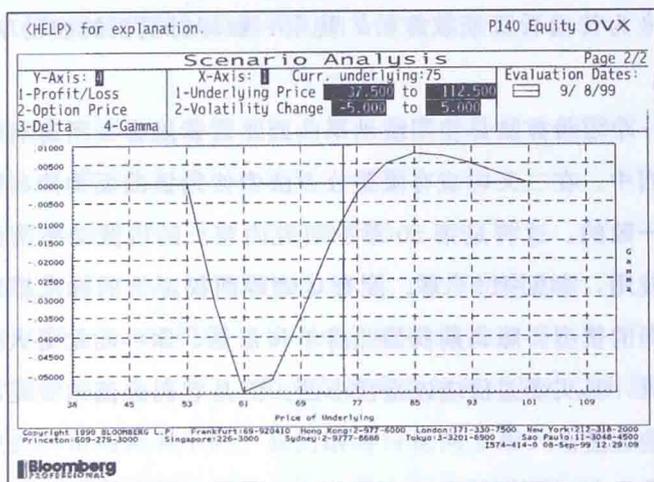


图 23-21 双敲出看跌期权的 Gamma

资料来源：彭博资讯。

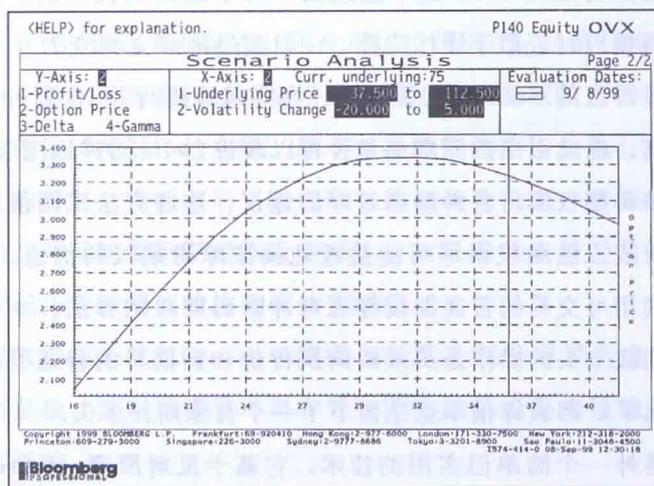


图 23-22 双敲出看跌期权价格跟波动率的关系

资料来源：彭博资讯。

为解决这类问题，业界开发了一系列“补丁”。一个补丁是在期权定价中使用两个不同的波动率。比如可以从跟障碍期权执行价、到期日和回报都相同的普通期权中计算出一个隐含波动率，再从执行价等于障碍水平的美式一触即付期权中计算出另一个。普通期权的隐含波动率包含了市场对回报的价值的估计，也包含了普通看涨期权拥有的跟向上敲出期权无关的上涨空间。而一触即付期权隐含的波动率包含了市场对触及障碍水平可能性的判断。这两个波动率可以用于敲出期权的定价，只要将“敲出”期权看作普通期权与“敲入”期权之差。使用普通

期权的波动率来为普通看涨期权定价，使用一触即付期权的波动率来为“敲入”看涨期权定价。

业界的另一个定价方法是使用波动率曲面，后者隐含在所有有交易的普通期权的市场价格当中。在二叉树或有限差分方法中使用该曲面为障碍期权定价对所有工具来说是一致的。这将是第 50 章的研究内容。随机波动率模型在障碍期权定价中也经常使用，参见第 51 章。没有对障碍期权定价的标准模型，因此业界会使用几种不同的模型。障碍期权如此简单和常见，你可能觉得大家可以在价格上达成一致意见，其买卖差价应该是很小的。但是它们的流动性还没有好到让市场来为你定价的程度。

23.8 障碍期权的对冲

障碍期权在障碍处的 Delta 是不连续的。对于敲出期权来说，期权价值是连续的，在向障碍接近时近似于线性降低，一旦超过障碍立刻变为 0。Delta 的不连续性意味着在障碍点的 Gamma 为无穷大。在穿越障碍时 Delta 对冲几乎不可能进行，成本非常高。由此引出的问题是是否可以改进 Delta 对冲以用于障碍期权。

有很多对障碍期权实行各种静态对冲的建议。这些方法试图使用普通的看涨期权、看跌期权或二值期权来尽可能接近地模拟障碍期权的价值。在第 60 章中我将介绍几种利用可交易的普通期权静态对冲障碍期权的方法。一个常见的对冲向上敲出看涨期权空头的操作是买入相同执行价和到期日的普通看涨期权。如果期权真的被敲出了，那么你很幸运地留下了一个看涨期权多头。

现在描述另外一个简单但实用的技术，它基于反射原理 (reflection principle) 和看跌 - 看涨对称性 (put-call symmetry)。我们将看到，只有在障碍与执行价的大小处在正确的顺序时该方法才是真正有效的。这个方法给出的只是近似的对冲结果。

看跌 - 看涨对称性最简单的例子是看跌 - 看涨平价。在任何资产价格水平上都有

$$V_C - V_P = S - Ee^{-r(T-t)}$$

其中 E 是两个期权的执行价， C 和 P 分别代表看涨期权和看跌期权。假设我们有 1 份向下敲入看涨期权，我们将如何使用上述结果？为简化分析，我们先假定障碍水平与执行价相等。现在使用一个相同执行价的普通看跌期权空头来对冲向下

敲入看涨期权。如果障碍被触及则我们的头寸价值为

$$V_C - V_P$$

这里的第1项来自向下敲入看涨期权，第2项来自普通看跌期权。由于看跌-看涨平价和障碍水平等于执行价，这实际上等于

$$S - Ee^{-r(T-t)} = E(1 - e^{-r(T-t)})$$

如果障碍未被触及则两个期权到期均无价值。如果利率为0，我们可以做到完美对冲。如果利率不为0，我们剩下了一个在障碍点具有很小并时变价格的一触即付期权。尽管剩余的现金流非0，但它与原现金流相比更小、有界而且容易管理。

现在假设执行价与障碍不同。我们继续讨论向下敲入看涨期权，此时障碍低于执行价。静态对冲跟前面相比没有复杂很多。我们所要知道只是当 $S = S_d$ 时执行价为 E 的看涨期权价值同执行价为 S_d^2/E 的看跌期权价值之间的关系。当利率为零时，利用看涨期权与看跌期权的定价公式，很容易发现在 $S = S_d$ 时该看涨期权的价值等于 E/S_d 份该看跌期权。因此可以使用 E/S_d 份执行价为 S_d^2/E 的看跌期权来对冲向下敲入看涨期权。注意看涨期权和看跌期权执行价的几何平均等于障碍水平，这就是“反射”的来源。用于对冲的看跌期权的执行价是看涨期权执行价在障碍处的反射。当利率非0时这种对冲方法会出现一些误差，但同样是较小且可管理的，并且随着到期日临近而减小。如果障碍未被触及则两个期权到期均毫无价值（记住看跌期权的执行价低于障碍）。

如果障碍水平高于执行价，由于障碍被触及我们得到了实值的看涨期权，因此问题会更加复杂。反射原理将不再有效，因为如果障碍未被触及则在到期日看跌期权也是实值的。

在第60章我们将看到如何通过匹配边界上的回报来复制合约。这种技术特别适用于障碍期权。

23.9 跳空成本

无论是敲入还是敲出，障碍期权在障碍处的 Delta 都是不连续的。这提出了一个关于跳空 (slippage) 或缺口 (gapping) 的特殊问题。如果在障碍被触发时标的资产价格变动很大，那么很有可能无法进行连续的对冲。例如，如果合约被敲出，你会发现有 $-\Delta$ 的标的资产头寸需要尽快清空。这会显著影响对冲成本。

考虑预期跳空成本并不困难，所要做的只是对表面上的障碍水平进行小幅修正。

在障碍处我们持有 $-\Delta$ 标的资产头寸。由于在障碍处 $S=X$ ，这一头寸的价值是 $-\Delta X$ 。假设在我们可以清空资产头寸之前资产价格移动了一个很小的比例 k ，或等价于在结清头寸时支付了一笔交易费用。^③ 我们因此在触发事件中损失了 $-k\Delta X$

现在来看图 23-23 中关于向下敲出期权的具体示例。由于损失了 $-k\Delta X$ ，我们应该使用的边界条件为

$$V(X, t) = -k\Delta X$$

稍微使用一下泰勒级数，并考虑到 $\Delta = \partial V / \partial S$ ，我们发现上式近似等同于

$$V((1+k)X, t) = 0$$

换句话说，我们应在稍微高一点的 S 上应用边界条件，从而略微降低期权价值。

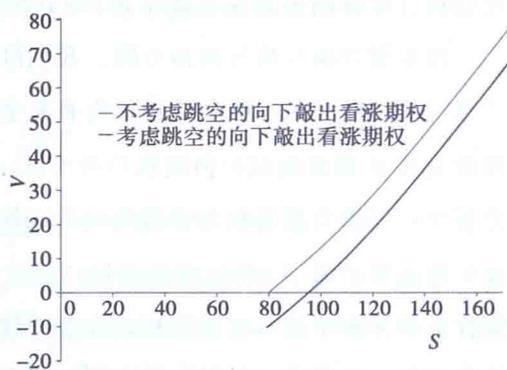


图 23-23 考虑跳空

23.10 总结

在本章中我们介绍了多种障碍期权，以及如何将这些合约放入偏微分方程框架进行分析。许多合约有简单的定价公式。遗憾的是，这些合约的极端属性使得在实际中进行对冲十分困难，它们可能对标的资产的波动率非常敏感。更糟糕的是，如果合约的 Gamma 的符号是会改变的，使用不恰当的波动率是非常危险的。在业界看来最方便的方法是可交易的普通期权来静态对冲障碍合约，并用完整的隐含波动率曲面来为残差定价。将两个原则结合使用是很关键的。如果有人使用波动率曲面而不使用静态对冲可能会使情况变得更糟；普通期权隐含的波动率曲面定出的障碍期权价格可能是很不准确的。用普通期权静态对冲障碍期权，然后用一个单一的波动率对障碍期权进行定价，其危险性会稍小但仍称不上不理想。如果两者同时使用，那么定价过程将具有一定的一致性。

③ 在第 48 章中有更详细的介绍。

拓展阅读 障碍期权

- 许多障碍期权的定价公式来自 Reiner 和 Rubinstein (1991)。
- 上述公式在 Taleb (1997) 和 Haug (1998) 中有解释。Taleb 深入讨论了障碍期权的细节，包括对冲的现实性，我只是略有涉及。
- Carr (1995) 的文章包含了大量的文献回顾以及对受保护障碍期权和彩虹障碍期权的详细讨论。
- 对利用普通期权静态复制障碍期权的全面描述，可参考 Derman、Ergener 和 Kani (1997)。
- 要了解看跌 - 看涨对称性的更多细节，可参考 Carr (1994)。
- 对于依赖两种标的资产的障碍期权的定价，可参考 Haug (2002)。
- 更多的闭式解可以在 Banerjee (2003) 中找到。

附录 23A 更多的公式

在下面我使用 $N(\cdot)$ 来代表标准正态分布的累积概率分布函数。股票的红利率或外汇的利率以 q 表示。同时

$$a = \left(\frac{S_b}{S}\right)^{-1+(2(r-q)/\sigma^2)}$$

$$b = \left(\frac{S_b}{S}\right)^{1+(2(r-q)/\sigma^2)}$$

这里 S_b 是障碍位置（到底用 S_u 或 S_d 在示例中很明显），

$$d_1 = \frac{\log(S/E) + (r - q + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}$$

$$d_2 = \frac{\log(S/E) + (r - q - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}$$

$$d_3 = \frac{\log(S/S_b) + (r - q + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}$$

$$d_4 = \frac{\log(S/S_b) + (r - q - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}$$

$$d_5 = \frac{\log(S/S_b) - (r - q - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}$$

$$d_6 = \frac{\log(S/S_b) - (r - q + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}$$

$$d_7 = \frac{\log(SE/S_b^2) - (r - q - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}$$

$$d_8 = \frac{\log(SE/S_b^2) - (r - q + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}$$



向上敲出看涨期权

$$Se^{-q(T-t)}(N(d_1) - N(d_3) - b(N(d_6) - N(d_8))) \\ - Ee^{-r(T-t)}(N(d_2) - N(d_4) - a(N(d_5) - N(d_7)))$$

向上敲入看涨期权

$$Se^{-q(T-t)}(N(d_3) + b(N(d_6) - N(d_8))) \\ - Ee^{-r(T-t)}(N(d_4) + a(N(d_5) - N(d_7)))$$

向下敲出看涨期权

(1) $E > S_b$:

$$Se^{-q(T-t)}(N(d_1) - b(1 - N(d_8))) - Ee^{-r(T-t)}(N(d_2) - a(1 - N(d_7)))$$

(2) $E < S_b$:

$$Se^{-q(T-t)}(N(d_3) - b(1 - N(d_6))) - Ee^{-r(T-t)}(N(d_4) - a(1 - N(d_5)))$$

向下敲入看涨期权

(1) $E > S_b$:

$$Se^{-q(T-t)}b(1 - N(d_8)) - Ee^{-r(T-t)}a(1 - N(d_7))$$

(2) $E < S_b$:

$$Se^{-q(T-t)}(N(d_1) - N(d_3) + b(1 - N(d_6))) \\ - Ee^{-r(T-t)}(N(d_2) - N(d_4) + a(1 - N(d_5)))$$

向下敲出看跌期权

$$- Se^{-q(T-t)}(N(d_3) - N(d_1) - b(N(d_8) - N(d_6))) \\ + Ee^{-r(T-t)}(N(d_4) - N(d_2) - a(N(d_7) - N(d_5)))$$

向下敲入看跌期权

$$- Se^{-q(T-t)}(1 - N(d_3) + b(N(d_8) - N(d_6))) \\ + Ee^{-r(T-t)}(1 - N(d_4) + a(N(d_7) - N(d_5)))$$

向上敲出看跌期权

(1) $E > S_b$:

$$-Se^{-q(T-t)}(1 - N(d_3) - bN(d_6)) + Ee^{-r(T-t)}(1 - N(d_4) - aN(d_5))$$

(2) $E < S_b$:

$$-Se^{-q(T-t)}(1 - N(d_1) - bN(d_8)) + Ee^{-r(T-t)}(1 - N(d_2) - aN(d_7))$$

向上敲入看跌期权

(1) $E > S_b$:

$$-Se^{-q(T-t)}(N(d_3) - N(d_1)) + bN(d_6) + Ee^{-r(T-t)}(N(d_4) - N(d_2) + aN(d_5))$$

(2) $E < S_b$:

$$-Se^{-q(T-t)}bN(d_8) + Ee^{-r(T-t)}aN(d_7)$$

下面的图(图 23-24~图 23-35)给出了上述每一种障碍期权以及相应普通看涨期权的价格。

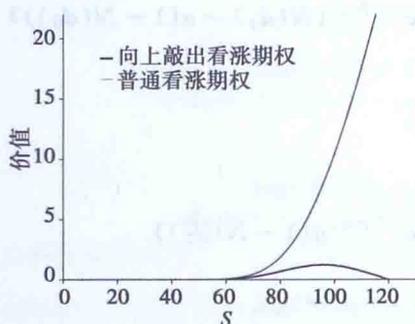


图 23-24 向上敲出看涨期权。 $\sigma=0.2$, $r=0.05$, $q=0$, $E=100$, $T=1$ 和 $S_b=120$

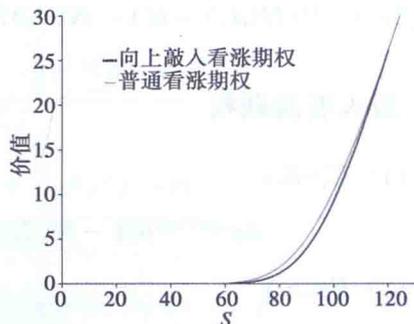


图 23-25 向上敲入看涨期权。 $\sigma=0.2$, $r=0.05$, $q=0$, $E=100$, $T=1$ 和 $S_b=120$

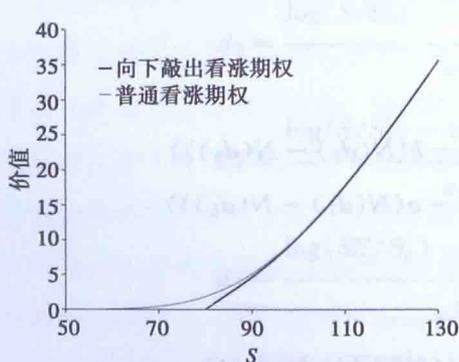


图 23-26 向下敲出看涨期权。 $\sigma=0.2$, $r=0.05$, $q=0$, $E=100$, $T=1$ 和 $S_b=80$

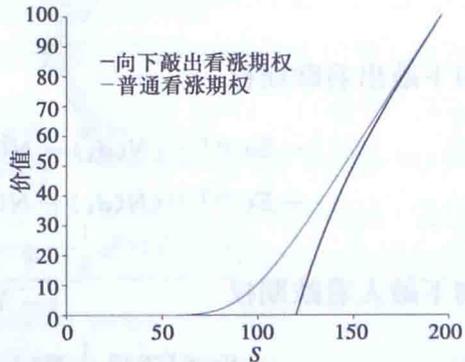


图 23-27 向下敲入看涨期权。 $\sigma=0.2$, $r=0.05$, $q=0$, $E=100$, $T=1$ 和 $S_b=120$

要注意的是,对于敲出期权来说障碍期权的价值“拥抱”普通期权的价值,只有在障碍处为0。对于敲入期权来说,障碍期权的价值“拥抱”0,只有在障碍处等于普通期权的价值。

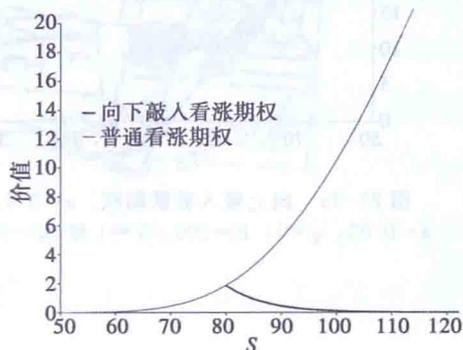


图 23-28 向下敲入看涨期权。 $\sigma=0.2$, $r=0.05$, $q=0$, $E=100$, $T=1$ 和 $S_b=80$

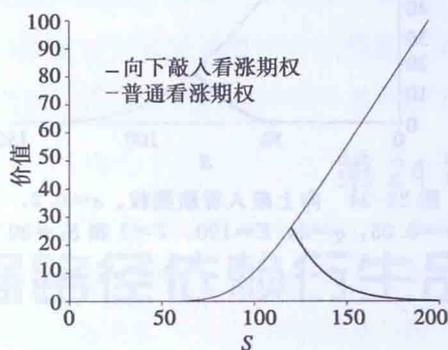


图 23-29 向下敲入看涨期权。 $\sigma=0.2$, $r=0.05$, $q=0$, $E=100$, $T=1$ 和 $S_b=120$

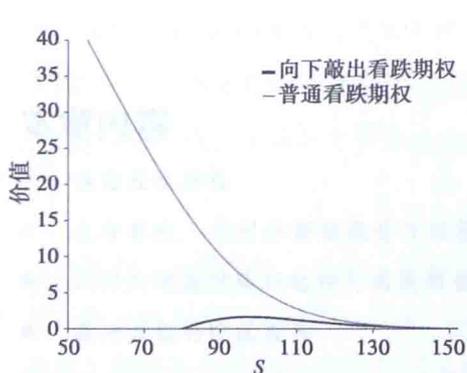


图 23-30 向下敲出看跌期权。 $\sigma=0.2$, $r=0.05$, $q=0$, $E=100$, $T=1$ 和 $S_b=80$

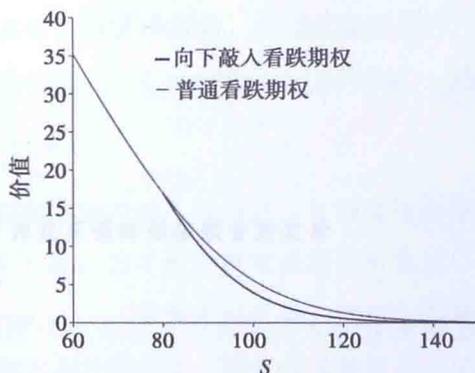


图 23-31 向下敲入看跌期权。 $\sigma=0.2$, $r=0.05$, $q=0$, $E=100$, $T=1$ 和 $S_b=80$

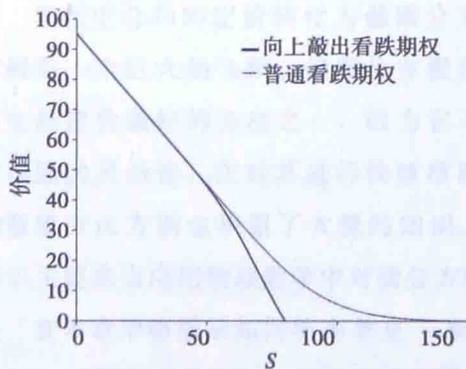


图 23-32 向上敲出看跌期权。 $\sigma=0.2$, $r=0.05$, $q=0$, $E=100$, $T=1$ 和 $S_b=80$

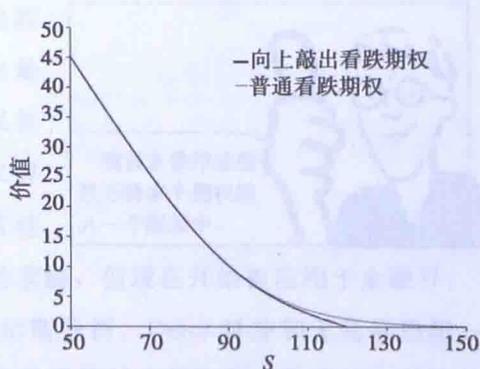


图 23-33 向上敲入看跌期权。 $\sigma=0.2$, $r=0.05$, $q=0$, $E=100$, $T=1$ 和 $S_b=120$

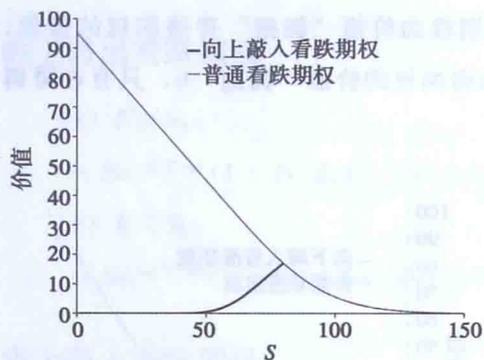


图 23-34 向上敲入看跌期权。 $\sigma=0.2$, $r=0.05$, $q=0$, $E=100$, $T=1$ 和 $S_b=80$

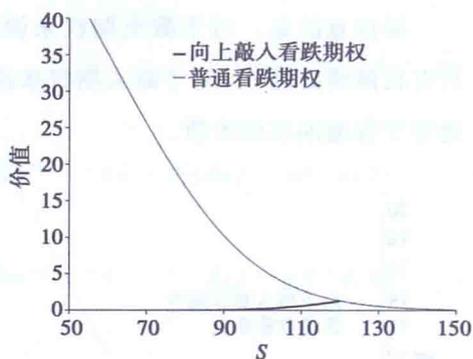


图 23-35 向上敲入看跌期权。 $\sigma=0.2$, $r=0.05$, $q=0$, $E=100$, $T=1$ 和 $S_b=120$

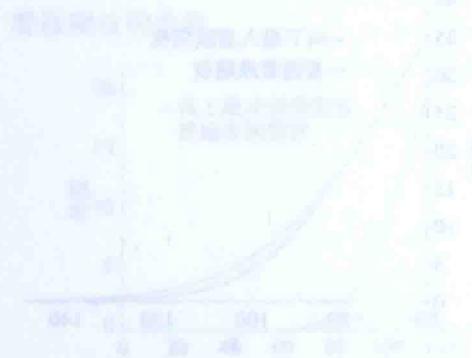


图 23-36 向上敲入看涨期权。 $\sigma=0.2$, $r=0.05$, $q=0$, $E=100$, $T=1$ 和 $S_b=80$



图 23-37 向上敲入看涨期权。 $\sigma=0.2$, $r=0.05$, $q=0$, $E=100$, $T=1$ 和 $S_b=120$

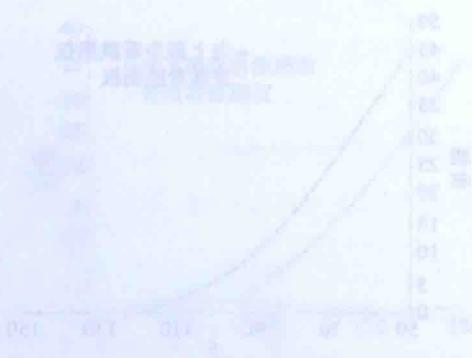


图 23-38 向下敲入看涨期权。 $\sigma=0.2$, $r=0.05$, $q=0$, $E=100$, $T=1$ 和 $S_b=80$



图 23-39 向下敲入看涨期权。 $\sigma=0.2$, $r=0.05$, $q=0$, $E=100$, $T=1$ 和 $S_b=120$



第 24 章

强路径依赖衍生品

本章内容

- 强路径依赖性
- 在布莱克 - 斯科尔斯偏微分方程框架下为众多强路径依赖合约定价
- 如何处理连续路径抽样与离散路径抽样
- 微分方程的跳跃条件

24.1 引言

将衍生合约的定价转化为偏微分方程的求解是一个巨大的飞跃。偏微分方程方法是衍生品定价最好的方法之一，因为它不仅具有很强的灵活性，在对其进行快速准确求解的数值方法方面也积累了大量的知识。这些知识主要来自应用物理数学中对微分方程的求解，但现在开始被应用于金融界。

在本章中将展示如何将布莱克 - 斯科尔斯分析、Delta 对冲和无套利思想一般化，以便为更多的衍生合约尤其是那些强路径依赖合约定价。我会对理论进行简要的介绍，偶尔给出简单的例子，但把在特定合约中的具体应用留待后续章节。



24.2 用积分形式表示的路径依赖量

想象一份合约在到期时刻 T 支付回报，其大小是标的资产价格从 0 时刻至到期时刻所通过路径的函数。假设这个路径依赖量可以用标的资产价格的某个函数从 0 时刻至 T 时刻的积分的形式来表示

$$I(T) = \int_0^T f(S, \tau) d\tau$$

这并不是一个很强的假设；事实上大多数奇异衍生合约的路径依赖量，如平均值，在合适的 $f(S, t)$ 选择下都能写成这种形式。

因此我们假设在 $t=T$ 时回报的形式为

$$P(S, I)$$

在到期前我们可以从 S 的现值（在时刻 t ）的大小了解到 S 的终值（在时刻 T ）可能取值的信息。例如今天的 S 值越高，则到期时的 S 值可能也会越高。类似地，到今天为止的积分值含有 I 的终值的信息。前者的计算式为

$$I(t) = \int_0^t f(S, \tau) d\tau \quad (24-1)$$

越是接近到期日，我们对 I 的终值便越有信心。

因此可以想象期权价值不仅仅是 S 和 t 的函数，也是 I 的函数； I 将成为一个新的自变量，称为状态变量 (state variable)。在下一节中我们将看到如何从该视角出发推导定价方程。可以预计我们将会使用伊藤引理，因此需要知道 I 所满足的随机微分方程。这再简单不过了。在式 (24-1) 中再增加 dt 的时间增量，可以发现

$$dI = f(S, t) dt \quad (24-2)$$

图 24-1 展示了这个明显的结论。

可以看到 I 是一个平滑的函数（除了在 f 的不连续点），从式 (24-2) 中也可看出它的随机微分方程不包含随机项。

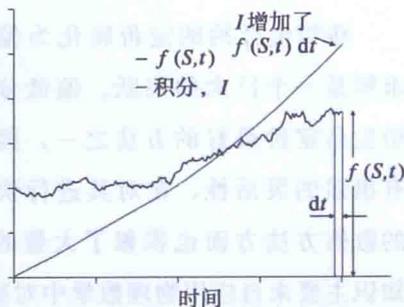


图 24-1 I 的增量

示例

亚式期权的回报取决于某段时期内标的资产价格的平均值。如果是从 0 时刻



至到期日的算术平均，那么可以引入

$$I = \int_0^t S d\tau$$

回报的可能形式为

$$\max\left(\frac{I}{T} - S, 0\right)$$

这是一份平均执行价看跌期权，后面会进行详细介绍。

如果是几何平均，则引入

$$I = \int_0^t \log(S) d\tau$$

另一个例子，想象一份合约的回报与标的资产价格保持在某个水平之上的时间长度有关。这里可以引入

$$I = \int_0^t \mathcal{H}(S - S_u) d\tau$$

其中 $\mathcal{H}(\cdot)$ 为海维塞函数。

再增加一些变化：假设合约的回报不仅取决于标的资产价格保持在某个水平之上的时间长度，还取决于资产价格的平方。取

$$I = \int_0^t S^2 \mathcal{H}(S_u - S) d\tau$$

那么期权价格将是 S 、 I 和 t 的函数。

后面我们将看到有多少奇特的期权回报可以通过这样的积分形式重新表述。现在我们已经做好了为其中一些期权定价的准备。

24.3 连续抽样：定价方程

我们来推导为回报形式为新变量 I 函数的合约定价的偏微分方程。现在合约的价值是三个变量的函数， $V(S, I, t)$ 。构建一个包含一单位路径依赖期权多头和 Δ 单位标的资产空头的组合

$$\Pi = V(S, I, t) - \Delta S$$

组合价值的瞬时改变量为

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt + \frac{\partial V}{\partial I} dI + \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta\right) dS$$

选择

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$$

以对冲风险，并将式 (24-2) 代入，可以得到

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + f(S, t) \frac{\partial V}{\partial I} \right) dt$$

该改变量是无风险的，因此将赚取无风险利率 r ，据此可以得到定价方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + f(S, t) \frac{\partial V}{\partial I} \\ + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \end{aligned} \quad (24-3)$$



约束条件为

$$V(S, I, T) = P(S, I)$$

至此定价问题的构建便完成了。针对标的资产付红利的情形需要进行修改是显而易见的。

示例

继续算术平均亚式期权的例子，我们有

$$I = \int_0^t S d\tau$$

因此待解方程为

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + S \frac{\partial V}{\partial I} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

24.4 用更新规则重新表示路径依赖量

由于实务及法律方面的原因，现实中路径依赖量都不是连续测量的。在对路径依赖量抽样时会有一个最小步长。这个步长可能较小，比如一天或更长。从实务角度看，将每一个成交价都纳入平均值的计算是很难的。数据可能不可信，可能无法准确获知每个交易发生的确切时间。从法律角度看为了避免在路径依赖量具体取值上的分歧，通常只使用关键价格，比



如收盘价。从某种意义上讲这样可以保证所用的价格是真实成交价。如果抽样时间间隔较小，我们可以认为使用连续抽样模型的误差是比较小的。如果抽样时间间隔较长，或者距离到期日的时间本身就很短，我们就需要将抽样时间间隔纳入建模当中。这将是本节要完成的任务。

我在这里引入更新规则 (updating rule) 的概念，这是一个用当前的“世界状态”来定义路径依赖量的算法。在抽样日 t_i 测量路径依赖量，其在 $t_i \leq t < t_{i+1}$ 内的取值均为 I_i 。在抽样日 t_i ，数量 I_{i-1} 将基于某个规则进行更新，比如说

$$I_i = F(S, (t_i), I_{i-1}, i)$$

要注意的是在这个最简单的例子中 (也可以一般化)， I 的新值是如何仅由 I 的旧值、抽样日标的资产价格和抽样日期所决定的。这个更新规则取代了我们在连续抽样情形下采用的积分表达式。更新规则 (或积分) 跟回报函数一起有效地定义了我们所讨论的奇异期权。

后续遇到具体例子时，我可能会改变符号并使用有含义的变量名，希望不会造成混淆。

示例

这里已经介绍过如何使用连续积分来为亚式期权定价。但是如果积分被离散的求和式取代会怎样？在实务中，亚式期权的回报取决于统计量

$$I_M = \sum_{k=1}^M S(t_k)$$

其中， M 是抽样日的总数。这是一个离散样本和。可以考察更自然的统计量是

$$A_M = \frac{I_M}{M} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M S(t_k) \quad (24-4)$$

因为此时离散抽样的算术平均执行价看跌期权的回报可以写成

$$\max(A_M - S, 0)$$

可以将式 (24-4) 写成更新规则的形式吗？可以的。这很简单：如果令

$$A_i = \frac{1}{i} \sum_{k=1}^i S(t_k)$$

则

$$A_1 = S(t_1), A_2 = \frac{S(t_1) + S(t_2)}{2} = \frac{1}{2} A_1 + \frac{1}{2} S(t_2)$$

$$A_3 = \frac{S(t_1) + S(t_2) + S(t_3)}{3} = \frac{2}{3}A_2 + \frac{1}{3}S(t_3), \dots$$

或一般地

$$A_i = \frac{1}{i}S(t_i) + \frac{i-1}{i}A_{i-1}$$

在下一节中我们会看到如何使用它来进行定价。但首先，我们再看一个例子。

回溯期权的回报取决于已实现资产价格的最大或最小值。如果回报取决于时刻 t_i 为止抽样的最大值，那么

$$I_1 = S(t_1), I_2 = \max(S(t_2), I_1), I_3 = \max(S(t_3), I_2) \dots$$

更新规则就是

$$I_i = \max(S(t_i), I_{i-1})$$

对回溯期权的详细介绍将放在第 26 章，那里我们用符号 M_i 表示最小值或最大值。

在衍生品定价中我们要如何使用这些更新规则呢？

24.5 离散抽样：定价方程

与连续抽样的情况类似，可以预期期权价值是三个变量的函数， $V(S, I, t)$ 。我们用一种启发式的方式来推导定价方程。推导过程可以做得更加严谨，但并无很大的必要，因为结论是正确且明显的。

推导过程的第一步是观察到 I 的随机微分方程退化为

$$dI = 0$$

这是由于变量 I 只能在一些离散的日子 t_i 发生改变。上式对于任何满足 $t \neq t_i$ 的 i 均成立。因此只要不是在抽样日 I 都是常数， I 的随机微分方程反映了这一点，定价方程就是基本的布莱克 - 斯科尔斯方程：

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

尽管如此，要牢记 V 仍然是三个变量的函数， I 实际上被作为参数处理。

方程如何体现路径依赖性？在抽样日发生了什么？

后一问题的答案也回答了前一个问题。跨越抽样日时不能有什么变化。期权价值在跨越抽样日时保持不变。根据更新规则，距离抽样日期越来越远时我们对于 I 的取值会越来越确定。由于抽样日的结果是已知的，并且没有现金易手，因

此期权价值不会发生任何跳跃。这是无套利原则的一项简单应用。

跨越抽样日时期权价值是连续的。如果引入符号 t_i^- 表示抽样日 t_i 之前的瞬间， t_i^+ 表示抽样日之后的瞬间，那么期权价值连续性的数学表达为

$$V(S, I_{i-1}, t_i^-) = V(S, I_i, t_i^+)$$

以更新规则的形式，则有

$$V(S, I, t_i^-) = V(S, F(S, I, i), t_i^+)$$

该式被称作跳跃条件 (jump condition)。

尽管此情况下不存在跳跃，但我们仍称为跳跃条件 (如果某时刻的确发生了现金易



手，则在那个时刻期权价值会发生突然变动，正如第 22 章讨论的那样)。如果实时跟踪 S 的路径，我们将看到它是连续的。但是 I 的路径是不连续的。在跨越抽样日时 I 会发生一个确定性的跳跃。如果将 V 作为 S 和 I 的函数，画出其在抽样日期前后瞬间的图像，我们将发现对于固定的 S 和 I ，期权价值可能是不连续的。但该图像需要正确的解读； $V(S, I, t)$ 作为 S 和 I 的函数或许不连续，但对于 S 和 I 的每一条已实现路径来说 V 都是连续的。

图 24-2 中 I 展示了抽样日前后期权价值的关系。

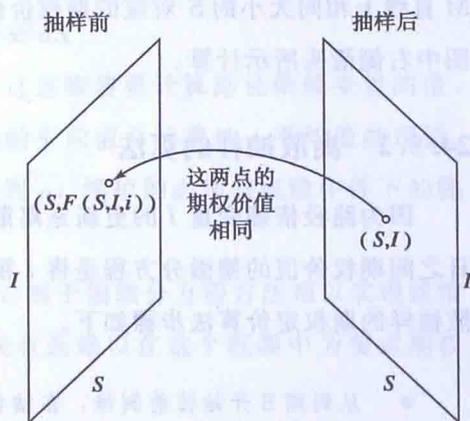


图 24-2 跳跃条件的表示

24.5.1 示例

为给 t_i 时点取样计算平均值的算术平均亚式期权定价，需求解布莱克 - 斯科尔斯方程以得到 $V(S, A, t)$ ，约束条件为

$$V(S, A, t_i^-) = V\left(S, \frac{i-1}{i}A + \frac{1}{i}S, t_i^+\right)$$

和一个代表回报的合适的终值条件。

为给 t_i 时点抽样，回报依赖于样本点最大值的回溯期权定价，需求解布莱克 - 斯科尔斯方程以得到 $V(S, M, t)$ ，约束条件为

$$V(S, M, t_i^-) = V(S, \max(S, M), t_i^+) \quad (24-5)$$

图 24-3 展示了如何使用该跳跃条件。右上方的图像是刚刚进行了最大值抽

样之后的 S 、 M 平面。由于抽样刚刚完成，因此区域 $S > M$ 是无法到达的；这就是标有“不可达”的区域。在第六部分中用数值方法求解布莱克 - 斯科尔斯方程时我们将看到如何在时间上进行倒推，因此我们是先得到时刻 t_i^+ 的期权价值，再得到时刻 t_i^- 的期权价值。因此对于所有的 $S < M$ 都可以计算出期权价值 $V(S, M, t_i^+)$ 。为得到抽样之前瞬间的期权价值，必须使用跳跃条件式 (24-5)。从图上看，这意味着对于 $S < M$ ，时刻 t_i^- 的期权价值与时刻 t_i^+ 的期权价值相等，按照图中左侧箭头所示计算即可。

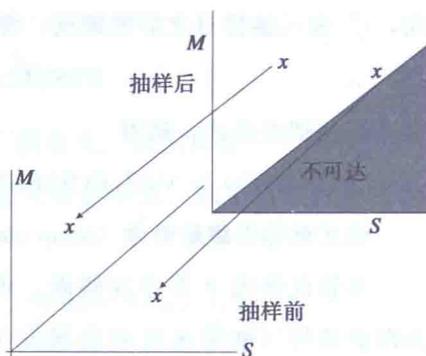


图 24-3 回溯期权的跳跃条件

然而，对于 $S > M$ （在抽样进行前是可达区域），期权价值要等于时刻 t_i^+ 时 $S = M$ 直线上相同大小的 S 对应的期权价值；归根结底 S 是连续的。这时，只需按照图中右侧箭头所示计算。

24.5.2 离散抽样的算法

因为路径依赖变量 I 的更新是离散的，在抽样日之间它是常数，因此在抽样日之间期权价值的偏微分方程是将 I 视为参数的布莱克 - 斯科尔斯方程。基于离散抽样的期权定价算法步骤如下。

- 从到期日开始往前倒推，在抽样日期之间求解方程

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

（如何求解将在第六部分进行介绍）。当到达抽样发生的时间步长点时停止。

- 然后对当前的取样日应用合适的跳跃条件，根据取样刚结束那个时点的期权价值来推导取样日前那一瞬间的期权价值，并将此值作为布莱克 - 斯科尔斯方程在前一时间步长的终值条件。
- 根据需要重复上述步骤，以得到当前的期权价值。

24.6 更高维数

上述方法并不限于单个路径依赖变量的情况。理论上任何有限数量的路径依赖变量都可以纳入该框架。想象一份合约的回报基于连续抽样几何平均与连续抽

样算术平均的差。为其定价需引入 I_g 和 I_a ，定义为

$$I_g = \int_0^t \log(S) d\tau \text{ 和 } I_a = \int_0^t S d\tau$$

期权价值的解将是 4 个变量的函数， $V(S, I_g, I_a, t)$ 。然而，这是实务中偏微分方程数值求解的极限。除非可以利用相似性降维，否则还是考虑使用蒙特卡罗模拟更好一些。

相同的思路也适用于离散抽样或离散连续混合抽样。

24.7 期望定价法

第 10 章我介绍了在布莱克 - 斯科尔斯世界中如何通过风险中性随机过程下期望回报的现值来为期权定价。这一方法完美应用于已介绍或将要介绍的所有路径依赖期权。正如第 80 章要讨论的那样，只需要对随机过程

$$dS = rSdt + \sigma SdX$$

模拟许多条路径，计算每条路径的回报——这意味着要计算路径依赖变量的值，这通常是很容易的——然后取所有路径回报的平均值并计算这一平均值的现值。这就是期权的公平价值。注意其中没有牵涉到 μ ，模拟的必须是风险中性下的随机过程。

这是一个非常一般化且功能强大的技术，对于偏微分方程方法难以实现或维度太高的路径依赖期权非常有用。唯一的缺点是难以在这个框架中为美式期权定价。

24.8 提前执行

如果已经找到了期权问题的偏微分方程公式，将美式期权或百慕大期权的提前执行特征纳入框架是很简单的。只需要应用约束条件

$$V(S, I, t) \geq P(S, I)$$

和期权 Delta 的连续性，其中 $P(S, I)$ 是回报函数（可以是时变的）。将此条件应用在所有可以提前执行的时点。如果找到了期权问题的偏微分方程公式并且维数足够低，那么在数值求解过程中考虑提前执行也就是在代码中添加几行的问题，见第 78 章。

24.9 总结

上面介绍了在偏微分方程框架中为多种路径依赖合约定价的基本理论。我们既考察了连续抽样路径依赖变量，又考察了离散抽样路径依赖变量。在接下来几章中将对此进行更详细的讨论，首先对亚式期权和回溯期权，然后对范围更广的奇异合约。这些模型的实际实施将在第 78 章中介绍。

拓展阅读

- 对在偏微分方程框架下对路径依赖合约定价的早期工作，可参考 Bergman (1985)。
- Ingersoll (1987) 是一本极好的书，也讨论了奇异期权定价的偏微分方程方法。
- Dewynne 和 Willmott (1994a) 及 Dewynne 和 Willmott (1996) 在《风险》杂志上的文章描述了奇异期权分析的一般框架。



第25章

亚式期权

本章内容

- 回报依赖于平均值的多种亚式期权
- 用于定义回报的资产价格的不同平均值类型
- 如何在偏微分方程框架下为这些合约定价

25.1 引言

亚式期权给予持有人的回报取决于标的资产价格在某预定时段中的平均值。与类似的普通合约相比，对标的资产价格取平均显著降低了亚式期权的价格。具有可以降低事先支付的期权费的条款往往都会使期权的交易更加活跃。

- 一段时间股价的平均值的波动率低于股价的波动率。这通常会导致亚式期权的价格低于同等的普通期权。
- 平均值较少受股价突然暴跌暴涨的影响。如果拥有的是一个亚式看涨期权，那么恰好在到期日前的股价暴跌不会造成任何损失。
- 同单一股价相比，一段时间内的平均数更难操纵。亚式期权显然可以用在易于操纵、交易量小的标的资产上。

- 如果在长时间内具有连续且高度可预测的风险暴露，那么可以用平均标的价格期权来锁定商品价格或汇率。
- 商品或能源的终端用户常常会面临一段较长时间中平均价格的风险暴露，因此亚式期权具有明显的吸引力（亚式期权常常被认为是原油市场中的普通期权）。

具有一系列外币现金流的人（比如说出口商）可能会购买亚式期权，他们希望对冲掉汇率的波动。稍后会见到的亚式尾部期权被设计用来减小到期日前标的资产价格突然变动的风险暴露；一些养老金计划具有这样的特征。亚式期权首次成功定价由美国信孚银行的大卫·斯波顿和马克·斯坦迪什在1987年完成。他们开发出原油价格平均值期权的第一个商用定价公式是在东京。除此之外，形容词“亚式”没有其他含义。

本章中将给出为各种亚式期权定价的微分方程。价格的“平均值”的定义方式很多，我们将从最明显的可能选择开始讨论。我们将看到如何把价格写为三变量偏微分方程的解，这三个变量为：标的资产、时间和一个表示平均值演变的新状态变量。

25.2 回报类型

假定现在已经定义了平均值 A ，哪些回报形式是最常见的？除了看涨、看跌等的分类外，也有对平均对象是执行价（strike）还是标的价格（rate）的分类。这些分类如下所示。比如普通看涨期权的回报为

$$\max(S - E, 0)$$

将执行价 E 替换为平均值就成为了平均执行价看涨期权（average strike call），回报为

$$\max(S - A, 0)$$

而平均执行价看跌期权（average strike put）的回报为

$$\max(A - S, 0)$$

将普通期权回报中的标的资产价格替换为其平均值，就得到了标的价格期权。比



如，平均标的价格看涨期权（average rate call）的回报为

$$\max(A - E, 0)$$

平均标的价格看跌期权（average rate put）的回报为

$$\max(E - A, 0)$$

如果面临一段较长时间中连续且高度可预测的商品价格或汇率的风险暴露，可以使用平均标的价格期权来锁定价格。

从定价角度来说看涨期权与看跌期权的区别是简单的，但执行价/标的价格是一个较大的区别。执行价期权更容易用数值方法求解。

25.3 平均值的类型

要准确定义亚式合约中使用的平均值依赖于两个因素：数据点是如何组合为平均值的和使用哪些数据点。前者指的是要使用算术平均、几何平均还是其他更复杂的平均，后者指的是在计算平均值时要使用多少数据点，是使用全部报价还是只使用一个子集，以及针对哪个时段。



25.3.1 算术还是几何

两种最简单常见的平均值类型是算术平均（arithmetic average）和几何平均（geometric average）。价格的算术平均是将所有价格等权重加和，再除以所使用的价格的总数目。价格的几何平均是将所有价格的对数等权重加和，除以所使用的价格的总数目，再取指数。另一种常见选择是指数加权平均，意思是在计算平均值时价格之间不是等权重的，而是以指数递减的方式对新的价格赋予比旧的价格更高的权重。

25.3.2 离散还是连续

计算平均值时要使用多少数据？是使用全部的成交价还是只使用一个子集？如果使用的是一段有限时间内紧密排列的价格，那么在计算平均值的过程中使用的和式就是资产价格（或其函数）在该时间段的积分。这样得到的是连续抽样平均（continuously sampled average）。更常见的情况是我们只使用一些可靠的数据

点，比如收盘价这种更小的数据集合。这称为离散抽样（discrete sampling）。连续或离散抽样的问题已经在前一章中讨论过了。

25.4 求解方法

同以前一样，在实际定价时我们希望在蒙特卡罗模拟和偏微分方程方法当中进行选择。二者各有优点和缺点。

蒙特卡罗模拟

果壳中的秘密：

- 期权价值是在风险中性随机过程下回报期望值的现值。

定价算法具体如下。

(1) 以今天的价格水平为起点，模拟资产价格在要求的时间范围内的风险中性随机过程。这样可以得到标的资产价格的一条实现路径。

(2) 基于这条实现路径计算期权的回报。

(3) 在要求的时间范围内模拟更多的实现路径。

(4) 计算全部实现路径的平均回报。

(5) 计算该平均回报的现值，即为期权价值。

1. 蒙特卡罗模拟的优点

- 编程很简单。
- 编程中不易犯错。

2. 蒙特卡罗模拟的缺点

- 要得到希腊字母需要更多的工作。
- 计算过程可能会很慢，因为要得到精确解需要进行上万次模拟。

后面几节我们将讨论偏微分方程方法。但在此之前，先来看看它的优点。

3. 偏微分方程方法的优点

- 比蒙特卡罗模拟快。
- 更灵活，比如说允许使用更高级的波动率模型。
- 对提前执行处理较好。

4. 偏微分方程途径的缺点

- 编程比蒙特卡罗模拟要难。

25.5 扩展布莱克 - 斯科尔斯方程

25.5.1 连续抽样平均

图 25-1 给出了资产价格随机过程的一条已实现路径及其连续抽样的算术移动平均值, 对象为 YPF, 一家阿根廷石油公司。

该平均值定义为

$$\frac{1}{t} \int_0^t S(\tau) d\tau$$

如果引入新的状态变量

$$I = \int_0^t S(\tau) d\tau$$

那么按照第 24 章的分析, 与该平均值有关的期权价格的偏微分方程为

$$\frac{\partial V}{\partial t} + S \frac{\partial V}{\partial I} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

图 25-2 给出了资产价格随机过程的一条已实现路径及连续抽样的几何移动平均值。

其中连续抽样几何平均值的定义为

$$\exp\left(\frac{1}{t} \int_0^t \log S(\tau) d\tau\right)$$

为对依赖这一平均值的期权定价, 我们定义

$$I = \int_0^t \log S(\tau) d\tau$$

再次遵循第 24 章的分析, 该期权价格的偏微分方程为

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \log S \frac{\partial V}{\partial I} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

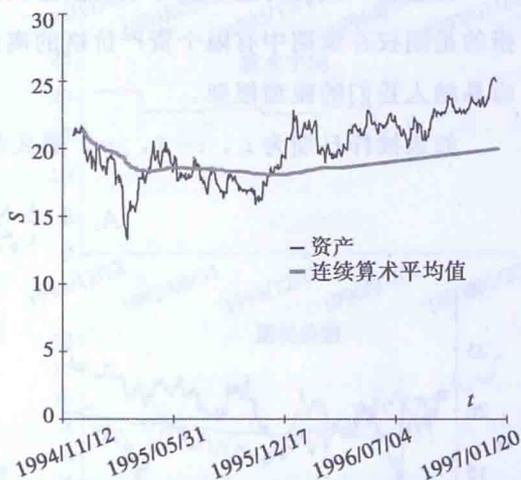


图 25-1 资产价格一条随机路径及其连续测量的算术移动平均值

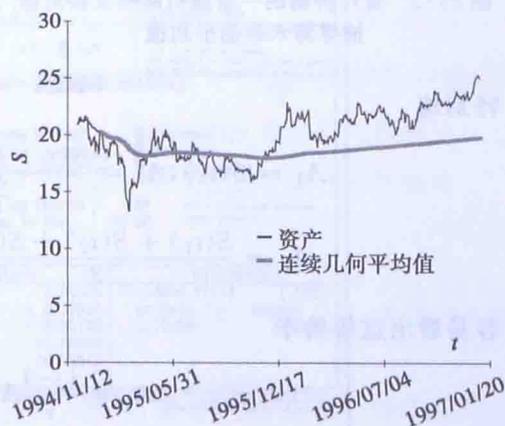


图 25-2 资产价格的一条随机路径及其连续测量的几何移动平均值

25.5.2 离散抽样平均值

离散抽样平均值，不管是算术平均还是几何平均，都很容易纳入第 24 章建立的框架中。图 25-3 和图 25-4 分别给出了资产价格已实现路径与对应的离散抽样算术平均和几何平均的例子。

在上面，我们将连续抽样平均值建模为积分形式。但提到离散抽样平均我们指的是期权存续期中有限个资产价格的离散和，而非积分。这样定义的平均值很容易纳入我们的模型框架。

如果抽样日期为 $t_i, i=1, \dots$ ，那么离散抽样几何平均值的定义为

$$A_i = \frac{1}{i} \sum_{k=1}^i S(t_k)$$

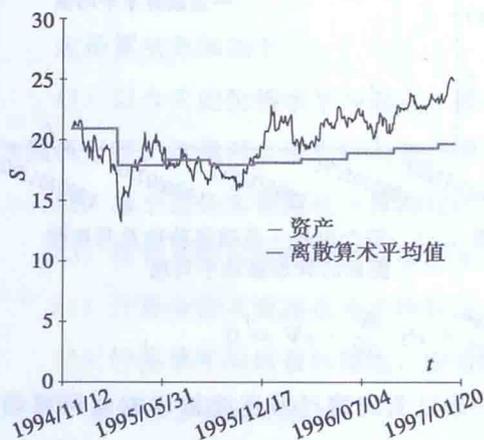


图 25-3 资产价格的一条随机路径及其离散抽样算术移动平均值

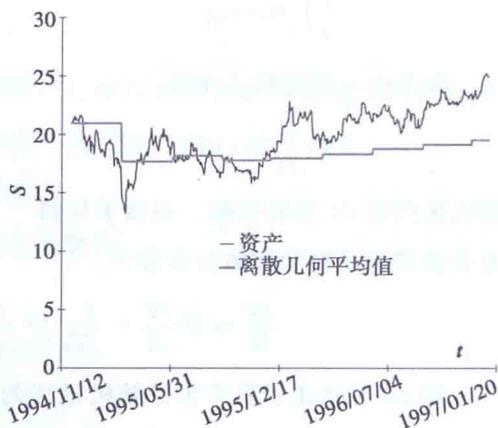


图 25-4 资产价格的一条随机路径及其离散抽样几何移动平均值

特别地

$$A_1 = S(t_1), A_2 = \frac{S(t_1) + S(t_2)}{2} = \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{2}S(t_2),$$

$$A_3 = \frac{S(t_1) + S(t_2) + S(t_3)}{3} = \frac{2}{3}A_2 + \frac{1}{3}S(t_3), \dots$$

容易看出这等价于

$$A_i = \frac{i-1}{i}A_{i-1} + \frac{1}{i}S(t_i)$$

图 25-5 最上面给出了资产价格的一条已实现路径。其下方是离散抽样平均值，是分段常数形式的。这幅图的底部是某个期权（究竟是什么无关紧要）的价

值。为避免套利机会出现，该期权的价格肯定是连续的。

使用第24章的结论，离散算术平均的亚式期权的跳跃条件为

$$V(S, A, t_i^-) = V\left(S, \frac{i-1}{i}A + \frac{1}{i}S, t_i^+\right)$$

这是由跨越抽样日时期权价格的连续性或者说无套利导致的。

离散抽样几何平均值的跳跃条件为

$$V(S, A, t_i^-) = V\left(S, \exp\left(\frac{i-1}{i}\log(A) + \frac{1}{i}\log(S)\right), t_i^+\right)$$

因为

$$A_i = \exp\left(\frac{i-1}{i}\log(A_{i-1}) + \frac{1}{i}\log(S(t_i))\right)$$

图25-6和图25-7展示了一份离散抽样的算术平均标的价格看涨合约的细节。

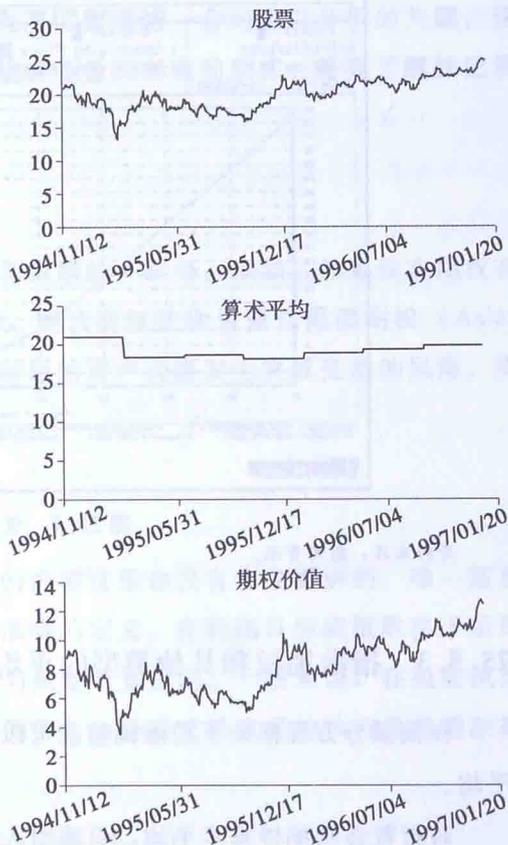


图25-5 上：资产价格的一条随机路径。中：离散抽样算数移动平均值。下：期权价值

Asian Option Valuation				Page 1/2	
LLY	US	LILLY (ELT) & CO	Currency: USD		
Price of	LLY US Equity 75	Put or Call:	Put	Hit 1 GO for save/send screen	
Strike:	75	100.000% (USD)Rate:	4.812%	Semiannual	Hit 2 GO for notes
Exercise Type:	European	Averaging Method:	Arithmetic	Hit 3 GO for dividends	
Average Rate or Strike:	Rate	Averaging Frequency:	0	Discrete	Hit MENU for exotic option types
Days to Expiration:	90	Averaging Weighting:	Not weighted	Hit PAGE for scenario graph	
Trade Date:	9/ 8/99	Averaging Points:	64	Hit 4 GO to see average price defaults	
Expiration Date:	12/ 7/99	Average So Far:	75.00		
Average Start:	9/ 8/99				
Average End:	12/ 7/99				
Settlement Date:	9/ 8/99				
Exercise Delay:	0				
Option Valuation and Risk Parameters			Dividends		
Value	Percent	Time Value:	2.86309	Dividend Yield	1.15%
Price:	2.86309	7-Day Decay:	0.27837	Ex-Date	Amount
Volatility:	36.000%	Premium:	3.81745	11/10/99	.212USD
Delta:	-0.44002	Parity:	-0.00000		
Gamma:	0.05146	Gearing:	26.19547		
Vega:	0.08406				
Copyright: 1999 BLOOMBERG L.P. Frankfurt: 03-926410 Hong Kong: 2-977-6000 London: 171-330-7500 New York: 212-318-2000					
Princeton: 609-279-3000 Singapore: 226-3000 Sydney: 2-9777-8000 Tokyo: 3-3201-8900 Sao Paulo: 11-3048-4502					
1574-414-0 08-Sep-99 12:31:22					

图25-6 亚式期权计算器及其合约细节

资料来源：彭博资讯。

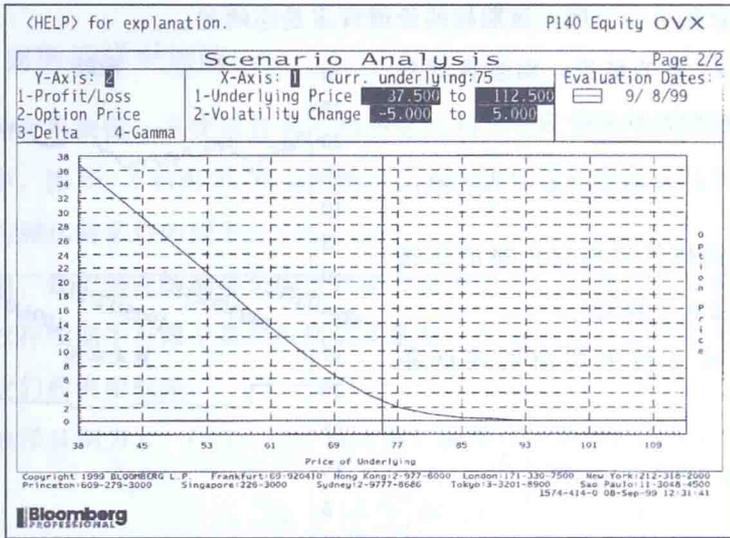


图 25-7 亚式期权价格

资料来源：彭博资讯。

25.5.3 指数加权和其他类型的平均

在偏微分方程框架下稍做调整就可以轻易处理指数平均和到固定时点为止的平均。

对指数连续抽样算术平均，只需引入新变量

$$I = \lambda \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-\tau)} S(\tau) d\tau$$

它满足

$$dI = \lambda(S - I)dt$$

由此出发相应的偏微分方程已经很明显了。几何平均也可做类似处理。

对离散抽样指数平均的情形，读者可自行确定跳跃条件。

当取平均方式为仅计算到某固定时点为止的平均数，比如说回报依赖于

$$I = \int_0^{T_0} S(\tau) d\tau, T_0 < T$$

则在时间超过 T_0 时，偏微分方程中新的一项（对 I 的偏导数）消失了。即

$$\frac{\partial V}{\partial t} + S \mathcal{H}(T_0 - t) \frac{\partial V}{\partial I} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

其中 \mathcal{H} 为海维塞德函数。

一种不易纳入有限数量标的偏微分方程框架的合约是移动窗口期权。在这种

期权中，持有者可以提前执行，获得的回报与执行前3个月（比如说）的标的资产平均价格有关。计算平均值的时间起点不固定是这一合约难以分析的关键。这导致路径依赖量的随机微分方程无法写成自变量局部值的形式：需要了解并记录路径的全部细节。

25.5.4 亚式尾部期权

取平均值的范围常常被限定为期权有效期的一部分。比如，如果仅在期权有效期的最后一段对标的资产价格取平均，则该期权被称为亚式尾部期权（Asian tail）。此类合约可以降低就要收到回报时标的资产价格发生突然变动的风险。类似的特征在退休金计划中也很常见。

25.6 提前执行

关于提前执行，对于本书尚未提及的内容这里也没有多少要讲的。唯一需要提及的是提前执行的回报细节需要得到准确的定义。在到期日的回报取决于至到期日为止的平均值，因此在到期日之前当然是不知道的。一般来说，在提前执行时使用的是到当天为止的平均值。举个例子，一份美式算术平均执行价格看跌期权提前执行的回报为

$$\max\left(\frac{1}{t}\int_0^t S(\tau)d\tau - S, 0\right)$$

25.7 更高维度的亚式期权

我们没有被限制在单个标的资产的平均值。食蚁兽期权（anteater option），[⊖]由于一些显而易见的原因而得名，回报由两种标的资产 S_1 和 S_2 价格比率的平均数来定义

$$I = \int_0^t \frac{S_1}{S_2} d\tau$$

这个合约有4个维度， S_1 、 S_2 、 I 和 t 。

25.8 相似性降维

只要路径依赖量的随机微分方程或更新规则仅包含 S 、 t 及路径依赖量本身，

[⊖] Gunner Wilkins 最喜欢的合约。

那么期权价值便依赖这 3 个变量。除非非常幸运，否则必须用数值方法来计算期权价值。有些期权具有特殊的结构，可以使用相似变量的方法来降低问题的维数。我用一个例子来说明该思路。连续抽样的算术平均执行价格期权的维度可以从 3 维降低到 2 维。



该看涨期权的回报为

$$\max\left(S - \frac{1}{T} \int_0^T S(\tau) d\tau, 0\right)$$

可以将该看涨期权的滚动回报写成

$$I \max\left(R - \frac{1}{t}, 0\right)$$

其中

$$I = \int_0^t S(\tau) d\tau$$

而

$$R = \frac{S}{\int_0^t S(\tau) d\tau} \quad (25-1)$$

到期日的回报可以写成

$$I \max\left(R - \frac{1}{T}, 0\right)$$

从回报函数的形式来看，将期权价值写成下面的形式看来是合理的

$$V(S, R, t) = IW(R, t), \text{ 其中 } R = \frac{S}{I}$$

可发现 W 满足

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 R^2 \frac{\partial^2 W}{\partial R^2} + R(r - R) \frac{\partial W}{\partial R} - (r - R)W \leq 0 \quad (25-2)$$

如果期权是欧式的，则式 (25-2) 是严格等式。如果是美式的则可能为不等式，但必须满足约束条件

$$W(R, t) \geq \max\left(R - \frac{1}{t}, 0\right)$$

此外，如果期权价格在任何时候到达了提前执行的回报，那它必须是平滑到达的。也就是说，函数 $W(R, t)$ 和其对 R 的一阶偏导数必须处处连续。

对于欧式期权我们必须在 $R=0$ 和 $R \rightarrow \infty$ 施加边界条件

$$W(0, t) = 0$$

和

$$W(R, t) \sim R, \text{ 这里 } R \rightarrow \infty$$

欧式问题的解可以用合流超几何函数的无限加和表示。但由于直接使用数值方法求解偏微分方程来得到期权价值会更容易（当然也更灵活），因此我不给出精确解。

图 25-8 展示了在到期日前 3 个月 W 与 R 的关系，三个月的平均值已经计算完成； $\sigma=0.4$ 且 $r=0.1$ 。

对美式期权的情形，需要求解带有限制条件、终值条件和边界条件的偏微分不等式 (25-2)。我们无法得到解析解，因而必须进行数值求解。

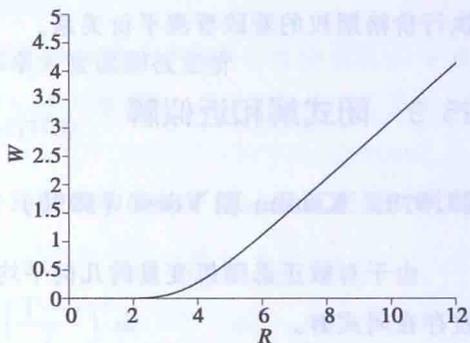


图 25-8 欧式平均执行价格看涨期权；到期日前 3 个月 $\sigma=0.4$ 及 $r=0.1$ 时相似变量 W 与相似变量 R 的关系；3 个月平均值已算出

欧式平均执行价格期权的看跌看涨平价

一个由一单位欧式平均执行价格看涨期权多头和一单位对应看跌期权空头组成的组合在到期时的回报为

$$I \max(R - 1/T, 0) - I \max(1/T - R, 0)$$

无论在到期时 R 和 T 孰高孰低，该回报都等于

$$S - \frac{I}{T}$$

该组合的价值与另一个组合相等，后者由一单位标的资产加上一单位回报为

$$S - \frac{I}{T}$$

的金融产品组成。

要给该产品定价需要找到一个平均执行价格方程的解，其形式为

$$W(R, t) = b(t) + a(t)R \quad (25-3)$$

其中 $a(T)=0$, $b(T)=-1/T$ ；该解的回报即为所要求的 $-I/T$ 。将式 (25-3) 代入式 (25-2) 并考虑边界条件，我们得到

$$a(t) = -\frac{1}{rT}(1 - e^{-r(T-t)}), b(t) = -\frac{1}{T}e^{-r(T-t)}$$

整理可得

$$V_C - V_P = S - \frac{S}{rT}(1 - e^{-r(T-t)}) - \frac{1}{T}e^{-r(T-t)} \int_0^t S(\tau) d\tau$$

其中 V_C 和 V_P 是欧式几何平均执行价格看涨与看跌期权的价值。这就是欧式平均执行价格期权的看跌看涨平价关系。

25.9 闭式解和近似解

25.9.1 Kemna 和 Vorst (1990)

由于对数正态随机变量的几何平均仍为对数正态分布，因而几何平均亚式期权存在闭式解。

这些闭式解表达式与普通看涨看跌期权的公式非常类似，但有两点不一样的地方：

- 波动率要改为 $\sigma/\sqrt{3}$ ；
- 红利率要改为 $D + \sigma^2/6$ 。

25.9.2 Turnbull 和 Wakeman (1991)

算术平均亚式期权的价值不存在简单的闭式解。Turnbull 和 Wakeman 给出的闭式表达式仅为近似式。他们在计算平均数时采用的是连续抽样。当离散抽样且/或波动率较大时，该公式不够精确。Ed Levy 的类似方法也有同样的问题。

25.9.3 Curran (1992)

Curran 根据“几何条件方法”推导出了简单的近似解。他的结果比前面提及的更精确。

25.9.4 Thompson (2000)

Thompson 推导出了多种亚式期权价格的上下界，以二重积分表示。这些表达式给出的范围相当窄，因此非常有用。

25.10 期限结构效应

得到一个准确的近似解比正确地描述波动率期限结构更重要吗？

首先，如何才能引入时变的波动率？要解释几何平均亚式期权的根号 3 原则，需要思考对亚式期权来说每个瞬间的波动率是如何累积的。要想从时变的局部波动率中得到普通期权的有效波动率，你只要简单地把方差加起来再求平均即可。

当波动率时变时，可以使用有效波动率来为普通期权定价

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma(t)^2 dt$$

而几何平均亚式期权的有效波动率也是局部波动率的平均，但现在要对时间加权

$$\bar{\sigma}_G^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma(t)^2 \left(\frac{T-t}{T}\right)^2 dt$$

(当 $\sigma(t)$ 为常数时该式给出了上文提到的根号 3 原则。)

究竟哪个更重要，允许 σ 时变还是用一个好的近似并假设波动率为常数？

一些结论

下列结论（见表 25-1）来自 Haug, Haug 和 Margrabe (2003)。要为一个期限为 6 个月，固定执行价算术平均亚式期权定价，计算平均数时的取样频率为周。S=100, $r=0.05$, $\sigma=0.2$ 是基准情形。正斜率下隐含波动率每周增加 0.5%，6 个月的波动率为 20%，负斜率下隐含波动率每周减少 0.5%，到第 6 个月波动率降为 20%。

表 25-1 FGA=平的期限结构，几何平均；FMC=平的蒙特卡罗；FL=平的 Levy 近似；
UGA=向上倾斜的期限结构，几何平均；UMA=向上倾斜的蒙特卡罗；
UL=向上倾斜的 Levy 近似，DGA=向下倾斜的期限结构，几何平均；
DMC=向下倾斜的蒙特卡罗；DL=向下倾斜的 Levy 近似

执行价格	FGA	FMC	FL	UGA	UMC	UL	DGA	DMC	DL
80	19.37	19.51	19.52	19.36	19.50	19.51	19.41	19.54	19.54
90	10.01	10.12	10.14	9.69	9.81	9.83	10.28	10.38	10.40
100	3.193	3.28	3.27	2.20	2.28	2.28	3.73	3.80	3.80
110	0.53	0.57	0.55	0.12	0.15	0.13	0.85	0.88	0.87
120	0.04	0.06	0.05	0.002	0.002	0.002	0.12	0.14	0.13

25.11 一些公式

亚式期权的价值很少有漂亮的公式。最广为人知的是当平均值为连续抽样几

何平均的平均标的价格看涨期权和看跌期权。

1. 几何平均标的价格看涨期权

该期权的回报为

$$\max(A - E, 0)$$

其中 A 是连续抽样几何平均值。该期权的布莱克 - 斯科尔斯价值为

$$e^{-r(T-t)} \left(G \exp\left(\frac{(r-D-\sigma^2/2)(T-t)^2}{2T} + \frac{\sigma^2(T-t)^3}{6T^2}\right) N(d_1) - EN(d_2) \right)$$

其中

$$I = \int_0^t \log(S(\tau)) d\tau$$

$$G = e^{I/T} S^{(T-t)/T}$$

$$d_1 = \frac{T \log(G/E) + (r-D-\sigma^2/2)(T-t)^2/2 + \sigma^2(T-t)^3/3T}{\sigma \sqrt{(T-t)^3/3}}$$

$$d_2 = \frac{T \log(G/E) + (r-D-\sigma^2/2)(T-t)^2/2}{\sigma \sqrt{(T-t)^3/3}}$$

对数正态随机过程的几何平均值本身也服从对数正态分布，但波动率较低。

2. 几何平均标的价格看跌期权

该期权的回报为

$$\max(E - A, 0)$$

其中 A 是连续抽样几何平均值。该期权的布莱克 - 斯科尔斯价值为

$$e^{-r(T-t)} \left(EN(-d_2) - G \exp\left(\frac{(r-D-\sigma^2/2)(T-t)^2}{2T} + \frac{\sigma^2(T-t)^3}{6T^2}\right) N(d_1) \right)$$

25.12 总结

我将第 24 章的一般理论应用于亚式期权的定价，即回报取决于某个平均值的期权。对于这类期权来说偏微分方程方法非常有用，如果期权可以进行相似性降维或者是美式的，那其他方法很难胜过该方法。该方法可以进一步一般化。我们将在第 28 章中看到这点。

拓展阅读

- Boyle (1991) 和 Angus (1999) 中可找到一些精确解的例子。
- Bergman (1985) 和 Ingersoll (1987) 给出了一些平均执行价格期权的偏微分方

程公式并展示了相似性降维。

- 另一个相当抽象的亚式期权定价方法见 Geman 和 Yor (1993)。
- Kemna 和 Vorst (1990) 描述了数值蒙特卡罗模拟方法的应用。他们也推导出了精确公式。
- 在 Dewynne 和 Wilmott (1995b, c) 中可以找到更多本章所用方法的例子。
- 要了解算术平均亚式期权的近似定价方法, 可参考 Levy (1990), 他用对数正态函数取代了平均值分布的密度函数。也可参考 Curran (1992), Turnbull 和 Wakeman (1991) 及 Thompson (2000)。
- 在 Lewis (2002) 中可找到对亚式期权的更详细的分析。
- Krekel (2003) 考察了一个有趣的亚式期权。



第 26 章

回溯期权

本章内容

- 回溯期权的特征
- 在连续抽样与离散抽样时，如何在布莱克 - 斯科尔斯框架下为回溯期权定价

26.1 引言

最令人梦寐以求的合约一定是那种回报为一定期间内资产最高价和最低价之差的合约。任何投机者都想达到这样的投资效果。拥有这种回报效果的合约就是一种**回溯期权** (lookback option)，后者指的是回报为标的资产在约定期间内实现的最高价与（或）最低价的函数的期权。由于回溯期权拥有如此极端的回报，其价格往往会比较高。

理论上讲，在布莱克 - 斯科尔斯框架下对这些合约定价是很容易的。可以分两种情况进行考虑，即标的资产最高价（最低价）是用连续的还是离散的方式度量。本章中，我们着重讨论标的资产的最高价，而对最低价的处理是类似的。

26.2 回报的类型

与亚式期权类似，对于一般的回溯合约，合约的回报有两种。分别为**收益率**

期权和执行价期权，也被分别称为固定执行价期权（fixed strike）和浮动执行价期权（floating strike）。这两种期权回报形式与香草期权基本相同，只是在执行价期权中，香草期权回报中的执行价格被替换成了标的资产的最高价；而在收益率期权中，香草期权回报中的资产价格被替换成了标的资产最高价。



26.3 连续测量的最大值

图 26-1 是一份外汇回溯互换的条款说明书。合约的一方每 6 个月支付浮动利率，另一方在到期日支付汇率已实现最高水平的线性方程。以 6 个月 LIBOR 利率计算的浮动利息支付可以表示为简单的现金流，如第 14 章所述。因此这份合约是一份非常直观的回溯期权。

USD/DEM外汇回溯互换	
交易双方	交易方A 客户
名义本金	5 000万美元
结算日	交易日后2天
到期日	交易日后2年
客户支付	每半年支付以6个月LIBOR利率+190个基点计算的金额， $A / 360$
交易方A支付	于到期日支付 名义本金 $\times \left(\frac{\text{汇率最高价} - \text{执行价}}{\text{到期日汇率水平}} - 1 \right)$
汇率最高价格	自结算日至到期日美元兑德国马克官方报价最高水平
到期日汇率水平	美元兑德国马克在到期日的汇率水平
执行价	1.718 0 USD/DEM
汇率	纽约时间中午，在德励财经SAFE1显示的每日USD/DEM汇率
6个月LIBOR利率	每结算日的伦敦时间正午，在德励财经3 750页显示的6个月美元伦敦市场银行拆借利率
文件材料	国际互换与衍生品协会
适用法律	英国法律

注：这个象征性的条款说明书既不是用于购买或出售证券或诸如期权、互换、远期合约和与场外衍生品具有相似特征的结构票据等场外衍生品的要约，也不是购买或出售证券与场外衍生品的宣传单。说明书中的内容不是特定交易条款的完整描述，并其更改不受限制。

图 26-1 美元/马克回溯互换的条款说明书

引入新变量 M ，用于表示从取样期开始的 0 时刻到当前 t 时刻这段时间内的资产最高价

$$M = \max_{0 \leq \tau \leq t} S(\tau)$$

图 26-2 展示了一段标的资产价格的路径实现和对应的连续采样下的最大值。显而易见但又值得一提的是标的资产价格一直处于最高价的下方（我们将看到离散采样时情况不是这样的）。因此，回溯期权的价值将是三个变量的函数，即 $V(S, M, t)$ ，且有

$$0 \leq S \leq M$$

上述观察可以指导我们写出期权价值正确的偏微分方程与边界条件。我们得到的是方程的启发式形式，稍后可以进一步严格化。

从图 26-2 可以看到，大部分时间里标的资产价格都在最大值下方，但有些时刻资产价格与最大值相等。当 $S < M$ 时，最大值不会改变，这时变量 M 满足随机微分方程

$$dM = 0$$

记住这一点。当 $0 \leq S < M$ 时，控制方程应该是布莱克 - 斯科尔斯偏微分方程

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

其中 M 为“参数”，并且方程只在 $S < M$ 的情况下成立。

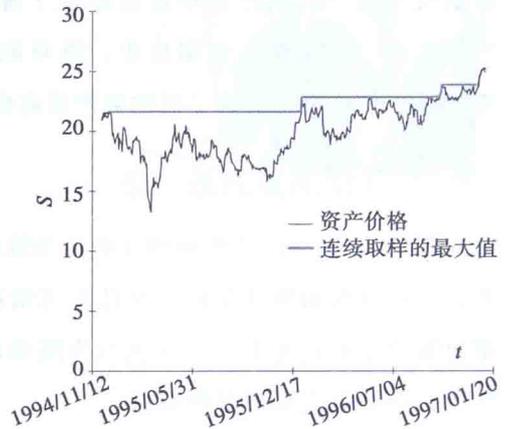


图 26-2 标的资产的价格路径与连续采样下的最大值



当 $S = M$ 时期权价值的表现给出了这种情形下的边界条件。该边界条件为

$$\frac{\partial V}{\partial M} = 0 \text{ 在 } S = M$$

得到该边界条件的原因是当标的资产的价格处于最大值时，期权价值对最大值水平并不敏感。这是因为当前标的资产最大值在期权到期时仍然是最大值的概率为 0。这个边界条件的严格推导十分烦琐，读者可以从 Goldman、Sosin 与 Gatto (1979) 的论文中查阅到详细推导过程。

最后，我们要写出到期时的边界条件反映期权的回报。例如，考虑回溯收益率看涨期权。其回报为

$$\max(M - E, 0)$$

回溯执行价看跌期权的回报为

$$\max(M - S, 0)$$

26.4 离散情形下的最大值

图 26-3 展示了离散采样下的最大值。从图中不仅可以看出标的资产价格可以高于最大值，而且最大值很少有增加。比连续取样更加实用的离散取样往往会降低合约价值。

在离散情形下度量最大值时，我们要先定义满足样本数据跳跃条件的更新规则。

如果在 t_i 时刻度量最大值，则更新规则为

$$M_i = \max(S(t_i), M_{i-1})$$

跳跃条件则为

$$V(S, M, t_i^-) = V(S, \max(S, M), t_i^+)$$

注意，这里布莱克-斯科尔斯方程适用于所有 S ， S 不再被约束于小于最大值。

26.5 相似性降维

回报取决于路径依赖变量的一般回溯期权的定价是一个三维问题。这三维分别是标的资产价格、标的资产价格最大值和时间。这个问题的数值解比二维问题更加耗费时间。然而，存在一些可以使该问题降维的特殊且重要的情形。

降维依赖于方程具有一些对称的性质，但降维并不适用于所有或者大部分回溯合约。回报满足以下形式时降维可行

$$M^\alpha P\left(\frac{S}{M}\right) \quad (26-1)$$

例如，对于拥有以下回报的回溯执行价

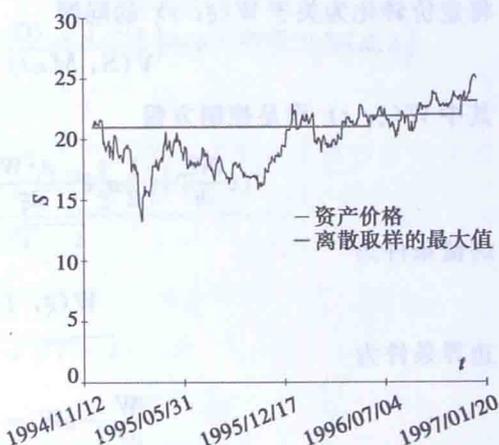


图 26-3 标的资产的价格路径与离散取样下的最大值



格，看跌期权降维是成立的

$$\max(M - S, 0) = M \max\left(1 - \frac{S}{M}, 0\right)$$

一般而言，如果回报满足式 (26-1)，令

$$\xi = \frac{S}{M}$$

将定价转化为关于 $W(\xi, t)$ 的问题

$$V(S, M, t) = M^\alpha W(\xi, t)$$

其中 $W(\xi, t)$ 满足控制方程

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \xi^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + r \xi \frac{\partial W}{\partial \xi} - rW = 0$$

终值条件为

$$W(\xi, T) = P(\xi)$$

边界条件为

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} - \alpha W = 0, \text{ 这里 } \xi = 1$$

26.6 一些公式

1. 浮动执行价格回溯看涨期权

该期权在连续取样情况下回报如下

$$\max(S - M, 0) = S - M$$

其中 M 是已实现标的资产价格的最小值。在布莱克 - 斯科尔斯框架下该期权价值为

$$\begin{aligned} & S e^{-D(T-t)} N(d_1) - M e^{-r(T-t)} N(d_2) + S e^{-r(T-t)} \frac{\sigma^2}{2(r-D)} \\ & \times \left(\left(\frac{S}{M} \right)^{-(2(r-D)/\sigma^2)} N\left(-d_1 + \frac{2(r-D)\sqrt{T-t}}{\sigma}\right) - e^{(r-D)(T-t)} N(-d_1) \right) \end{aligned}$$

其中

$$d_1 = \frac{\log(S/M) + \left(r - D + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

并且

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

2. 浮动执行价格回溯看跌期权

该期权在连续取样情况下回报如下

$$\max(M - S, 0) = M - S$$

其中 M 是已实现标的资产价格的最大值。该期权价值为

$$Me^{-r(T-t)} N(-d_2) - Se^{-D(T-t)} N(-d_1) + Se^{-r(T-t)} \frac{\sigma^2}{2(r-D)} \\ \times \left(- \left(\frac{S}{M} \right)^{-2(r-D)/\sigma^2} N \left(d_1 - \frac{2(r-D)\sqrt{T-t}}{\sigma} \right) + e^{(r-D)(T-t)} N(d_1) \right)$$

其中

$$d_1 = \frac{\log(S/M) + \left(r - D + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}$$

并且

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T-t}$$

3. 固定执行价格回溯看涨期权

该期权回报由如下方程给出

$$\max(M - E, 0)$$

其中 M 是已实现标的资产价格的最大值。 $E > M$ 时, 期权公平价值为

$$Se^{-D(T-t)} N(d_1) - Ee^{-r(T-t)} N(d_2) + Se^{-r(T-t)} \frac{\sigma^2}{2(r-D)} \\ \times \left(- \left(\frac{S}{E} \right)^{-2(r-D)/\sigma^2} N \left(d_1 - \frac{2(r-D)\sqrt{T-t}}{\sigma} \right) + e^{(r-D)(T-t)} N(d_1) \right)$$

其中

$$d_1 = \frac{\log(S/E) + \left(r - D + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}$$

且

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T-t}$$

当 $E < M$ 时, 期权价值为

$$(M - E)e^{-r(T-t)} + Se^{-D(T-t)} N(d_1) - Me^{-r(T-t)} N(d_2) + Se^{-r(T-t)} \frac{\sigma^2}{2(r-D)} \\ \times \left(- \left(\frac{S}{M} \right)^{-2(r-D)/\sigma^2} N \left(d_1 - \frac{2(r-D)\sqrt{T-t}}{\sigma} \right) + e^{(r-D)(T-t)} N(d_1) \right)$$

其中

$$d_1 = \frac{\log(S/M) + \left(r - D + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

且

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

4. 固定执行价格回溯看跌期权

该期权回报为

$$\max(E - M, 0)$$

其中 M 是已经实现的最小值。 $E < M$ 时，期权公平价值为

$$Ee^{-r(T-t)}N(-d_2) - Se^{-D(T-t)}N(-d_1) + Se^{-r(T-t)}\frac{\sigma^2}{2(r-D)} \\ \times \left(\left(\frac{S}{E}\right)^{-2(r-D)/\sigma^2} N\left(-d_1 + \frac{2(r-D)\sqrt{T-t}}{\sigma}\right) - e^{(r-D)(T-t)}N(-d_1) \right)$$

其中

$$d_1 = \frac{\log(S/E) + \left(r - D + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

且

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

当 $E > M$ 时，期权价值为

$$(E - M)e^{-r(T-t)} - Se^{-D(T-t)}N(-d_1) + Me^{-r(T-t)}N(-d_2) + Se^{-r(T-t)}\frac{\sigma^2}{2(r-D)} \\ \times \left(\left(\frac{S}{M}\right)^{-2(r-D)/\sigma^2} N\left(-d_1 + \frac{2(r-D)\sqrt{T-t}}{\sigma}\right) - e^{(r-D)(T-t)}N(-d_1) \right)$$

其中

$$d_1 = \frac{\log(S/M) + \left(r - D + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

且

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

26.7 总结

回溯期权以及一般的回溯性质常见于各种类型的合约中。它们广泛应用于由利

率水平在过去的某段时间内达到的最大值来确定利息支付的固定收益产品。我们在股票中所看到的偏微分方程框架，原则上可以应用在更加复杂的随机利率世界中。

拓展阅读

- 参见 Goldman、Sosin 和 Gatto (1979) 第一次从学术上对回溯期权的描述。他们对重要的边界条件进行了严格推导。
- Conze 和 Viswanathan (1991) 给出了多类回溯期权定价公式的推导。
- Babbs (1992) 将二项模型设定应用于回溯期权。
- 参见 Dewynne 和 Wilmott (1994b) 对控制方程和边界条件的推导。
- Heynen 和 Kat (1995) 讨论了关于离散情形下最大值与最大值的局部控制。
- 由 Fitt、Dewynne 和 Wilmott (1994) 描述的止损期权，以及由 Duffie 和 Harrison (1992) 描述的俄式期权是两种与回溯期权相关的合约。
- Lewis (2004c) 对所有模型中的最大值分布进行了讨论。



第 27 章

衍生品和随机控制

本章内容

- 随机控制简介
- 一个复杂奇异期权的定价

27.1 引言

有些期权赋予期权持有者在合约存续期内进行某种控制的权力。最常见的是美式期权，允许期权持有者在期权到期前的任意时刻执行期权而不必等期权到期。有些合约会赋予持有者更大的灵活性，要求他们做出更多更复杂的决定。

本章中我想介绍一个在本书目前为止所构建的框架之外的期权。这个期权并没有复杂到难以分析，但是它会引入些新的思路，特别是会对随机控制（stochastic control）问题进行一个简单的介绍。

27.2 完美交易员期权和认证期权

假设你投资了某只股票，持续跟踪它的走势并根据你对未来方向的观点进行买卖。你在该股票的交易中累积的金额称为交易账户（trading account）。如果你

是一名优秀的交易员或者比较幸运，账户的金额会增加；如果你是一名差劲的交易员或运气不佳，账户的金额就会变成负的。你愿意支付多少以保证交易账户在某段时间不遭受损失？完美交易员期权（perfect trader）或者认证期权（passport option）是以交易账户为标的的看涨期权，在投资期限结束时如果交易账户为正，那么该期权的回报为当时该账户中的金额，如果为负则回报为零。

为了对该合约定价，我们必须引入新的变量 π 。 π 是交易账户的总价值，包括持有的股票的价值和交易过程中累积的现金。

我们同时引入变量 q 代表 t 时刻标的证券的持有量。该变量是控制变量。作为定价过程的一部分，我们要决定在每个时刻 q 应该是多少。

由于我们持有 q 份股票，因此总股票头寸是 qS 。而因为交易账户总价值为 π ，那么我们一定持有 $\pi - qS$ 的现金。证券头寸的变化为 $q dS$ ，而现金部分会获得 $r(\pi - qS)dt$ 的利息[⊖]。因此 π 的随机微分方程是

$$d\pi = r(\pi - qS)dt + qdS \quad (27-1)$$

q 是由我们选择的，会根据时间和证券价格的改变而改变，被称为交易策略（strategy）。 q 是 S 、 π 和 t 的方程。我假设 $|q| \leq 1$ 以约束证券头寸的大小。式（27-1）包含了一个确定项和一个随机项。第 1 项说明由于利息使得持有的现金量 $\pi - qS$ 有一个增长，第 2 项是由于所持股票价值的改变。

该合约将在 T 时刻支付

$$\max(\pi, 0)$$

这将是期权价值 $V(S, \pi, t)$ 的终值条件。注意期权价值是 3 个变量的函数。

现在我们来对冲该期权

$$\Pi = V - \Delta S$$

可以发现

分类	认证期权
时间依存性	无
现金流	无
可决策	有
路径依赖性	弱
维度	3
阶数	1

认证期权分类表

⊖ 我假设现金头寸是可以获得利息的。实际当中可能并不是这样的，所以你需要仔细检查合约说明书。如果不能获得利息，之后的推导要做什么变化呢？

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + q\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \pi} + \frac{1}{2}q^2\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2} \right) dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\partial V}{\partial \pi} d\pi - \Delta dS$$

由于 $d\pi$ 中含有 dS 项, 所以正确的对冲比率是

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S} + q \frac{\partial V}{\partial \pi}$$

根据无套利原则, 定价方程为

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + q\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \pi} + \frac{1}{2}q^2\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + r\pi \frac{\partial V}{\partial \pi} - rV = 0 \quad (27-2)$$

由于 S 和 π 是完全相关的, 所以该扩散方程不是双空间类变量的, 该方程实际上含有一个空间类变量和两个时间类变量。

我们现在面临一个随机控制问题即 q 的选择。如果我们出售该合约, 我们要假设持有者会选择最优的行动策略, 使合约的价值尽可能地高。这并不意味着投资者会按照该策略行事, 因为持有者还有其他的考虑, 他会对市场的走势有所判断而且不会去对冲。当选择的 q 能最大化式 (27-2) 中含有 q 的项时, 合约价值最高, 即

$$\max_{|q| \leq 1} \left(q\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \pi} + \frac{1}{2}q^2\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2} \right)$$

这是唯一含有 q 的项。

相似性解法

如果回报形式为

$$V(S, \pi, T) = \max(\pi, 0)$$

则我们可以找到一个相似性解法, 即

$$V(S, \pi, T) = SH(\xi, t), \quad \xi = \frac{\pi}{S}$$

此时, 式 (27-2) 变为

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 (\xi - q)^2 \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} = 0 \quad (27-3)$$

回报为

$$H(\xi, T) = \max(\xi, 0)$$



最优策略为

$$\max_{|q| \leq 1} \left((\xi - q)^2 \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} \right)$$

由于方程和终值条件的性质，我们假设 $\frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} > 0$ （这是可验证的），最优策略是

$$q = \begin{cases} -1, & \text{当 } \xi > 0 \\ 1, & \text{当 } \xi < 0 \end{cases}$$

如果回报形式更一般化，最优策略将会依赖于 $\frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2}$ 的符号。

在最优策略下，期权价值满足

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 (|\xi| + 1)^2 \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} = 0$$

图 27-1 展示了一份完美交易员期权的产品说明书。

期权持有者被允许对美元/德国马克的汇率进行一系列假想的交易。持有人每天能够进行两次交易，多头或空头头寸都不能超过规定的最大值。期权持有者将会收到他交易获得的正的盈利。如果他交易的净值为负则可以一笔勾销。

美元/德国马克完美交易员期权	
名义本金	2 500 万美元
期权到期日	交易日后 3 个月
允许最大头寸	多头或者空头最大上限为名义本金
交易频率	最多每日 2 次
结算金额	Max (0, 德国马克计价的每笔交易的损益 加总)
预定期权费	3.35% × 名义本金
注：这个象征性的条款清单说明书既不代表购买或出售某证券或诸如期权、互换、远期合约和与场外衍生产品具有相似特征的结构票据等场外衍生品的要约，也不是购买或出售证券或 OTC 衍生产品的宣传单。说明书中的内容不是特定交易条款的完整描述，其更改不受限制。	

图 27-1 完美交易员期权条款说明书

27.3 限制交易次数

上文讨论的认证期权允许交易者可以以任意频率买卖标的资产。那么，这种随意买卖的权利价值有多高？如果交易次数或交易时间间隔有限制，期权价值会有很大差异吗？现实中，交易者只能进行有限次数的买卖。

让我们从限制交易次数的情形开始研究。

引入符号 $V^{n+}(S, \pi, t)$ 和 $V^{n-}(S, \pi, t)$ 表示当交易者还允许进行 n 次交易时认证期权的价值， $+/-$ 表示目前交易者在标的上（以最大允许量）持有的头寸是多头还是空头。

如果你读完本书以上部分，你应该可以在没有每一步详细推导的情况下写出控制方程。因此，我只指出其中相关的几步。首先，除了在 V^{n+} 中 q 等于 1 以及 V^{n-} 中 q 等于 -1 外， $V^{n+}(S, \pi, t)$ 和 $V^{n-}(S, \pi, t)$ 的方程与式 (27-2) 一样。第二，由于我们处理的合约中存在多翻空或空翻多的决策，所以我们假设的策略最优化与美式期权中的最优化非常类似，我们要处理的将是不等式而不是等式。

所以，前面的两个函数要满足不等式

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V^{n+}}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V^{n+}}{\partial S^2} + \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V^{n+}}{\partial S \partial \pi} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V^{n+}}{\partial \pi^2} \\ & + rS \frac{\partial V^{n+}}{\partial S} + r\pi \frac{\partial V^{n+}}{\partial \pi} - rV^{n+} \leq 0 \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V^{n-}}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V^{n-}}{\partial S^2} - \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V^{n-}}{\partial S \partial \pi} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V^{n-}}{\partial \pi^2} \\ & + rS \frac{\partial V^{n-}}{\partial S} + r\pi \frac{\partial V^{n-}}{\partial \pi} - rV^{n-} \leq 0 \end{aligned}$$

注意两式中符号的差异。

终值条件是

$$V^{0\pm}(S, \pi, t) = \max(\pi, 0)$$

当还剩 n 次交易次数（且当前的头寸是多/空）的合约价值与头寸相反（空/多）的还剩 $n-1$ 次交易次数的合约价值相等时，交易才是最优的，即

$$V^{n+} \geq V^{(n-1)-} \text{ 和 } V^{n-} \geq V^{(n-1)+}$$

至此问题的构建就完成了。

一个简单的变种是对每次交易加入大小为 P 的固定罚金。用模型表示就是

$$V^{n+} \geq V^{(n-1)-} + P \text{ 和 } V^{n-} \geq V^{(n-1)+} + P$$

27.4 限制交易的时间间隔

我们可以限制两次交易间的最小时间间隔而不是交易次数。如果刚进行了一次

交易，那么需 ω 时间后才能进行下一次交易。我们必须引入一个“计时器”来记录上一次交易后经过的时间。每次交易后将计时器上的时间重置为零。现在，认证期权价值由 $V^+(S, \pi, t, \tau)$ 和 $V^-(S, \pi, t, \tau)$ 表示，其中 τ 表示计时器上的时间。

这两个函数满足如下不等式

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V^+}{\partial t} + \frac{\partial V^+}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V^+}{\partial S^2} + \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V^+}{\partial S \partial \pi} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V^+}{\partial \pi^2} + rS \frac{\partial V^+}{\partial S} \\ & + r\pi \frac{\partial V^+}{\partial \pi} - rV^+ \leq 0 \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V^-}{\partial t} + \frac{\partial V^-}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V^-}{\partial S^2} - \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V^-}{\partial S \partial \pi} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V^-}{\partial \pi^2} \\ & + rS \frac{\partial V^-}{\partial S} + r\pi \frac{\partial V^-}{\partial \pi} - rV^- \leq 0 \end{aligned}$$

终值条件为

$$V^\pm(S, \pi, t, \tau) = \max(\pi, 0)$$

当期权价值等于在允许交易时点（即 $\tau = \omega$ ）头寸相反的期权价值时，交易才是最优的

$$V^+(S, \pi, t, \omega) \geq V^-(S, \pi, t, 0) \text{ 和 } V^-(S, \pi, t, \omega) \geq V^+(S, \pi, t, 0)$$

如果不引入罚金，认证期权的价格有相似性解法，解的形式为

$$V = S\Phi\left(\frac{\pi}{S}, t\right)$$

其中 Φ 是所有其他变量的函数。对于限制交易次数的期权，它是 n 的函数；而对于限制交易间隔时间的期权，它是 τ 的函数。

示例

标的资产的波动率为 20%，期限为 6 个月。普通认证期权价值是 $0.0589 \times S$ 。图 27-2 显示了交易次数限制对期权价值的影响。

图的上半部分显示了期权价值（当 $S=100$ 时）与允许的交易次数的关系。实线为没有交易次数限制时普通认证期权的价值。注意到即使只允许 3~4 次的

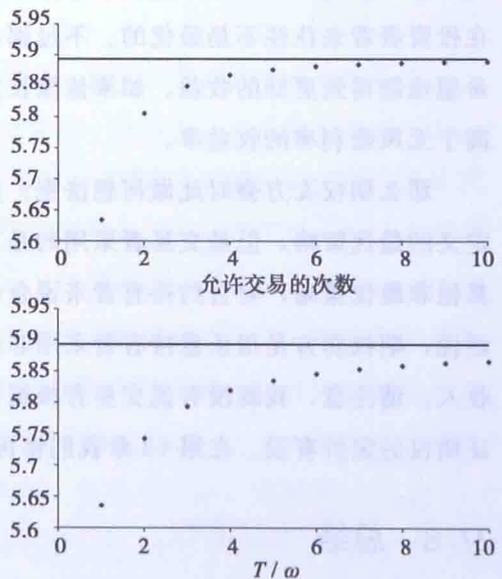


图 27-2 不同类型认证期权的价值

交易，期权的价值仍然非常接近没有限制的情形。图的下半部分显示了当限制交易时间间隔时，期权价值与 $\frac{T}{\omega}$ 的关系，价格的结构与限制交易次数类似。

允许交易员能更频繁地交易对合约的理论价值只有很细微的影响。但这的确会略微增加合约的对冲难度，因为期权卖方的对冲频率至少要等于持有者的交易频率。对冲越频繁交易成本的影响就会越大。

27.5 非最优交易及其对期权卖方的好处

在这一节中，我想讨论对于期权持有者而言什么才是最优的交易策略。

为了说明问题，假定我们处于布莱克-斯科尔斯世界中。同时持有者不进行 Delta 对冲也是很合理的假设。如果投资者进行 Delta 对冲，那么他的策略与期权



卖方是一样的。除非持有者认为他所购买的期权非常便宜，否则这是毫无意义的。所以，假设持有者自己有另一套交易策略，也许他自认是一个能判明市场方向的高明交易员。在“非最优化”范式下他应该进行交易吗？

我们这里的“最优化”的含义是很特殊的：当对一个使用 Delta 对冲的人来说期权价值达到了最高，我们称该策略是最优的。对于 Delta 对冲者最优的策略在投资者看来往往不是最优的。不过那都是他的问题了。如果他想冒一下险，我希望他能得到更好的收益。如果他擅长交易，他会期望通过承担更多风险以获得高于无风险利率的收益率。

那么期权卖方会对此做何想法呢？卖方在定价时假设交易者使用的是对冲者定义的最优策略，但是交易者采用的是其他的交易策略。根据定义，如果采用了其他非最优策略，对合约持有者来说合约的价值将会低于他所支付的金额。换句话说，期权卖方是很乐意持有者采用非最优策略的，因为他有可能因此获得额外收入。请注意，我既没有说交易者根据自己的策略进行交易是错的，也没有说认证期权的定价有误。在第 63 章我们将再次讨论这个问题。

27.6 总结

这类新的衍生品非常激动人心。从定价和对冲的角度来看这是一个挑战，尤

其是持有者/交易员会做出一系列复杂且连续的决定。如同数量金融的大部分内容一样，一旦你了解其中的原理，数学推导将会变得非常直观。

拓展阅读

- Hyer, Lipton-Lifschitz 和 Pugachevsky (1997) 介绍了认证期权。
- Ahn, Penaud 和 Wilmott (1998) 和 Penaud, Wilmott 和 Ahn (1998) 讨论了很多认证期权概念的拓展。



第28章

各种各样的奇异衍生品

本章内容

- 许多更奇异衍生品的合约设定
- 更多在偏微分框架下为奇异合约定价的技巧

28.1 引言

奇异衍生品的世界浩瀚无边，而且一直都处于扩展之中。我一直尝试对这些合约进行总结和分类。例如有一整章被用来介绍亚式期权——一种依赖于已实现资产价格路径的平均值的期权。但是，由于金融工具的数量不断增多，复杂度不断提高，分类的工作就像西西弗斯的劳役一样无穷无尽。在本章中我将放弃这项工作，只是笼统地介绍一些奇异产品，希望能够拓展读者为新产品定价的可用技巧。我只在股权类产品的框架下介绍定价和对冲的相关概念，但是我相信聪明的读者在阅读完本书后能自行判断在其他（比如固定收益）世界中它们是否仍然可用。

28.2 远期开始期权

如同名字暗示的那样，远期开始期权（forward-start）是未来某个时刻才会

生效的期权。举个例子：在 $t=0$ 时刻我们购买了一份远期开始期权，但是其执行价要等到时刻 T_1 才能够知晓，比如说执行价为 T_1 时刻的资产价格。期权将在更晚的时刻 T 到期。在布莱克 - 斯科尔斯框架下为该期权定价有两种方法，一种比较简单，另一种比较复杂。我们先介绍简单的方法。

简单的定价方法首先要问在 T_1 时刻发生了什么。在该时刻我们得到了一个剩余期限为 $T-T_1$ 的平价期权。如果 T_1 时刻的股票价格为 S_1 ，那么合约的价值就是在 $S=S_1$ ， $t=T-T_1$ ， $E=S_1$ ，给定利率 r 和波动率 σ 下的布莱克 - 斯科尔斯期权价值。看涨期权的价值为 S_1 的函数

$$S_1 N(d_1) - S_1 e^{-r(T-T_1)} N(d_2)$$

其中

$$d_1 = \frac{r + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} \sqrt{T - T_1}$$

而

$$d_2 = \frac{r - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} \sqrt{T - T_1}$$

该期权价值与 S_1 成比例。因此，在 T_1 时刻我们会拥有一个价值为

$$S_1 f(T - T_1)$$

的资产。因为该式等于 T_1 时刻的资产价格乘以一个常数，所以该资产在今天的价值一定为

$$S f(T - T_1)$$

其中 S 为今天的资产价格。

另一个定价方法是遵循路径依赖期权定价的一般框架，引入一个新的状态变量 \mathcal{S} 。在 $t \geq T_1$ 时该变量等于 T_1 时刻的资产价格

$$S = S(T_1) \quad (28-1)$$

在 T_1 之前的时刻该变量的取值并不重要，我们假定 $\mathcal{S}=0$ 。该方法的定价结果与前面的简单方法一样，但是引入新变量的技巧用途非常广泛。

该期权价值为三元函数 $V(S, \mathcal{S}, t)$ 。该函数满足仅包含 S 和 t 的布莱克 - 斯科尔斯方程，因为在 T_1 时刻之后 \mathcal{S} 是非随机的，而且为常数。在到期日有

$$V(S, \mathcal{S}, T) = \max(S - \mathcal{S}, 0)$$

在起始日 T_1 ，执行价被设定为当时的资产价格，即式 (28-1)。跨越 T_1 的

跳跃条件为

$$V(S, S, T_1^-) = V(S, S, T_1^+)$$

至此定价问题的描述就完成了。

我们可以对这种最简单的远期开始期权做进一步的分析。我们可以通过观察发现 T_1 时刻后该期权等同于普通的看涨期权，从而像前面一样写出其定价公式；还可以使用相似性变量 $\xi = S/S$ 进行换元，将问题转化为

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2\xi^2 \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} + r\xi \frac{\partial H}{\partial \xi} - rH = 0$$

此时终值条件变为

$$H(\xi, T) = \max(\xi - 1, 0)$$

其中 $V(S, S, t_1^-) = SH(\xi, t)$

跨越 T_1 的跳跃条件为

$$V(S, S, T_1^-) = V(S, S, T_1^+) = SH(1, T_1^+)$$

如果将此作为求解 T_1 时刻之前期权价值的终值条件，我们可以发现在这段时间期权价值跟 S 成比例。因此其唯一的解是

$$V(S, S, t) = SH(1, T_1), \text{ 当 } t < T_1$$

当然， $H(1, T_1)$ 就是执行价为 1、期限为 $T - T_1$ 的平价看涨期权的价格。这跟简单方法得到的结果是一样的。

虽然对简单的远期开始期权来说没有必要使用那么复杂的方法，但我还是着重介绍了对路径依赖的一般处理方法，因为该方法可以用于其他众多合约。

远期开始期权也可以设定为固定执行价。我将这种情况下的定价留作练习。

类型	远期开始
时间依赖性	无
现金流	无
决策	无
路径依赖性	弱
维度	2
阶数	2

远期开始期权分类表

28.3 呐喊期权

与普通看涨期权相比，呐喊 (shout) 看涨期权允许持有人在任意时点将期权的执行价重设为当前的资产价格 (当它高于原来的执行价时)。该行动会同时产生一个支付，大小通常为新旧执行价之差。重设的行为被称为“呐喊”。

很明显呐喊决策与最优化有关，因此可以想象会遇到美式期权那样的自由边

界问题。

要为该合约定价我们引入两个函数 $V_a(S, X, t)$ 和 $V_b(S, X, t)$ 。前者是呐喊后的期权价值，后者是呐喊前的期权价值。 S 为标的资产价格， X 为执行价。因为 X 是离散更新的，需要求解的方程为基本的布莱克 - 斯科尔斯方程。终值条件为

$$V_a(S, X, T) = V_b(S, X, T) = \max(S - X, 0)$$

函数 $V_b(S, X, t)$ 必须满足约束条件

$$V_b(S, X, t) \geq V_a(S, \max(S, X), t) - R(S, X)$$

并且为梯度连续的。这里 $R(S, X)$ 为呐喊后必须支付的金额。该约束描述了呐喊策略的最优化，当不等式两边相等时呐喊是最优选择。

该问题需要数值求解，在 R 的某些特殊形式下可以进行相似性降维到二维。该期权价值可以写成 $V(S_0, X_0, t_0)$ ，下标代表这些变量为初始值。

可以增加其他的规则来对简单的呐喊期权进行进一步拓展，例如更改执行价重设的方式、呐喊时的回报，也可以允许多次呐喊。

类型	呐喊期权
时间依赖性	无
现金流	有
决策	有
路径依赖性	强
维度	3
阶数	1

呐喊期权分类表

28.4 有封顶的回溯和亚式期权

封顶回溯期权 (capped lookbacks) 和封顶亚式期权 (capped Asians) 对最大值、最小值或平均值的大小做了一些限制或保证。一个常见的封顶亚式期权的例子，是其路径依赖量为标的资产价格和某提前设定值较小者的平均数，即路径依赖量为

$$A = \frac{I}{t}$$

其中

$$I = \int_0^t \min(S, S_u) dr$$

用于推导控制偏微分方程的 I 的随机微分方程为

$$dI = \min(S, S_u)dt$$

28.5 混合路径依赖量：回溯亚式期权等

在第 24~26 章中，我们已经介绍了如何为回报和价格依赖于各种路径依赖量的期权定价。没有什么理由我们不能为依赖于不止一个路径依赖量的合约定价，只需针对每一个路径依赖量引入一个状态变量。

比如说，我们要给一个称作回溯亚式期权（lookback-Asian）的产品定价。该名称意味着产品不仅依赖于某个最大（小）值，还依赖于某个平均值。那“最大值”如何定义？是标的资产的已实现最大值还是平均值的最大值？显然对此类合约来说有非常多的可能性。我们来考察其中的三种，读者可以（而且应该）自行思考更多的例子。

类型	回溯亚式期权
时间依赖性	有（离散取样时）
现金流	无
决策	无
路径依赖性	强
维度	4（有时可进行相似性降维）
阶数	1

回溯亚式期权分类表

28.5.1 资产价格最大值和资产价格平均值

最简单的例子是合约依赖于资产的已实现最大值和已实现平均值，这最接近我们之前遇到的问题。假设平均值为算术平均，两个路径依赖量都是离散度量的，且度量日期相同。这些假设都可以进一步放松。

首先，期权价值是 4 个变量的函数，即 S 、 t 、最大值 M 和平均值 A 。变量 M 和 A 为离散度量的，其定义式分别为

$$M_i = \max(S(t_1), S(t_2), \dots, S(t_i))$$

和

$$A_i = \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i S(t_j)$$

现在我们需要写出跨越取样日的跳跃条件。这可以从跨越取样日的更新规则中得到。我们之前已经介绍过，最大值的更新规则为

$$M_i = \max(M_{i-1}, S(t_i))$$

平均值的更新规则为

$$A_i = \frac{(i-1)A_{i-1} + S(t_i)}{i}$$

因此该回溯亚式期权跨越取样日的跳跃条件为

$$V(S, M, A, t_i^-) = V\left(S, \max(M, S), \frac{(i-1)A + S}{i}, t_i^+\right)$$

该条件加上布莱克 - 斯科尔斯方程, 以及合适的终值条件, 就是该回溯亚式期权问题的完整描述。

28.5.2 资产价格的平均值和平均值的最大值

在这种合约中, 合约的回报依赖于标的资产价格的平均值和该平均值的最大值。期权价值仍然是 4 个变量的函数, 但现在的更新规则为

$$A_i = \frac{(i-1)A_{i-1} + S(t_i)}{i}$$

和

$$M_i = \max(M_{i-1}, A_i)$$

注意, 我们是先求平均值, 再用该平均值求最大值。这里同样可以从各个角度进行一般化。

据此可以写出该回溯亚式期权跨越取样日的跳跃条件

$$V(S, M, A, t_i^-) = V\left(S, \max\left(M, \frac{(i-1)A + S}{i}\right), \frac{(i-1)A + S}{i}, t_i^+\right)$$

28.5.3 资产价格的最大值和最大值的平均值

最后一个例子, 我们将上例中的最大值和平均值的角色互换。先取资产价格的最大值, 再求该最大值的平均值。更新规则为

$$M_i = \max(M_{i-1}, S(t_i))$$

和

$$A_i = \frac{(i-1)A_{i-1} + M_i}{i}$$

跳跃条件为

$$V(S, M, A, t_i^-) = V\left(S, \max(M, S), \frac{(i-1)A + \max(M, S)}{i}, t_i^+\right)$$

最后要提到的是对许多常见的回报形式, 都可以使用相似性降维, 所以需要求解的只是一个三维问题。具体做法留给读者自行完成。

28.6 波动率期权

一个特别有趣的可以作为奇异期权回报的路径依赖量是已实现历史波动率。

该变量是像

$$\sqrt{\frac{1}{\delta t} \frac{1}{M-1} \sum_{j=1}^M (\log(S(t_j))/S(t_{j-1}))^2}$$

这样的统计量，其中 δt 为资产价格的取样间隔（注意我没有减去资产价格的漂移项，因为当 δt 趋于零时漂移项会越来越不显著）。图 28-1 是计算该表达式的样本点，图 28-2 为一个相关产品的说明书。



图 28-1 历史波动率计算的图形表达

<u>已实现方差互换</u>	
合约方	A方 客户
参考指数	标普500
结算日	交易日后2天
生效日	××××
到期日	交易日后6个月
名义本金	100万美元
A方支付	到期日用美元支付 名义本金 × (已实现波动率 ² - 固定波动率 ²)
已实现波动率计算式	$\sqrt{252 \times \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\ln \left(\frac{S_i}{S_{i-1}} \right) \right)^2}$ S_i 为第 i 天的 SPX 收盘价 N 为生效日和到期日之间（包括两者在内）的工作天数
固定波动率	0.176
文本来源	ISDA
适用法律	英国
注：	该说明书既不代表购买或出售某证券或诸如期权、互换、远期合约和与场外衍生产品具有相似特征的结构性票据等场外衍生品的要约，也不是购买或出售证券或OTC衍生产品的宣传单。说明书中的内容不是特定交易条款的完整描述，其更改不受限制。

图 28-2 一份典型的方差互换说明书

读者可能会问：“该路径依赖量不就是我们输入模型的波动率吗？”如果是这样，设定历史波动率的模型有什么意义？答案是要么我们没有将 δt 取到足够小，所以计算出的波动率跟输入模型的波动率是不一样的，或者我们使用的是更复杂

的波动率模型（比如说随机或不确定波动率，见第 51 章和第 52 章；或者隐含波动率曲面，见第 50 章）。

我们先在布莱克 - 斯科尔斯的常数波动率框架下为回报为上述形式的合约定价，然后简要讨论一些改进的方法。

要用到的技巧是引入两个路径依赖量，一个是滚动波动率，另一个是上一个取样点的资产价格

$$I_i = \sqrt{\frac{1}{\Delta t(i-1)} \sum_{j=1}^i (\log(S(t_j))/S(t_{j-1}))^2}$$

$$S_i = S(t_{i-1})$$

该期权价值是四维函数 $V(S, S, I, t)$ 。 t_i 时刻两个路径依赖量的更新规则为

$$S_i = S(t_{i-1})$$

和

$$\begin{aligned} I_i &= \sqrt{\frac{1}{\Delta t(i-1)} \sum_{j=1}^i (\log(S(t_j))/S(t_{j-1}))^2} \\ &= \sqrt{\frac{i-2}{i-1} I_{i-1}^2 + \frac{1}{\Delta t(i-1)} (\log(S(t_i)) - \log(S_i))^2} \end{aligned}$$

从第二个更新规则中我们可以看出，为什么要跟踪旧的样本资产价格：因为在计算滚动波动率中需要用到它。

因此跨越取样日的跳跃条件为

$$V(S, S, I, t_i^-) = V\left(S, S, \sqrt{\frac{i-2}{i-1} I^2 + \frac{1}{\Delta t(i-1)} (\log(S) - \log(S))^2}, t_i^+\right)$$

如果期权在到期日的回报为已实现波动率，那么

$$V(S, S, I, T) = I$$

使用 S/S 进行相似性降维可以将问题转化为三维。

如果认为波动率不是常数，那可以使用随机波动率模型。此时模型唯一需要改动的地方是引入一个新的变量 σ ，该变量服从某个随机微分方程。此时要求解的问题为五维，使用相似性降维后可转化为四

类型	波动率期权
时间依赖性	有(离散取样时)
现金流	无
决策	无
路径依赖性	强/离散
维度	4(有时可进行相似性降维)
阶数	1

波动率期权分类表

维，路径依赖量、更新规则和跳跃条件都没有改变。高维度（四维）使得问题的求解相当耗时，因此蒙特卡罗模拟是一个更好的备选方案（见第 80 章）。

28.6.1 连续时间极限

我们可以令 δt 趋于零以得到问题的连续取样极限。其中的原理相当晦涩，因此我们直接推导结果。

要使问题有意义必须允许波动率为非确定的。比如说，可以用一个随机微分方程描述波动率。但最简单的具有内部一致性的模型是让波动率为资产价格和时间的函数 $\sigma(S, t)$ 。此时可以引入新的状态变量

$$I = \sqrt{\frac{1}{t} \int_0^t \sigma(S, t)^2 dt}$$

这是前面提到的 I 的离散形式的一个连续时间版本，因为

$$(\log(S(t_j)/S(t_{j-1})))^2 \approx \sigma(S_j)^2 dX^2$$

由此

$$dI = \frac{(\sigma(S, t)^2 - I^2)}{2tI} dt$$

进一步推导得到

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma(S, t)^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV + \frac{(\sigma(S, t)^2 - I^2)}{2tI} \frac{\partial V}{\partial I} = 0$$

该期权价值是三元函数 $V(S, I, t)$ 。后面的步骤大家应该已经烂熟于心了。

28.6.2 用普通期权来对冲方差互换

不管标的资产头寸为多少，都可以构建一个 Vega 为常数的组合。可以验证，这样的组合也可以用于对冲方差互换。这要求持有一系列连续分布的普通期权。我们来看一下如何做到这一点。

一个由 $f(E)$ 份执行价为 E 的期权构成的组合价值为多少？这就是我们需要的一系列连续分布的期权（虽然实践当中无法构建），其价值为

$$\int_0^{\infty} f(E) V(S, E; \sigma) dE$$

V 就是布莱克 - 斯科尔斯看涨期权定价公式， σ 为隐含波动率。

单个期权的 Vega 为

$$S \sqrt{T-t} e^{-D(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}}$$

其中

$$d_1 = \frac{\log(S/E) + (r - D + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}$$

我们引入变量 $x = S/E$, 则上式变为

$$d_1(x) = \frac{\log(x) + (r - D + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}$$

组合的 Vega 为

$$\int_0^{\infty} f(E) S \sqrt{T-t} e^{-D(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1(S/E)^2}{2}} dE$$

改变积分变量 $E = \xi S$, 可以得到组合 Vega 的表达式

$$\int_0^{\infty} f(\xi S) S^2 \sqrt{T-t} e^{-D(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1(1/\xi)^2}{2}} d\xi$$

不用关注该表达式的细节, 只需注意其形式为

$$\int_0^{\infty} f(\xi S) S^2 \cdots d\xi$$

省略号中都是与 S 无关的量。要让该式也就是 Vega 与标的资产价格无关, 需要

$$\frac{\partial}{\partial S} (f(\xi S) S^2) = 0$$

或者说

$$\xi S^2 f'(\xi S) + 2Sf(\xi S) = S(Ef'(E) + 2f(E)) = 0$$

其中'代表取微分。该方程的解为

$$f(E) = \frac{k}{E^2}$$

k 为任意常数。

这是一个非常有名的结果, 即可以使用“执行价的平方分之一”准则用普通期权来对冲方差互换。

28.7 相关性互换

图 28-3 是一份多资产合约的产品说明书, 看起来很像波动率或方差互换,

但其回报为已实现相关系数。Carr 和 Madan (1999) 描述了如何用普通期权来静态复制此类合约。思路跟前面复制方差互换类似。

1年期日经225/标普500相关性互换	
交易日	× × × ×
到期日	首个指数日+249天
相关性买方	×
相关性卖方	对手
执行价	41%
名义本金	200万美元
标的指数	日经225(NKY) 标普500(SPX)
结算方式	现金结算
现金结算数量	名义本金 × (已实现相关系数 - 执行价) × 100 若为正则买方将收到此金额；若为负则卖方将收到此金额的绝对值
已实现相关系数	两个标的指数的5日对数收益率的250天已实现相关系数将按照如下步骤计算。在到期日，使用之前250天两个指数的收盘价进行计算。两个标的指数的5日对数收益率计算式为 $\frac{\text{Log}_e[\text{Index Closing Level @ day}(i)] - \text{Log}_e[\text{Index Closing Level @ day}(i-5)]}{245 \left[\sum_6^{250} X(i)Y(i) \right] - \left[\sum_6^{250} X(i) \right] \left[\sum_6^{250} Y(i) \right]}$ $\sqrt{\left[245 \sum_6^{250} X(i)^2 - \left(\sum_6^{250} X(i) \right)^2 \right]} \sqrt{\left[245 \sum_6^{250} Y(i)^2 - \left(\sum_6^{250} Y(i) \right)^2 \right]}$ 其中 $X(i)$ 和 $Y(i)$ 为两个标的指数的5天对数收益率 已实现相关系数计算式为
文本来源	ISDA
注：	该说明书既不代表购买或出售某证券或诸如期权、互换、远期合约和与场外衍生产品具有相似特征的结构票据等场外衍生品的要约，也不是购买或出售证券或OTC衍生产品的宣传单。说明书中的内容不是特定交易条款的完整描述，其更改不受限制。

图 28-3 一份相关性互换的说明书

离差交易

离差交易 (dispersion trading) 是一个常见的有时可以获利的交易策略。该策略利用了个股期权的组合与个股组合期权 (比如说指数期权) 之间价格的无效

率。这实际上是在交易相关系数。在参数为常数且已知的世界中，指数的波动率与成分股的波动率和相关系数的关系为

$$\sigma_I^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N W_i W_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

其中 W 为每个成分股的权重。^①

离差多头指的是购买个股期权并卖空指数期权。持有该头寸时你希望个股会不时发生大的波动，使得个股期权多头能获利；同时这些波动又不会影响到整体指数。

28.8 阶梯期权

阶梯期权 (ladder option) 是一种离散取样的回溯期权，但不是时间上离散取样，而是在资产价格上。期权回报是给定集合中资产价格最大值的函数。举例说明，阶梯被设定为 5 美元的倍数，即...，50，55，60，65，...。如果在合约存续期内资产价格达到的最大值为 58，那么应该使用的最大值为 55。该期权显然比对应的连续版本要便宜。

该合约可以分解为一组在各阶梯点触发的障碍类期权。也可以使用第 26 章的框架，此时回报为最大值 M 的一个阶梯函数 (见图 28-4)。

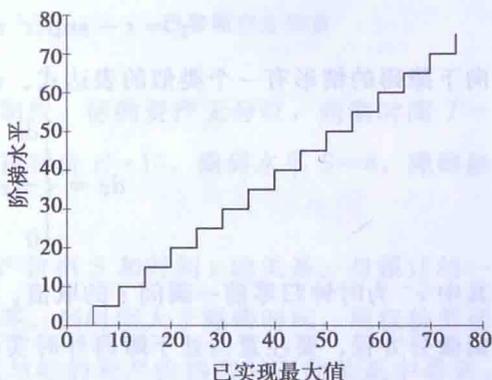


图 28-4 作为已实现最大值函数的阶梯期权的回报

28.9 巴黎期权

巴黎期权 (Parisian option) 是一种障碍期权，其障碍特征 (敲入或敲出) 必须等到标的资产持续超过障碍一段时间之后才会触发。设定更严格的触发条件是为了“平滑”障碍点附近的期权价值 (以及 Delta 和 Gamma)，让对冲更容易一点。这同样使得通过操纵标的资产价格来操纵障碍的触发变得更难。对经典巴黎期权，可以设定一个“时钟”来记录位于障碍之外的时间，当资产价格回到障碍之内就将之归零。在巴黎合约中时钟是不归零的。我们这里只考察前者，对后者

① 这并不十分准确，因为对数正态资产的和不是对数正态分布，但可以近似认为是这样的。

的处理只需做简单的调整。

图 28-5 是一份巴黎期权的示意图。下面的曲线记录了股价位于障碍之上的时间（按比例缩放了）。一旦时间大于 10 天（此处被缩放为 1），障碍就被触发了。

巴黎期权显然是强路径依赖的，但在微分方程框架下可以完美处理。我们不需要记录路径的所有细节，只需要知道资产价格位于障碍之上的时间长度 τ 的取值，对于向上障碍为 S_u 的情形，该变量的定义为

$$\tau = t - \sup\{t' \leq t \mid S(t') \leq S_u\}$$

向下障碍的情形有一个类似的表达式。 τ 的随机微分方程为

$$d\tau = \begin{cases} dt & S > S_u \\ -\tau^- & S = S_u \\ 0 & S < S_u \end{cases}$$

其中 τ^- 为时钟归零前一瞬间 τ 的取值。利用上述方程我们可以推导出期权价值的偏微分方程。要注意当处于障碍外时实际时间 t 和触发时间 τ 是以相同的速度增加的。当 τ 达到 ω 时，障碍被触发。

我们要求解的 V 是 S 、 t 和 τ 三个变量的函数 $V(S, t, \tau)$ 。我们要在两个区域求解 V ：障碍内和障碍外。在障碍内时钟是关闭的，我们要求解的方程为

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

因为在该区域没有对 τ 的依赖（对巴拉期权并非如此）。在障碍外时钟开启，我们要求解的方程为

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

在 $S=S_u$ 处， τ 会归零，因此我们需要施加一个连续性条件

$$V(S_u, t, \tau) = V(S_u, t, 0)$$

现在要写出有触发过（或没有触发过）的情形下到期回报的具体形式。如果障碍在到期时刻 T 还没有被触发，则期权到期回报为 $F(S, \tau)$ 。如果障碍在到期

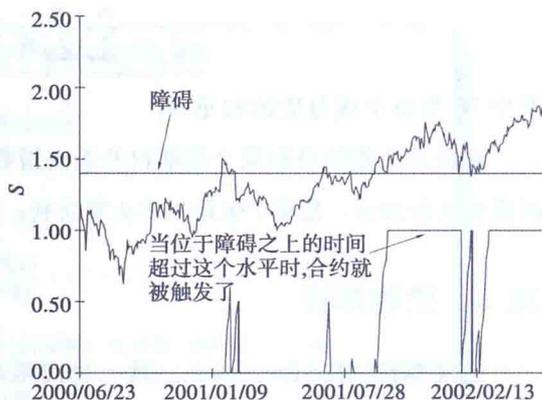


图 28-5 巴黎合约示意图

前被触发过，则到期回报为 $G(S)$ 。比如说，对向上敲入巴黎看跌来说， $F=0$ ， $G=\max(E-S, 0)$ 。对向上敲出看涨来说， $F=\max(S-E, 0)$ ， $G=0$ 。此处敲入和敲出期权的处理方法一样。边界条件为

$$V(S, T, \omega) = G(S)$$

和

$$V(S, T, \tau) = F(S, \tau)$$

美式巴黎期权（亨利·米勒期权）有一个额外的约束条件

$$V(S, t, \tau) \geq A(S, t, \tau)$$

并要求 Delta 的连续性。其中函数 A 定义了提前执行时的回报。

类型	巴黎期权
时间依赖性	无
现金流	无
决策	无
路径依赖性	强/连续
维度	3
阶数	1 (敲出), 2 (敲入)?

巴黎期权分类表

示例

第一个例子是一份向下敲入欧式巴黎期权，标的资产无分红，到期时间 $T=0.25$ 年，波动率 $\sigma=0.2$ ，利率 $r=0.08$ ，执行价 $E=10$ ，障碍水平 $S=8$ ，障碍触发时间 $\omega=0.05$ 。

图 28-6 展示了期权价值 V 与标的资产价格 S 和时间 t 的关系。与预计的一样，当时间小于障碍时间 ω 时期权价值为零。当时间大于障碍时间，期权价值函数看起来相当平滑。这也可以从对冲价值与标的资产价格和时间的关系中看到，如图 28-7 所示。与传统的敲出障碍期权相比，对障碍时间的要求平滑了数据，所以对冲比率处于可管理的合理水平之中。

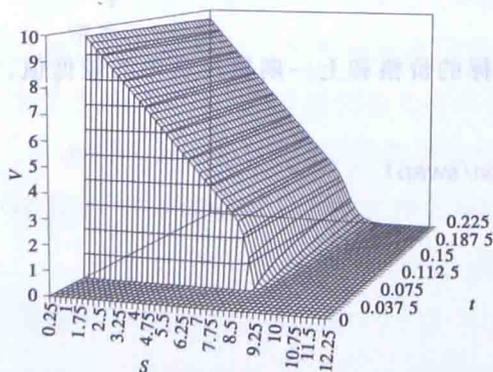


图 28-6 欧式巴黎期权价值（详见正文）

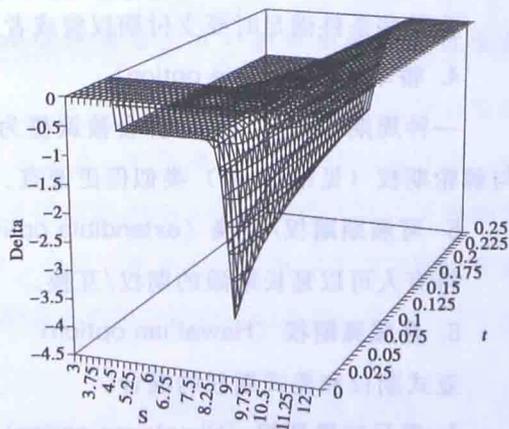


图 28-7 欧式巴黎期权 Delta（详见正文）

要考察的第二个例子是一个更复杂的向上敲出美式巴黎期权，标的资产分
 红率 $D=0.04$ ，到期时间 $T=0.25$ 年，波动率 $\sigma=0.2$ ，利率 $r=0.08$ ，执行价
 $E=8$ ，障碍水平 $S=10$ ，障碍触发时间 $\omega=0.05$ 。该期权的期权价值和对冲比
 率如图 28-8 和图 28-9 所示。

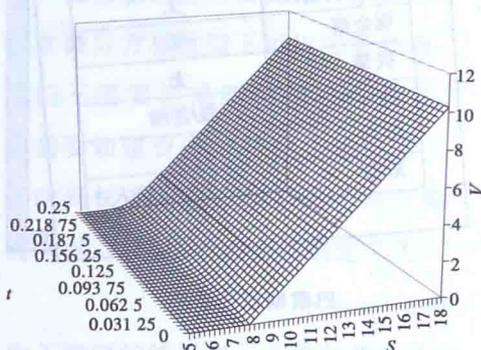


图 28-8 美式巴黎期权价值 (详见正文)

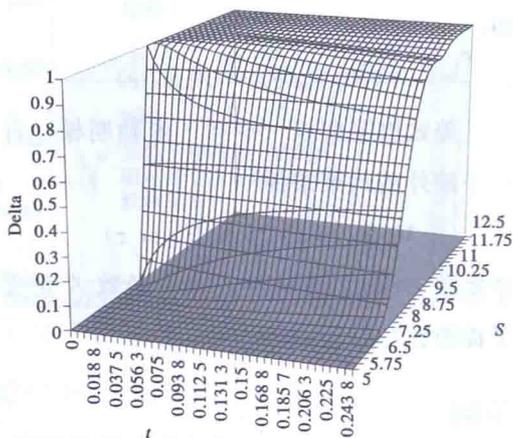


图 28-9 美式巴黎期权 Delta (详见正文)

28.10 更多奇异产品

1. 气球期权 (balloon option)

当特定条件满足时 (比如障碍被触发)，所买的期权数量会增加。

2. 中断/可取消远期 (break/cancelble forward)

一种远期合约，常见于外汇类产品，其持有人可以在某些时间终止合约。

3. 或有期权费期权 (contingent premium option)

在某些条件满足时要支付期权费或者支付额外期权费。

4. 轿车期权 (coupe option)

一种周期性期权，执行价会被调整为标的价格和上一期执行价中的较低值。
 与棘轮期权 (见第 56 章) 类似但更便宜。

5. 可展期期权/互换 (extendible option/swap)

持有人可以延长期限的期权/互换。

6. 夏威夷期权 (Hawai'ian option)

亚式期权和美式期权的混合。

7. 喜马拉雅期权 (Himalayan option)

一种多资产期权，在取样日将表现最好的股票从组合中剔除，到最后只剩下

一种资产来计算回报。还有很多种类似的，如山岭范围期权（mountain range option）。

8. 高收益表现增强反转期权（HYPER option）

高收益表现增强反转期权与美式期权类似，但持有人可以重复执行。每一次执行后期权的看涨或看跌属性互换。要为该期权定价可以为看涨状态和看跌状态各引入一个定价函数，在一定的最优化约束条件下分别求解布莱克 - 斯科尔斯偏微分方程。

28.11 总结

希望阅读了本部分的各章节之后，读者有自信写出许多其他类型的衍生品合约的偏微分方程。在第三部分我们将介绍利率类产品，读者需要将对数正态资产世界中的相关思想转换应用于更复杂的固定收益世界中。

拓展阅读

- Dewynne 和 Wilmott (1994c) 介绍了很多奇异期权及其建模。
- Chesney 等 (1997) 使用拉普拉斯变换方法为巴黎期权定价。
- 使用偏微分方程方法为巴黎期权定价的更详细介绍见 Haber, Schönbucher 和 Wilmott (1997)。巴黎期权定价的完整文档可以从 www.wilmott.com 网站上下载。
- Whaley (1993) 描述了隐含波动率指数及其期权。
- Demeterfi 等 (1999) 有关于波动率合约的大量信息。
- <http://my.dreamwiz.com/stoneq/products> 网站上有一份详细的奇异衍生品清单。



第 29 章

股权和外汇类产品的说明书

本章内容

- 一些奇异产品
- 一些分析
- 一些程序

29.1 引言

本章中我们将详细地考察一些产品的说明书。我们从一个非常简单、几乎不是奇异期权的合约开始，然后逐步推进。我们会分析奇异产品的目的、如何定价，有时候还会提供相关的程序。在阅读了数值方法的章节后你就会明白这些程序的含义。之前也提到过，虽然这些都是真实的说明书，但很多都是不完整的。在我收到它们的时候它们还在修订当中，所以说明书中经常会出现缺失项（比如说 $[\]$ 、 X 或 $?$ 都表示当时尚未确定的变量）。

29.2 或有费用看跌期权

第一份说明书是一个特殊的看跌期权（见图 29-1），标的为标普 500 指数。

在浏览说明书的解释之前请先仔细阅读其中的条款。

标普500指数连接场外期权	
期权类型	欧式看跌期权，含或有期权费特征
期权卖方	× × × ×
期权买方	[交易商名称待考虑]
名义本金	2000万美元
交易日期	[]
到期日	[]
标的指数	标普500
结算方式	现金结算
现金结算日	到期日后5个工作日
现金结算金额	根据下式计算 $\text{合约数} \times \max[0, \text{标普执行价} - \text{标普终值}]$ 其中合约数=名义本金/标普初值
	回报与普通的看跌期权相同： 标普执行价设定为交易日收盘价的95% 标普终值设定为到期日估值时刻标的指数的价格 标普初值设定为实行时的标的指数价格
初始期权费	名义本金的[2%]
初始期权费支付日	交易日后5个工作日
额外期权费	每个触发水平为名义本金的[1.43%]
额外期权费支付日	从交易日至到期日期间（包括交易日和到期日）的任何时刻，若标的指数大于或等于任一触发水平，就需支付额外期权费
触发水平	标普初值的103%、106%和109%
文本来源	ISDA
适用法律	纽约

注：该说明书既不代表购买或出售某证券或诸如期权、互换、远期合约和与场外衍生产品具有相似特征的结构性票据等场外衍生品的要约，也不是购买或出售证券或OTC衍生产品的宣传单。说明书中的内容不是特定交易条款的完整描述，其更改不受限制。

图 29-1 或有费用看跌期权条款说明书

因为标的资产标普 500 指数是一个股票指数，所以我们采用对数正态随机游走的假设。回报形式为

$$\text{合约数} \times \max[0, \text{标普执行价} - \text{标普终值}]$$

用符号表示就是

$$q \max(E - S, 0)$$

其中 q 表示合约数量， E 为执行价。它们都是以合约开始时的标普 500 指数水平

的形式定义的。我们假设 $q=1$, E 为给定值。因为合约中规定执行价为初始价的 95%，所以一开始该期权是一个虚值看跌期权。

现在这还只是一个普通看跌期权。该合约的新特征是当标普 500 指数上升到某些触发水平时期权持有人需要支付额外的期权费。这些触发水平也是以合约开始时的标普 500 指数水平的形式定义的。

该合约实际上没有特别奇异的地方，因为就算是其中的新特征也是可以轻易定价的。真正的奇异产品是不能被分解为简单金融工具的合约，但该合约是可以的。可以将每一个或有

期权费看作（该期权持有人的）普通美式两值看涨期权空头头寸，或者叫作一触即付期权，共有三个，各有不同的执行价。所以我们可以将该合约看作一个看跌期权多头和三个一触即付看涨期权空头来定价。这些合约在布莱克-斯科尔斯框架下都有定价公式。

购买该合约的人可能是因为跟普通看跌期权相比其初始期权费较少，只有在股票价格涨到触发水平以上时才需要支付额外期权费。

29.3 篮子期权

29.3.1 简单篮子期权

图 29-2 是一份相当简明的篮子期权，即多标的期权。回报由三个汇率当中表现第二好的汇率决定。因为只有三个标的资产，所以实际计算中既可以采用蒙特卡罗模拟也可以采用有限差分方法。由于标的都是汇率，所以最好采用对数正态分布为各个汇率建模，且三个汇率之间应该是相关的。在本例中可以得到定价的闭式解，

类 型	或有期权费看跌期权
时间依赖性	无
现金流	无
决策	无
路径依赖性	无
维度	2
阶数	1

或有期权费看跌期权分类表

类 型	简单篮子期权
时间依赖性	无
现金流	无
决策	无
路径依赖性	无
维度	4
阶数	1

简单篮子期权分类表

以三元积分形式给出，所以只需要进行积分就能得到价格。^①使用第 81 章的方法可以轻松快速地得到结果。要注意，因为标的为汇率，所以需要调整以反映外国的利率。最后，还需要输入三个相关系数，所以要注意模型的稳定性问题。

“三色旗”保本中期债券	
发行者	x x x x
名义本金	1亿法郎
发行价格	98.75%
到期日	发行日后12个月
息票	0
赎回金额	如果下面三个指数增长幅度中的两个在到期日为正，该债券以增长幅度第二高的货币赎回；如果不是这样，将按平价以法郎赎回。如果赎回货币非法郎，其金额为将法郎名义本金数额按照发行日当天的即期汇率换算得到的外国货币金额
	$\frac{\text{USD/FRF}-6.075\ 0}{6.075\ 0} ; \frac{\text{USD/FRF}-10.200\ 0}{10.200\ 0} ;$ $\frac{\text{JPY/FRF}-0.051\ 20}{0.051\ 20}$
<p>注：该说明书既不代表购买或出售某证券或诸如期权、互换、远期合约和与场外衍生产品具有相似特征的结构票据等场外衍生品的要约，也不是购买或出售证券或OTC衍生产品的宣传单。说明书中的内容不是特定交易条款的完整描述，其更改不受限制。</p>	

图 29-2 篮子期权说明书（3 个标的资产）

29.3.2 时间上取平均的篮子期权

下一个说明书是另一个篮子期权，如图 29-3 所示。这次有 20 个标的资产。由于股票来自不同的国家，所以牵涉不同的货币，这也增加了合约的复杂程度。所以该合约是多币种期权。合约的回报是由特定取样日的资产价格平均值决定的，这使得合约具有某种亚式特征。最后，还有“互换”支付在里面，但这些支付很容易从定价过程中剥离出来单独处理。

该合约是几维的？每个股票和汇率算一维，20 个平均值各一维，当然还要加上时间。

毫无疑问定价必须通过对资产价格的风险中性路径进行模拟来完成。你需要模拟整条路径，因为合约牵涉平均值的计算。想使用有限差分方法求解是不现实的。

^① 如果可以提前执行就不行了。

国际医药股篮子互换	
指示项	[]
交易日期	[]
起始估值日	[]
生效日	[]
最终估值日	2002年9月26日
取平均日	从2002年3月26日开始至到期日为止 (含到期日)的每个起始估值日的整月
名义本金	2 500万美元
对手方浮动金额 (美元LIBOR)	[]
浮动利率支付方	美元LIBOR
浮动利率指数	3个月
指定到期期限	-0.25%
价差	实际/360
日期计算规则	生效日起的每个整季
浮动利率支付日	[]
初始浮动利率指数	[]
银行方的固定和浮 动金额(费用、股 权期权)	
固定金额支付方	××××
固定金额	名义本金的1.30%
固定金额支付日	生效日
篮子组成	由20只股票组成,成分和组合方式见附录
起始篮子水平	在起始估值日被设定为100
浮动股权金额支付方	××××
浮动股权金额	按一篮子股票的表现,根据下式计算 $\text{名义本金} \times \max \left[0, \left(\frac{\text{篮子}_{\text{平均}} - 100}{100} \right) \right]$ 其中 $\text{篮子}_{\text{平均}} = 100 \times \sum_{20\text{只股票}} \left(\text{权重} \times \frac{P_{\text{平均}}}{P_{\text{初始}}} \right)$ 权重见附录 $P_{\text{初始}}$ 是起始估值日每只股票的本币价格 $P_{\text{平均}}$ 是在每个取平均日每只股票本币价格的算术平均
浮动股权金额支付日	终止日
附录	
下面每只股票的权重相等(均为5%):	
	Astra (Sweden), Glaxo Wellcome (UK), Smithkline Beecham (UK), Zeneca Group (UK), Novartis (Switzerland), Roche Holding Genus (Switzerland), Sanofi (France), Synthelabo (France), Bayer (Germany), Abbott Labs (US), Bristol Myers Squibb (US), American Home Products (US), Amgen (US), Eli Lilly (US), Medtronic (US), Merck (US), Pfizer (US), Schering-Plough (US), Sankyo (Japan), Takeda Chemical (Japan).
	注:该说明书既不代表购买或出售某证券或诸如期权、互换、远期合约和与场外衍生产品具有相似特征的结构性价据等场外衍生品的要约,也不是购买或出售证券或OTC衍生产品的宣传单。说明书中的内容不是特定交易条款的完整描述,其更改不受限制。

图 29-3 篮子期权说明书(20个标的资产)

有如此多的标的资产,既有股票价格还有汇率,需要输入到对数正态模型中的参数非常多。当因子数量为 N 时需要 N 个波动率和 $N(N-1)/2$ 个相关系数。

我们知道相关系数是十分不稳定的。所以存在无用输入/无用输出的问题。也许将参数的数目减少到可处理和更稳定的水平是一个理性的选择。

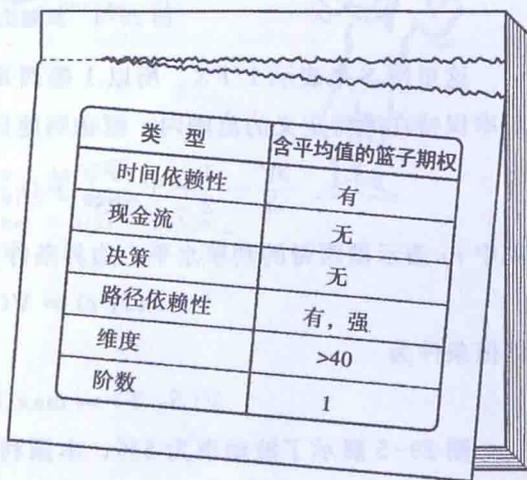
说明书设定了两种取平均的方式：按路径的和股票之间的。取平均是一个平滑化操作，会降低期权价值对模型的依赖程度。可以将之与依赖标的资产间价差的合约做比较。在那些合约中你必须要对标的资产之间的不同点建模，这比为标的资产的平均表现建模要难得多。具体而言，想象你要定价的两个期权回报分别为

$$\max(S_1 + S_2 + \dots + S_N - E, 0)$$

和

$$\max(S_1 - E_1, S_2 - E_2, \dots, S_N - E_N, 0)$$

后者对每只股票的敏感性要比前者高得多得多。事实上前者就像一个指数期权。通过两者的比较我们知道现在要定价的这个篮子期权还没有难到无可救药的程度。一个可以做的简化性近似是将每种货币的股票看作一个“资产/篮子”。这样做可以极大地减少输入变量的数目，例如可以将合约中牵涉的所有美国资产用一个代表性“指数”来代替。



类型	含平均值的篮子期权
时间依赖性	有
现金流	无
决策	无
路径依赖性	有, 强
维度	>40
阶数	1

含平均值的篮子期权分类表

29.4 敲出期权

29.4.1 双敲出

图 29-4 是一个很基础的双敲出期权的说明书。标的资产是一个汇率，所以要注意在控制方程中对外国利率的处理。毫无疑问应该使用有限差分方法定价。由于维度很低，所以使用模拟的方法定价意义不大。模拟通常会更慢也更不灵活。

该期权的回报为

$$\max(8.25S - 1, 0)$$

美元/墨西哥比索双敲出中期债券

名义本金	1 000万美元
发行人	× × × ×
到期日	交易日后6个月
发行价	100%
息票	如果美元/墨西哥比索的即期汇率在存续期间曾高于上障碍或低于下障碍, 则为0 否则为: $400\% \times \max\left(0, \frac{8.2500 - FX}{FX}\right)$
赎回价格	100%
上障碍水平	8.2500
下障碍水平	7.4500

其中FX为到期日美元/墨西哥比索的即期汇率

注: 该说明书既不代表购买或出售某证券或诸如期权、互换、远期合约和与场外衍生产品具有相似特征的结构性票据等场外衍生品的要约, 也不是购买或出售证券或OTC衍生产品的宣传单。说明书中的内容不是特定交易条款的完整描述, 其更改不受限制。

图 29-4 双敲出期权说明书

这里用 S 来表示 $1/FX$ 。所以 1 墨西哥比索 = S 美元。该合约的持有者希望汇率保持在障碍定义的范围内, 但在到期日要越接近 $1/7.45$ 越好。我们要求解

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - r_f) S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

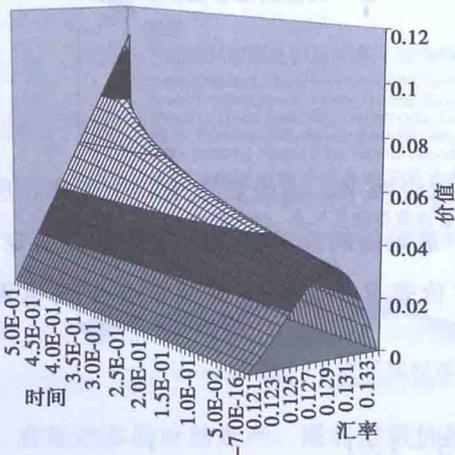
其中 r_f 表示墨西哥的利率水平。边界条件为

$$V(7.45, t) = V(8.45, t) = 0$$

终值条件为

$$V(S, T) = \max(8.25S - 1, 0)$$

图 29-5 展示了波动率为 5%, 本国利率为 5%, 外国利率为 8% 的情况下该合约的定价结果。



类型	双敲出期权
时间依赖性	无
现金流	无
决策	无
路径依赖性	有, 弱
维度	2
阶数	1

图 29-5 双敲出期权定价结果

双敲出期权分类表

下面是该定价过程的一个简单的显性有限差分的程序。在使用它们之前请先阅读有关数值方法的章节。

```
Function DoubleKO(Vol, Int_Rate, For_Int_Rate, _
    Lower_Barrier, Upper_Barrier, Strike, _
    Expiration, Qty, NAS)

ReDim S(0 To NAS) As Double

dS = (Upper_Barrier - Lower_Barrier) / NAS
dt = 0.9 * dS * dS / Vol / Vol / Upper_Barrier _
    / Upper_Barrier

NTS = Int(Expiration / dt) + 1
dt = Expiration / NTS

ReDim V(0 To NAS, 0 To NTS)

For i = 0 To NAS
    S(i) = i * dS + Lower_Barrier
    V(i, 0) = Qty * Application.Max(S(i) - Strike, 0)
Next i

For j = 1 To NTS
    For i = 1 To NAS - 1
        Delta = (V(i + 1, j - 1) - V(i - 1, j - 1)) / 2 / dS
        Gamma = (V(i + 1, j - 1) - 2 * V(i, j - 1) _
            + V(i - 1, j - 1)) / dS / dS
        Theta = -0.5 * Vol * Vol * S(i) * S(i) * Gamma - _
            (Int_Rate - For_Int_Rate) * S(i) * Delta _
            + Int_Rate * V(i, j - 1)
        V(i, j) = V(i, j - 1) - dt * Theta
    Next i
    V(0, j) = 0
    V(NAS, j) = 0
Next j

DoubleKO = V

End Function
```



29.4.2 分期付款敲出期权

下一份合约是本章第一个需要持有人决策的合约。这是一个向上敲出看跌期权，特殊点在于期权费不是一次付清的，是在期权存续期内分期支付（见图 29-6）。这些分期的支付是可选的，这意味着如果持有人不愿意他可以停止支付，当然这样做会使得期权失效。

该合约的定价最好使用布莱克-斯科尔斯偏微分方程进行有限差分求解。终值条件由看跌期权的回报给出

$$V(S, T) = \max(E - S, 0)$$

加上常见的敲出边界条件

$$V(S_u, t) = 0$$

其中 S_u 为障碍水平。

美元/日元敲出分期付款期权	
名义本金	5 000万美元
期权类型	133.25 (平价) 美元看跌/日元看涨 带敲出和分期付款
到期日	交易日后6个月
敲出机制	如果银行间市场上的USD/JPY即期汇率大于或等于140日元/美元, 合约自动取消, 双方不再有进一步的权利或义务
首付款期权费	1.50日元/美元
分期付款	1.50日元/美元, 从交易起每月支付 (共5次)
分期付款机制	只要持续支付分期付款期权费, 合约将保持有效, 但合约方有权终止支付分期付款期权费, 若如此做则期权立即取消
即期汇率参考值	133.25日元/美元

注: 该说明书既不代表购买或出售某证券或诸如期权、互换、远期合约和与场外衍生产品具有相似特征的结构票据等场外衍生品的要约, 也不是购买或出售证券或OTC衍生产品的宣传单。说明书中的内容不是特定交易条款的完整描述, 其更改不受限制。

图 29-6 分期付款敲出期权说明书

想象一下你从到期日开始向前求解, 倒推到了正好位于最后一次分期付款后的那个时点。到目前为止都与求解简单的向上敲出看跌期权一样。现在思考一下再往前推一步到达最后一次分期付款发生前的时点, 这一过程中会发生什么。我们知道在该日可能会发生 1.50 的期权费支付。如果的确支付了期权费, 则支付日前后的合约价格会相差 1.50。如果你购买了一辆分期付款的小轿车, 与还需支付最后一期的费用的车相比不需要再支付费用的车显然更好。所以, 合约在最后一期费用支付前的价值要低于支付后的价值

$$V(S, t_i^-) = V(S, t_i^+) - 1.50$$

但是, 在本合约中未必如此, 因为每一期的支付都是可选的。有可能支付日后的合约价值仅为 1.00。如果是这样你是不会愿意为仅值 1.00 的东西支付 1.50 的。假设会这样做没有任何经济意义。在这种情形下你宁愿停止支付并放弃该期权。

类型	分期付款敲出期权
时间依赖性	有
现金流	有
决策	有
路径依赖性	有, 弱
维度	2
阶数	1

分期付款敲出期权分类表

所以基本的原理就是当付费前的合约价值为负时你不会支付该次的分期付款期权费

$$V(S, t_i^-) = \max(V(S, t_i^+) - 1.50, 0)$$

该结论的演示见图 29-7。先来看图中的两条粗线。其中的虚线代表了付款后的时点 $t=0.418$ ，实线代表了付款前的时点 $t=0.417$ 。注意两者在横轴上方的部分相差了 1.50。实线比虚线低了 1.50，但是被坐标轴截断了。如果在 0.417 时点资产价格大于约 137 的水平，那么支付 1.50 的期权费是不明智的，这样做就像是买了一辆价值仅为 100 美元的车却花了 150 美元。

从图 29-8 中可以看到，这种时间上的倒推是如何进行的。这是一个合约价值对股票价格和时间的三维图。可以看到合约价值会经常发生跳跃。下面是有限差分程序。

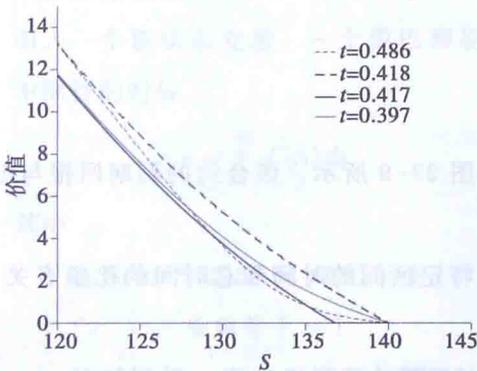


图 29-7 分期付款敲出期权价值在支付前和支付后的变化

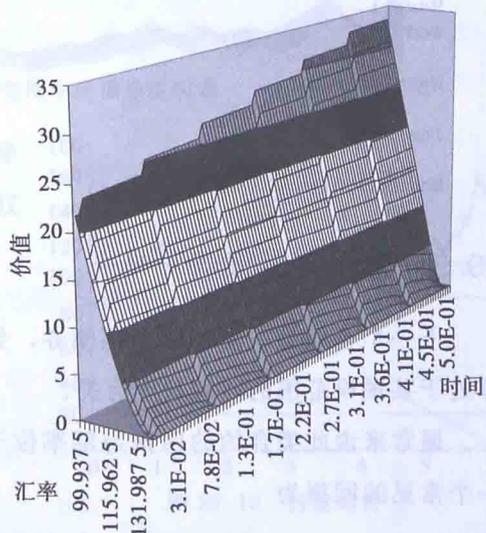


图 29-8 分期付款敲出期权求解

```
Function InstalmentKO(Vol, Int_Rate, For_Int_Rate, _
    Upper_Barrier, Strike, Expiration, Paymnt, Freq, NAS)

ReDim S(0 To NAS) As Double

Lower_Limit = 3 * Strike / 4
dS = (Upper_Barrier - Lower_Limit) / NAS
dt = 0.9 * dS * dS / Vol / Vol / Upper_Barrier / Upper_Barrier

NTS = Int(Expiration / dt) + 1
dt = Expiration / NTS

ReDim V(0 To NAS, 0 To NTS)
```

```

For i = 0 To NAS
S(i) = i * dS + Lower_Limit
V(i, 0) = Application.Max(Strike - S(i), 0)
Next i
For j = 1 To NTS
For i = 1 To NAS - 1
Delta = (V(i + 1, j - 1) - V(i - 1, j - 1)) / 2 / dS
Gamma = (V(i + 1, j - 1) - 2 * V(i, j - 1) + V(i - 1, j - 1)) / dS / dS
Theta = -0.5 * Vol * Vol * S(i) * S(i) * Gamma - (Int_Rate - For_Int_Rate) * S(i) * Delta + Int_Rate * V(i, j - 1)
V(i, j) = V(i, j - 1) - dt * Theta
Next i
V(0, j) = 2 * V(1, j) - V(2, j)
V(NAS, j) = 0

' Test for payment date
If Int((j + 1) * dt / Freq) - Int(j * dt / Freq) > 0 Then
For i = 0 To NAS
V(i, j) = Application.Max(V(i, j) - Paymnt, 0)
Next i
End If

Next j

InstalmentKO = V

End Function

```



29.5 范围中期债券

下一个合约是一份范围中期债券，如图 29-9 所示。该合约的到期回报与汇率处于某预设范围的时间长度有关。

通常来说此类合约的回报与汇率位于特定区间的时间和总时间的比值有关。一个常见的回报为

$$\frac{\text{在范围内的天数}}{\text{总天数}}$$

这样的合约只有弱路径依赖性。有几种等价的定价方法：①在布莱克-斯科尔斯方程中增加一个源项，用以表示现金积累（要小心使用，如果支付要等到到期日才会发生，需要进行一些贴现处理）；②视作两值期权的（无穷）积分处理（这是一个罕见的可以将一个合约分解为其他合约的例子）；③引入一个新的状态变量。我们这里采用最后一种方法来处理该合约。

合约最后写到“最低不得小于 0”，看起来很简单的条款，但是却使得合约具

⊖ 与以前一样，我并不热衷于此类“特例”，因为合约小小的变化就会造成此类分解不可用。

6个月期内减外MXN/USD汇率范围累积期权

结算日	交易日后1周
到期日	交易日后6个月
期权费	不少于5万美元
期权类型	内减外MXN/USD汇率范围累积
期权支付日	到期日前2个工作日
期权支付	125 000美元 × 指数
其中指数为	$\frac{\text{汇率在范围内的天数} - \text{汇率在范围外的天数}}{\text{总交易天数}}$ (最小为0)
汇率在范围内的天数	MXN/USD汇率处于规定范围内的工作日天数
汇率在范围外的天数	MXN/USD汇率处于规定范围外的工作日天数
规定范围	MXU/USD 7.720 0 ~ 8.130 0
MXN/USD即期汇率	墨西哥银行确定的官方即期汇率，见纽约时间下午3点的路透社终端“BNMX”页
当前即期汇率	7.780 0

注：该说明书既不代表购买或出售某证券或诸如期权、互换、远期合约和与场外衍生产品具有相似特征的结构票据等场外衍生产品的要约，也不是购买或出售证券或OTC衍生产品的宣传单。说明书中的内容不是特定交易条款的完整描述，其更改不受限制。

图 29-9 内减外范围中期债券说明书

备了强路径依赖性质。要正确定价需要引入一个新状态变量，一个像巴黎期权中那样的时钟

$$\tau = \int_0^t f(S) dt$$

其中

当 $S_l \leq S \leq S_u$ 时 $f(S) = +1$,

否则等于 -1

该时钟的一天实现路径如图 29-10

所示。本例中的规定范围在图中为 90 和 110。

在 τ 的该定义下，控制偏微分方程为

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S}$$

$$-rV + f(S) \frac{\partial V}{\partial \tau} = 0$$

终值条件为

$$V(S, T, \tau) = \max(\tau, 0)$$

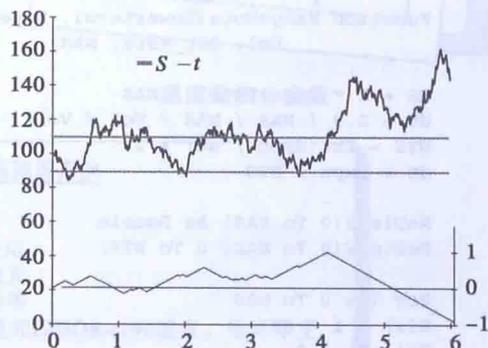


图 29-10 行动时钟

类型	范围中期债券
时间依赖性	无
现金流	无
决策	无
路径依赖性	有，强
维度	3
阶数	1

范围中期债券分类表

最简单的范围中期债券

如果合约回报为

$\frac{\text{处于范围内的天数}}{\text{总天数}}$

并且没有“最低不得小于0”的限制，那定价会容易得多，因为此时仅有弱路径依赖性（见后面的程序和图 29-11）。[⊖] 本合约中每当资产价格位于 LowerLevel 和 UpperLevel 之间 dy 时间，就累积 dt 的利润，但是该利润要到到期才会支付（所以你会看到那个“源项”有一个贴现系数）。

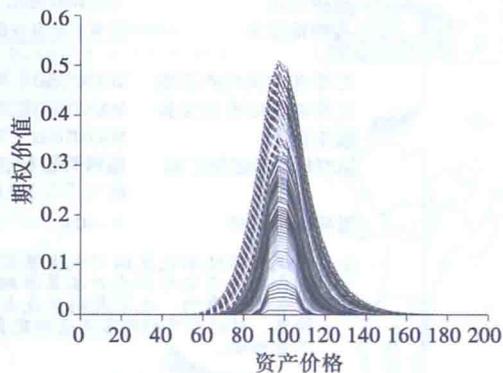


图 29-11 随时间变化的简单范围中期债券定价结果。上下界分别为 110 和 90，期限 1 年， $r=0.05$ ， $\sigma=0.2$

```
Function RangeNote(LowerLevel, UpperLevel, Expn, _
                   Vol, Int_Rate, NAS)
```

```
    dS = 2 * UpperLevel / NAS
    dt = 0.9 / NAS / NAS / Vol / Vol
    NTS = Int(Expn / dt) + 1
    dt = Expn / NTS
```

```
    ReDim S(0 To NAS) As Double
    ReDim V(0 To NAS, 0 To NTS)
```

```
    For i = 0 To NAS
        S(i) = i * dS
        V(i, 0) = 0
    Next i
```

```
    For j = 1 To NTS
        For i = 1 To NAS - 1
            Delta = (V(i + 1, j - 1) - V(i - 1, j - 1)) / 2 / dS
            Gamma = (V(i + 1, j - 1) - 2 * V(i, j - 1) + V(i - 1,
                j - 1)) / dS / dS
            Theta = -0.5 * Vol * Vol * S(i) * S(i) * Gamma -
                Int_Rate * S(i) * Delta + Int_Rate * V(i, j - 1) -
                F(S(i), LowerLevel, UpperLevel) * Exp(-Int_Rate * j * dt)
            ' 源项，在到期日支付。
            V(i, j) = V(i, j - 1) - dt * Theta
        Next i
    Next j
```



⊖ 你可以将该合约分解为一系列数值期权。在此我不这样操作是因为稍后要用到非线性定价模型，那时这样的分解是不可行的。

```

V(0, j) = V(0, j - 1) * (1 - Int_Rate * dt)
V(NAS, j) = 2 * V(NAS - 1, j) - V(NAS - 2, j)
Next j

RangeNote = V

End Function

Function F(S, LowerLevel, UpperLevel) As Double
If S > LowerLevel And S < UpperLevel Then F = 1
End Function
    
```

29.6 回溯期权

图 29-12 是一个相当普通的回溯期权的说明书，可参考第 26 章。有两点需要注意的。首先，该回溯期权是连续取样的：这跟通常的情况稍有不同。其次，该合约含有互换的因素，但是相关成分很容易剥离出来单独处理。

类 型	回溯期权
时间依赖性	无
现金流	无
决策	无
路径依赖性	有, 强
维度	3
阶数	1

回溯期权分类表

图 29-13 展示了另一份回溯期权，这次是离散抽样的。

美元/德国马克回溯互换

交易方	A方 客户
名义本金	5 000 万美元
结算日	交易日后 2 天
到期日	交易日后 2 年
客户支付	6 个月期美元 LIBOR + 190 基点，每半年支付 1 次
A 方支付	到期支付 (美元) $\text{名义本金} \times \left(\frac{FX_{\text{最大}} - \text{协议价}}{FX_{\text{到期}}} - 1 \right)$
$FX_{\text{最大}}$	结算日至到期日美元/德国马克汇率官方每日定盘价的最高值
$FX_{\text{到期}}$	结算日美元/德国马克汇率官方定盘价
协议价	1.718 0
定盘价	每天的美分/德国马克汇率，见纽约时间中午德励财经 SAFE1 页
6 个月期美元 LIBOR	每个定盘日的 6 个月期美元 LIBOR，见伦敦时间中午德励财经第 3 750 页
文本来源	ISDA
适用法律	英国

注：该说明书既不代表购买或出售某证券或诸如期权、互换、远期合约和与场外衍生产品具有相似特征的结构票据等场外衍生品的要约，也不是购买或出售证券或 OTC 衍生产品的宣传单。说明书中的内容不是特定交易条款的完整描述，其更改不受限制。

图 29-12 回溯期权说明书

SPX回溯看涨期权	
交易方	A方
结算日	客户
到期日	交易日后2天
A方支付	交易日后1年
	到期支付(美元)
	$100\,000 \times (SPX_{\max} - SPX_{\text{final}}, 0)$
SPX_{\max}	期权到期前的SPX(每月)最高收盘价
SPX_{final}	到期日的SPX收盘价
文本来源	ISDA
适用法律	英国
注: 该说明书既不代表购买或出售某证券或诸如期权、互换、远期合约和与场外衍生产品具有相似特征的结构票据等场外衍生产品的要约, 也不是购买或出售证券或OTC衍生产品的宣传单。说明书中的内容不是特定交易条款的完整描述, 其更改不受限制。	

图 29-13 回溯期权说明书, 离散取样

该回溯期权的价格是股票价格 S 、已实

现最大值 M 和时间 t 的函数 $V(S, M, t)$ 。它满足布莱克 - 斯科尔斯方程

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

代表回报的终值条件为

$$V(S, M, T) = \max(M - S, 0)$$

如果最大值取样时点为 t_i , 那么跳跃条件为

$$V(S, M, t_i^-) = V(S, \max(S, M), t_i^+)$$

该问题有一个相似性简化解 (只要波动率不依赖于 S), 其形式为

$$V(S, M, t) = MH(\xi, t)$$

其中

$$\xi = \frac{S}{M}$$

此时控制方程变为

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \xi^2 \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} + r\xi \frac{\partial H}{\partial \xi} - rH = 0$$

终值条件变为

$$H(\xi, T) = \max(1 - \xi, 0)$$

跳跃条件变为

$$H(\xi, t_i^-) = \max(\xi, 1) H\left(\frac{\xi}{\max(\xi, 1)}, t_i^+\right)$$

图 29-14 展示了该合约的定价结果，定价程序如下：

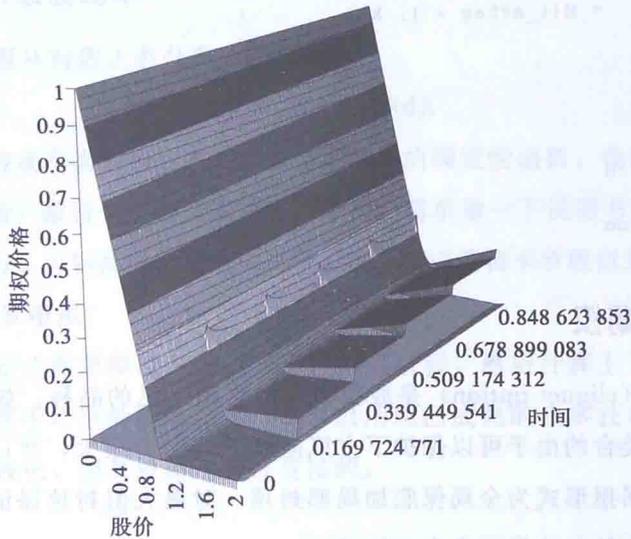


图 29-14 回溯期权定价结果

```
Function Lookback(Vol, IntRate, Expiration, FixPer, NXS)
```

```
dx = 2 / NXS
dt = 0.9 / NXS ^ 2 / Vol ^ 2
NTS = Int(Expiration / dt) + 1
dt = Expiration / NTS
```

```
ReDim X(0 To NXS)
ReDim H(0 To NXS, 0 To NTS)
```

```
For i = 0 To NXS
X(i) = i * dx
H(i, 0) = Application.Max(1 - X(i), 0)
Next i
```

```
For k = 1 To NTS
For i = 1 To NXS - 1
Delta = (H(i + 1, k - 1) - H(i - 1, k - 1)) / 2 / dx
Gamma = (H(i + 1, k - 1) - 2 * H(i, k - 1) + H(i - 1, k - 1)) / dx / dx
Theta = -0.5 * Vol ^ 2 * X(i) ^ 2 * Gamma -
IntRate * X(i) * Delta + IntRate * H(i, k - 1)
```

```
H(i, k) = H(i, k - 1) - Theta * dt
Next i
H(0, k) = H(0, k - 1) * (1 - IntRate * dt)
H(NXS, k) = 2 * H(NXS - 1, k) - H(NXS - 2, k)
```

```
If Int(k * dt / FixPer) <> Int((k + 1) * dt / FixPer) Then
```

```
For i = 0 To NXS
M = Application.Max(X(i), 1)
X_after = X(i) / M
i_after = Int(X_after / dx)
```



```

Frac = (i_after * dX - X_after) / dX
H(i, k) = M * ((1 - Frac) * H(i_after, k) + Frac *
              * H(i_after + 1, k))
Next i
End If

Next k

Lookback = H

End Function

```

29.7 棘轮期权

棘轮期权 (cliquet option) 是股权衍生品中很常见的品种。如图 29-15 的说明书所示, 这类合约由于可以保护下方风险且上升潜力很大, 所以很受投资者青睐。本例中的回报形式为全局保底加局部封顶, 对最大值封顶保证了回报不会高得离谱, 因此合约的价值不会走向极端。

从卖方的角度看, 如果已经进行了 Delta 对冲来最小化市场风险, 剩下的主要暴露就是波动率风险。但该合约对波动率模型有一个非常微妙的依赖。因此我会用第 56 章整章来对此进行分析。在这里我只简要地介绍在简单的常数波动率世界中的定价过程。

AEX指数5年期最小息票棘轮期权	
期权买方	XXXX
期权卖方	YYYY
名义本金	2 500万欧元
交易日	2000年12月20日
起始日	2001年1月31日
到期日	起始日+5年
卖方到期支付	名义本金*
	$\max\left(\sum_{i=1}^5 \max\left(0, \min\left(\text{Cap}, \frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}}\right)\right)\right), 16.25\%$
指数	AEX指数
封顶	8%
期权费	?
指数水平	$S_i =$ 起始日+i年的收盘指数水平
注: 该说明书既不代表购买或出售某证券或诸如期权、互换、远期合约和与场外衍生产品具有相似特征的结构票据等场外衍生品的要约, 也不是购买或出售证券或OTC衍生产品的宣传单。说明书中的内容不是特定交易条款的完整描述, 其更改不受限制。	

图 29-15 棘轮期权的说明书

路径依赖，常数波动率

标的资产服从对数正态分布

$$dS = \mu S dt + \sigma S dX$$

暂时假设波动率为常数，或者最多为 S 和 t 的确定性函数，我们可以用两种最常用的方法定价：蒙特卡罗模拟和偏微分方程。简单看一下说明书可以发现，该合约没有提前执行、可转换或者其他可决策过程，所以蒙特卡罗模拟是可行的。

1. 蒙特卡罗模拟

蒙特卡罗定价要求模拟 S 的风险中性随机过程，然后计算上万次路径的合约回报，再求回报平均值的现值。该过程可以用现已成熟的众多技术加速。希腊字母的计算耗时较长，但其思路还是很直接的。

2. PDE

要推导有限差分方法要用到的偏微分方程，需要先判断期权的路径依赖量的数量并计算维度。这很容易。

在几乎所有的问题中 S 和 t 总是问题的两个给定维度。要跟踪本例中的期权回报的可能路径，我们还需要两个新的“状态变量”

$$S' \text{ 和 } Q$$

其中

$$S' = \text{上一个定盘日的 } S \text{ 值} = S_i$$

而

$$Q = \text{最大值函数里面的求和式至今日为止的值}$$

$$= \sum_{j=1}^i \max\left(0, \min\left(\text{Cap}, \frac{S_j - S_{j-1}}{S_{j-1}}\right)\right)$$

这里我用 i 表示当前时刻 t 的前一个定盘日。图 29-16 清楚地展示了这一点。

因为 S' 和 Q 是离散更新的，所以在每个定盘日， $V(S, t, S', Q)$ 的定价方程为

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

其中 r 为无风险利率。换句话说，就是普通的布莱克 - 斯科尔斯方程。变化在于 V

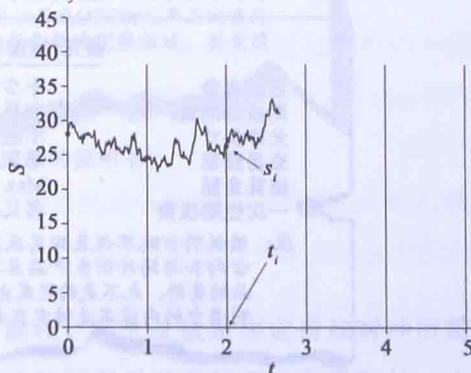


图 29-16 计算棘轮期权回报

是四个变量的函数，必须满足跨越定盘日的跳跃条件

$$V(S, t_i^-, S', Q) = V\left(S, t_i^+, S, Q + \min\left(E_1, \frac{S - S'}{S'}\right)\right)$$

以及终值条件

$$V(S, T, S', Q) = \max(Q, E_2)$$

其中 E_1 为局部封顶值， E_2 为全局保底值（可以想象更一般的回报结构是怎样的）。

作为一个四维问题，要判断到底蒙特卡罗模拟和有限元方法哪个求解更快只能靠猜了。但基于回报的结构和对数正态分布的假设，可能可以进行相似性降维将问题变为三维，那么使用有限差分方法就会有一定优势。相似性变量为

$$\xi = \frac{S}{S'}$$

此时期权价格是 ξ ， t 和 Q 三者的函数。 $V(\xi, t, Q)$ 的控制方程变为

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2\xi^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + r\xi \frac{\partial V}{\partial \xi} - rV = 0$$

跳跃条件变为

$$V(\xi, t_i^-, Q) = V(1, t_i^+, Q + \min(E_1, \xi - 1))$$

而终值条件变为

$$V(\xi, T, Q) = \max(Q, E_2)$$

类型	棘轮期权
时间依赖性	有
现金流	无
决策	无
路径依赖性	有，强
维度	4
阶数	1

棘轮期权分类表

29.8 通行证期权

图 29-17 所示的第 1 份通行证期权是相当标准的。合约对每天的交易次数有

美元/德国马克“完美交易员”期权	
名义本金	不少于 2 500 万欧元
期权到期日	交易日后 3 个月
允许头寸	不超过名义本金的多头或空头
交易频率	每天最多 2 次
结算金额	Max(0, 德国马克计价的交易累积损益)
一次性期权费	名义本金的 3.35%
注：该说明书既不代表购买或出售某证券或诸如期权、互换、远期合约和与场外衍生产品具有相似特征的结构票据等场外衍生产品的要约，也不是购买或出售证券或 OTC 衍生产品的宣传单。说明书中的内容不是特定交易条款的完整描述，其更改不受限制。	

图 29-17 通行证期权的说明书

限制，但这对价格的影响不大。通常期权持有人在交易标的资产时需要支付买卖价差，所以这一点不会影响期权的价格。

图 29-18 所示的第 2 份通行证期权要更复杂一点。持有人拥有对两份标的资产交易受损的保险。该合约的特异之处在于交易者在某个时点只能持有其中一个标的资产的头寸，不能同时持有两个。

BUND/BTP期货接18月期“双通行证”中期债券	
总本金	5 000万德国马克
交易日	1998年1月[]
发行日	1998年1月20日
结算日	1998年1月20日
期权到期日	1999年7月20日
发行价	100%
赎回价	102.5%+名义收入
	其中“名义收入”为每次交易的名义损益累积和
计算公式	$\max \left[\sum_{i=1}^{N_1} U_i \times (\text{Price}_i - \text{Price}_{i-1}) \times 25 \times 100 \right] + \left[\sum_{j=1}^{N_2} V_j \times (\text{Price}_j - \text{Price}_{j-1}) \times 20\,000 \times 100 \right] / FX$
其中	N_1 为期权存续期间在BUND上的交易次数 N_2 为期权存续期间在BTP上的交易次数 U 为在BUND上的头寸 V 为在BTP上的头寸 FX 等于期权到期日市场上的DEM/ITL汇率 $Price$ 指的是每次交易的参考价格
息票	0
期权到期日	发行日后6个月+2个工作日
头寸	债券持有人可以持有BUND期货指数或BTP期货指数的非零头寸并在二者之间转换。债券持有人不得同时持有两者的头寸。持有BUND的头寸在正负190单位之间。持有BTP的头寸在正负200单位之间
交易频率	每天最多4次
指数单位	指数单位为LIFFE BUND期货或LIFFE BTP期货合约。当前参考为1998年3月份合约，到该合约可交割时债券持有人必须平仓该合约头寸并进入1998年6月合约的交易。一旦1998年6月合约可交割，债券持有人必须平仓并进入1998年9月合约进行交易
注：	该说明书既不代表购买或出售某证券或诸如期权、互换、远期合约和与场外衍生产品具有相似特征的结构票据等场外衍生品的要约，也不是购买或出售证券或OTC衍生产品的宣传单。说明书中的内容不是特定交易条款的完整描述，其更改不受限制。

图 29-18 双通行证期权的说明书

29.9 将奇异期权分解为普通期权

如果一份合约可以分解为更简单的普通期权，那么这就是你定价和对冲所需要做的所有工作。如果不能完美分解，尝试进行某种近似分解是非常危险的。上

面的棘轮期权是一个很好的例子。看起来构成该产品的基石就是普通看涨差价组合，但是在可选择条款上的细微变化，比如说修改保底条款，就可能严重地影响分解的效果。这也是为何我们会用第 56 章一整章来仔细研究棘轮期权及其价格对波动率模型的依赖。

因为奇异结构太多，且处于不断增长之中，我觉得使用普通期权来分析奇异产品是徒劳的。这是我们给出期权分类表的原因，我们希望这能帮助你用数学的语言来思考新产品。

第三部分

固定收益的建模和衍生品

本部分介绍利率的随机模型，并针对各种产品推导模型。

本部分使用的数学基本与之前用到的一样。我们会再次应用对冲和无套利的思想。但是，与股权类工具相比，固定收益产品的定价和对冲在技术上要更复杂。一个原因是短期利率这一建模的标的本身并不是一个可交易的变量。所以我们必须引入一个容易引起误解的变量——利率风险的市场价格。

第 30 章：单因子利率建模 利率跟股票价格一样是不可预知的。因此我会介绍如何将它们建模成随机变量。我们的主要思路是对短期利率建模，然后分析其他工具的价格满足的抛物线形偏微分方程。我会讨论几个知名模型的性质。

第 31 章：收益率曲线拟合 我们希望模型的输出结果是像市场中那样的收益率曲线的形式。我会展示如何选择模型参数来保证这一点。正如我之前解释的那样，该方法的合理性很难论证。

第 32 章：利率衍生品 我会深入讨论利率衍生品的定价，将定价方程与股权类产品中的方程做比较。

第 33 章：可转债 可转债的价格与股票价格相关。因为持续期较长，我们不能假设利率是已知的，所以我们会用随机标的资产和随机利率的两因子模型对可转债的价值建模。

第 34 章：按揭支持证券 按揭支持证券简单地说就是将许多按揭贷款打包后以金融产品的形式出售。虽然刚才我用了“简单”这个词，但是这类产品的定价可能会非常复杂。定价中的主要问题是如何处理可能出现的个别房产所有者提前偿还按揭贷款。

第 35 章：多因子利率建模 如果只是用短期利率建立单因子模型来确定整条收

益率曲线的行为，可能会得到一些违背常理的结果。例如根据单因子理论可以用 1 年期的债券来对冲 10 年期的债券，这显然是不对的。为了更好地拟合现实，我们将讨论多因子建模，会有多个随机源用于拟合不同期限的利率之间更复杂的关系。

第 36 章：瞬时利率的实证表现 常用的短期利率模型对利率的波动率和漂移率做了多种假设。本章中我会展示如何用数据来验证哪些模型（如果有的话）是符合现实的。

第 37 章：HJM 和 BGM 模型 与对短期利率建模并得到整条收益率曲线的方法不同，Heath、Jarrow 和 Morton 模型将整条远期利率曲线作为整体进行建模。该方法有许多优点，也有一些缺陷。Brace、Gatarek 和 Musiela 模型是上述思路的离散版本，因而更符合实际。

第 38 章：固定收益产品说明书 在本章你能找到精选的术语及其分析，还有 VB 代码。



第 30 章

单因子利率建模

本章内容

- 随机利率模型
- 怎样得到众多固定收益产品的债券定价方程
- 许多常用的利率模型的结构



30.1 引言

到目前为止，我一直假设利率是常数或者是时间的已知函数。对于短期的以股权为标的的合约来说，这也许是一个合理的假设。但是对于更长期限的合约，必须要对利率进行更加精确的建模。这并不是一件容易的事情。在本章我将以单个随机源作为示例介绍利率建模背后的思想。这就是所谓的单因子利率建模(one-factor interest rate modeling)。这种模型允许短期利率，或者说瞬时利率，遵循某个随机游走。在这种模型下债券和其他利率衍生产品的价格服从抛物型偏微分方程。

我们建模的对象“瞬时利率”是一个定义很不严格的量，用来表示剩余期限无穷小的债券的收益率。实践中，人们会把流动性好的有限期债券（比如剩余期

限为一个月期的债券)的收益率当作瞬时利率。剩余期限为一天的债券确实可能会存在,但是它们的价格并不一定对判断其他短期利率的水平有指导作用。我将继续对瞬时利率的精确定义保持含糊。我们认为,如果为高度模型依赖的复杂产品定价,那么与模型的选择相比,自变量的精确定义将会是相对不重要的。

30.2 随机利率

既然在实际生活中我们无法预测利率未来的过程,那么把它当作随机变量来建模是很自然的。我们将对最短可能期限存款的利率 r 建模。我们将会看到如何从中推导所有其他利率的模型。最短可能期限存款的利率通常被称为瞬时利率 (spot interest rate)。

图 30-1 展示了 1 个月期美国利率的时间序列。我们经常用 1 个月期利率作为瞬时利率的代理变量。

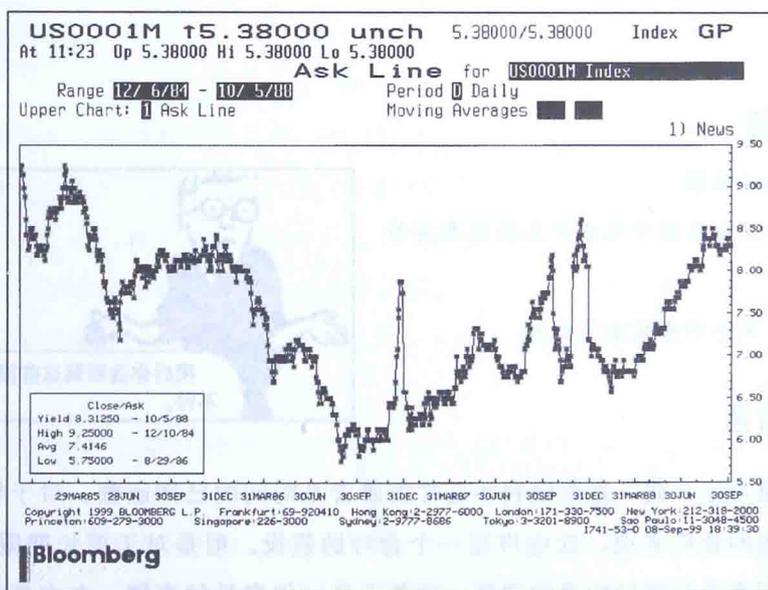


图 30-1 1 个月期利率的时间序列

前文中为资产价格建模时我使用了对数正态随机游走这个随机微分方程的形式。现在让我们假设利率 r 的过程由另一个随机微分方程支配,形式如下

$$dr = u(r, t)dt + w(r, t)dX \quad (30-1)$$

$u(r, t)$ 和 $w(r, t)$ 的函数形式决定了瞬时利率 r 的行为。现在我不会为这些函数指定任何特定的形式。

我们运用这种随机游走并遵循与推导布莱克-斯科尔斯方程类似的过程来推导债券价格的偏微分方程。后面我将介绍业界常用的 u 和 w 的函数形式。

30.3 一般模型的债券定价方程

当利率是随机的，债券价格的形式为 $V(r, t; T)$ 。读者可以暂且按照简单债券来思考，但这个控制方程其实是很一般的形式且可以为很多其他合约定价。这就是为什么我用符号 V 而不是前文中表示零息债的符号 Z 。



为债券定价呈现出新的技术难题，且在某种程度上比为期权定价更加困难，因为不存在可用来对冲的标的资产。因此，我们并不是为可交易资产建模；可交易资产（比如说债券）是自变量 r 的衍生品。建立对冲组合的唯一方法是用一只不同到期日的债券来为某一只债券对冲。我们用到期日分别为 T_1 、 T_2 的两只债券建立组合。到期日为 T_1 的债券价格为 $V_1(r, t; T_1)$ ，到期日为 T_2 的债券价格为 $V_2(r, t; T_2)$ 。持有一单位的前一种债券和 $-\Delta$ 单位的后一种债券，我们有

$$\Pi = V_1 - \Delta V_2 \quad (30-2)$$

在 dt 时间内组合的变化为

$$d\Pi = \frac{\partial V_1}{\partial t} dt + \frac{\partial V_1}{\partial r} dr + \frac{1}{2} \omega^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2} dt - \Delta \left(\frac{\partial V_2}{\partial t} dt + \frac{\partial V_2}{\partial r} dr + \frac{1}{2} \omega^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2} dt \right) \quad (30-3)$$

此处我们对 r 和 t 的函数 V 应用了伊藤引理。这些项目中哪些是随机的？一旦识别出这些随机项，你将会看到选择

$$\Delta = \frac{\partial V_1}{\partial r} / \frac{\partial V_2}{\partial r}$$

可以消除 $d\Pi$ 中所有的随机性。因为它使得 dr 项的系数为 0。然后我们得到

$$\begin{aligned} d\Pi &= \left(\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \omega^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2} - \left(\frac{\partial V_1}{\partial r} / \frac{\partial V_2}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \omega^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2} \right) \right) dt \\ &= r\Pi dt = r \left(V_1 - \left(\frac{\partial V_1}{\partial r} / \frac{\partial V_2}{\partial r} \right) V_2 \right) dt \end{aligned}$$

此处我们运用了无套利假设，即令组合的收益率等于无风险利率。这个无风险利率恰好就是瞬时利率 r 。

把所有 V_1 项整理到等式左边, 所有 V_2 项整理到等式右边, 我们发现[⊖]

$$\frac{\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\omega^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2} - rV_1}{\frac{\partial V_1}{\partial r}} = \frac{\frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{1}{2}\omega^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2} - rV_2}{\frac{\partial V_2}{\partial r}}$$

这里股权世界与利率世界的区别很明显。这是含有两个未知项的一个方程。[⊖] 幸运的是, 等式左边是 T_1 的函数而不是 T_2 的函数, 等式右边是 T_2 的函数而不是 T_1 的函数。使等式成立的唯一途径就是等式两边都独立于到期日。省去 V 的下标, 对于某个函数 $a(r, t)$, 我们有

$$\frac{\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\omega^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - rV}{\frac{\partial V}{\partial r}} = a(r, t)$$

写成如下形式较方便

$$a(r, t) = w(r, t)\lambda(r, t) - u(r, t)$$

对于给定的 $u(r, t)$ 和非零的 $w(r, t)$, 这总是可以做到的。函数 $\lambda(r, t)$ 还未被设定。

因此债券定价的控制方程为

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\omega^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + (u - \lambda w) \frac{\partial V}{\partial r} - rV = 0 \quad (30-4)$$

为了得到式 (30-4) 的唯一解, 我们必须引入一个终值条件和两个边界条件。终值条件与到期回报相适应, 故对于零息债来说

$$V(r, T; T) = 1$$

边界条件取决于 $u(r, t)$ 和 $w(r, t)$ 的形式, 故在后文针对特定模型来讨论。

在模型中加入票息支付是容易的。如果在 dt 时期内得到数量为 $K(r, t) dt$ 的票息, 那么

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\omega^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + (u - \lambda w) \frac{\partial V}{\partial r} - rV + K(r, t) = 0$$

当票息被离散支付时, 出于无套利考虑, 我们得到跳跃条件

$$V(r, t_c^-; T) = V(r, t_c^+; T) + K(r, t_c)$$

⊖ 你将会看到它与后文中随机波动率模型的一致性。

⊖ 无论何时把不可交易的事物作为随机的事物来建模, 我们都会发现得到的方程数量相对于未知项数量总是过少。我们通过引入市场风险价格来避开这个棘手的问题。

其中 $K(r, t_c)$ 是在时刻 t_c 得到的票息。

30.4 什么是市场风险价格

现在将解释函数 $\lambda(r, t)$ 。想象一下你持有一只到期日为 T 的债券的未套保头寸。在时间步长 dt 内这只债券价值的变化为

$$dV = w \frac{\partial V}{\partial r} dX + \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + u \frac{\partial V}{\partial r} \right) dt$$



根据式 (30-4)，上式可被写作

$$dV = w \frac{\partial V}{\partial r} dX + \left(w\lambda \frac{\partial V}{\partial r} + rV \right) dt$$

或

$$dV - rVdt = w \frac{\partial V}{\partial r} (dX + \lambda dt) \quad (30-5)$$

表达式右边包括两个部分：关于 dt 的确定项和关于 dX 的随机项。式 (30-5) 中 dX 项的存在显示了这并不是无风险组合。确定项可以理解为承担某一水平的风险而获得的高于无风险利率的超额收益。作为承担超额风险的回报，组合对于每单位超额风险 dX 获得 λdt 的超额回报。因此函数 λ 被称作**市场风险价格** (market price of risk)。

30.5 解释市场风险价格和风险中性

债券定价方程式 (30-4) 涉及函数 $u - \lambda w$ 和 w 。前者是对瞬时利率一阶偏导数的系数，而后者出现在扩散项——二阶偏导数的系数中。按照在方程中出现的顺序，这四项分别代表时间衰减、扩散、漂移和贴现。除了最后的贴现项，这个方程与概率密度函数的后向方程类似，参见第 10 章。同样地，我们可以把债券定价方程的解理解为所有现金流的期望现值。假设我们在 T 时刻得到一个“Payoff”的回报，那么合约今天的价值为

$$E[e^{-\int_t^T r(\tau) d\tau} \text{Payoff}]$$

注意到现值（指数）项在期望里面，因为当利率随机时，它也是随机的。

与股票期权相同，这个期望并不是关于真实随机变量的，而是关于风险中性变量的。存在这个区别是因为方程中的漂移项并不是真实瞬时利率的漂移 u ，而

是另一个被称为风险中性瞬时利率 (risk-neutral spot rate) 的漂移。这个利率的漂移为 $u - \lambda w$ 。当为利率衍生品 (包括有限期债券) 定价时, 用风险中性利率来建模和定价是重要的。这个利率满足

$$dr = (u - \lambda w)dt + w dX$$

我们需要那个新的市场风险价格项, 因为我们建模的变量 r 是不可交易的。

如果我们令 λ 为 0, 则我们得到的所有结论对于现实世界都是可适用的。比如, 如果我们想要找到未来某一时刻瞬时利率的分布, 那么我们可以用真实的漂移而不是风险中性的漂移来解 Fokker-Planck 方程。

因为我们无法观测到函数 λ , 除了可能通过整条收益率曲线 (见第 31 章), 我倾向于把它看作一张大的地毯, 在其下面我们可以略去所有令人不快的、不方便的东西。

30.6 易于处理的模型与债券定价方程的解

我们已经为任意利率模型建立了债券定价方程。也就是说, 我们尚未设定风险中性漂移率 $u - \lambda w$ 和波动率 w 。我们该怎样选择这些函数来得到好的模型呢? 首先, 简单的对数正态随机游走对于利率 r 是不适合的, 因为它将会预测到指数式上升或下降的利率。这就排除了把股票价格模型作为利率模型的可能。所以我们必须更认真地思考如何选择漂移率和波动率。

为利率建模比为股票价格建模困难得多, 因为没有经济上的线索来帮助我们确定模型的形式。当我们为股票价格建模时, 我们观察到股票价格的实际水平并不重要, 重要的是收益率。这就使得对数正态随机游走模型成了显而易见的选择。然而利率的实际水平是重要的, 5% 的利率和 500% 的利率明显完全不同。

尽管我并不赞成这种做法, 但我们可以选择一个可以使深入分析更容易的模型。

下面我们将考察一些风险中性漂移率和波动率的选择, 这些选择使得模型易于处理, 即对于这些模型零息债的债券定价方程可以求得解析解。我们将讨论这些模型, 并且看看哪些性质我们喜欢或不喜欢。

比如, 假设 $u - \lambda w$ 和 w 的形式如下

$$u(r, t) - \lambda(r, t)w(r, t) = \eta(t) - \gamma(t)r \quad (30-6)$$

$$w(r, t) = \sqrt{a(t)r + \beta(t)} \quad (30-7)$$

注意我们描述的是风险中性瞬时利率的模型。我将允许式(30-7)和式(30-6)中的函数 α 、 β 、 γ 、 η 和 λ 为时间的函数。通过适当地限制这些时变函数，我们可以确保式(30-1)中利率 r 的随机游走有如下性质。

利率为正：利率通常都是为正的，除了在少数不合理的情形中，比如20世纪60年代的瑞典。在上面的模型中，如果 $\alpha(t) > 0$ 且 $\beta \leq 0$ ，那么瞬时利率有一个正数作为下界。这个下界为 $-\beta/\alpha$ 。(在 $\alpha(t) = 0$ 的特殊情形中，我们必须使 $\beta(t) \geq 0$)。注意到利率 r 仍然可以达到无穷大，但是概率为0。

均值回归：通过观察漂移项，我们看到当利率 r 很大时，(风险中性)利率将向下趋于均值，其中均值可能是时间的函数。当利率 r 很小时，它平均来说会向上走。

我们还想要使下界成为不可达的；我们不想让瞬时利率永远黏在下界，故必须施加额外的条件来说明瞬时利率离开下界的速度有多快。这个要求意味着

$$\eta(t) \geq -\beta(t)\gamma(t)/\alpha(t) + \alpha(t)/2$$

下面会更深入地讨论这个问题。

对于漂移率和波动率如式(30-7)和式(30-6)的模型，式(30-4)的边界条件对零息债来说，首先是

$$\text{当 } r \rightarrow \infty \text{ 时, } V(r, t; T) \rightarrow 0$$

其次，当 $r = -\beta/\alpha$ 时， V 保持有限。当利率 r 以 $-\beta/\alpha$ 为下界时，可以在 $r = -\beta/\alpha$ 附近对偏微分方程进行局部分析。简略地说，综合以下两项

$$\frac{1}{2}(\alpha r + \beta) \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \text{ 和 } (\eta - \gamma r) \frac{\partial V}{\partial r}$$

说明仅当 $\eta \geq -\beta\gamma/\alpha + \alpha/2$ 时， V 在 $r = -\beta/\alpha$ 处的有界性是一个充分的边界条件。

我之所以为利率 r 的随机微分方程中 u 和 w 选择式(30-7)和式(30-6)的特殊函数形式，是因为一个特殊的原因。在这些选择下，对于零息债，式(30-4)的解有如下简单的形式

$$Z(r, t; T) = e^{A(t; T) - rB(t; T)} \quad (30-8)$$

我们将暂时具体地考察零息债，因此我们的符号从表示许多利率产品的 V 变为特定表示零息债的 Z 。

所有 α 、 β 、 γ 和 η 都非零的模型是利率 r 最一般的随机微分方程，它导致式(30-4)有形如式(30-8)的解。这验证起来很容易。

将式(30-8)代入债券定价控制方程式(30-4)，有

$$\frac{\partial A}{\partial t} - r \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2} \omega^2 B^2 - (u - \lambda \omega) B - r = 0 \quad (30-9)$$

这些项中有一些是 t 和 T 的函数 (比如 A 和 B)，其他是 r 和 t 的函数 (比如 u 和 ω)。将式 (30-9) 对 r 求偏导，得到

$$-\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2} B^2 \frac{\partial}{\partial r}(\omega^2) - B \frac{\partial}{\partial r}(u - \lambda \omega) - 1 = 0$$

再次对 r 求偏导，并同时除以 B 后，得到

$$\frac{1}{2} B \frac{\partial^2}{\partial r^2}(\omega^2) - \frac{\partial^2}{\partial r^2}(u - \lambda \omega) = 0$$

此处只有 B 是 T 的函数，因而我们必须有

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(\omega^2) = 0 \quad (30-10)$$

且

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(u - \lambda \omega) = 0 \quad (30-11)$$

由此可以推出式 (30-7) 和式 (30-6)。

将式 (30-7) 和式 (30-6) 代入式 (30-9) 得到关于 A 和 B 的方程如下

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \eta(t) B - \frac{1}{2} \beta(t) B^2 \quad (30-12)$$

和

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{1}{2} \alpha(t) B^2 + \gamma(t) B - 1 \quad (30-13)$$

为了满足终值条件 $Z(r, t; T) = 1$ ，我们必须有

$$A(T; T) = 0 \text{ 和 } B(T; T) = 0$$

30.7 常参数情形下的解

对于任意的 α 、 β 、 γ 和 η ，解是通过将式 (30-12) 和式 (30-13) 两个常微分方程积分得到的。一般来说，尽管这些参数时变时，我们不能显性地解出这个积分。但是在一些特殊情况下，这个积分能够被显性地解出。

最简单的情形是当 α 、 β 、 γ 和 η 都为常数时。在这种情况下，我们得到

$$\frac{dB}{dt} = \frac{1}{2} \alpha B^2 + \gamma B - 1$$

当写成如下形式时，这个积分可以被积出来

$$\int_0^B \frac{1}{(B' - a)(B' + b)} dB' = \frac{1}{2} \alpha \int_T^t dt$$

其中

$$b, a = \frac{\pm \gamma + \sqrt{\gamma^2 + 2\alpha}}{\alpha}$$

这里包含了 $t=T$ 时的终值条件。结果如下

$$B(t; T) = \frac{2(e^{\Psi_1(T-t)} - 1)}{(\gamma + \Psi_1)(e^{\Psi_1(T-t)} - 1) + 2\Psi_1} \quad (30-14)$$

其中

$$\Psi_1 = \sqrt{\gamma^2 + 2\alpha} \text{ 和 } \Psi_2 = \frac{\eta - a\beta/2}{a + b}$$

A 的方程为

$$\frac{dA}{dt} = \eta B - \frac{1}{2} \beta B^2$$

将其除以 B 的常微分方程得到

$$\frac{dA}{dB} = \frac{\eta B - \frac{1}{2} \beta B^2}{\frac{1}{2} \alpha B^2 + \gamma B - 1}$$

对上式积分得到

$$\frac{\alpha}{2} A = \alpha \Psi_2 \log(a - B) + (\Psi_2 + \frac{1}{2} \beta) b \log((B + b)/b) - \frac{1}{2} \beta B - \alpha \Psi_2 \log a \quad (30-15)$$

这里已经包含了终值条件。

当这 4 个参数都为常数时，显然 A 和 B 都只是变量 $\tau = T - t$ 的函数，而不是 t 和 T 各自的函数；如果有参数是时变的，则这种情况并不一定成立。

这个模型可以预测各种各样的收益率曲线。当 $\tau \rightarrow \infty$ 时

$$B \rightarrow \frac{2}{\gamma + \Psi_1}$$

且收益率曲线 Y 的长期行为如下

$$Y \rightarrow \frac{2}{(\gamma + \Psi_1)^2} (\eta(\gamma + \Psi_1) - \beta)$$

因此，对于固定的常参数，这个模型导致了独立于瞬时利率的固定的长期利率。

风险中性瞬时利率的概率密度函数 $P(r, t)$ 满足

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\omega^2 P) - \frac{\partial}{\partial r} ((u - \lambda \omega) P)$$

在长期, 这稳定于一个独立于利率初始值的分布 $P_\infty(r)$ 。这个分布满足常微分方程

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dr^2} (\omega^2 P_\infty) = \frac{d}{dr} ((u - \lambda \omega) P_\infty)$$

对于常参数的一般仿射模型此式的解为

$$P_\infty(r) = \frac{\left(\frac{2\gamma}{\alpha}\right)^k}{\Gamma(k)} \left(r + \frac{\beta}{\alpha}\right)^{k-1} e^{-\frac{2\gamma}{\alpha}\left(r + \frac{\beta}{\alpha}\right)} \quad (30-16)$$

其中

$$k = \frac{2\eta}{\alpha} + \frac{2\beta\gamma}{\alpha^2}$$

且 $\Gamma(\cdot)$ 为伽马函数。如果 $k > 1$, 则边界 $r = -\beta/\alpha$ 是不可达的。稳态分布的均值为

$$\frac{\alpha k}{2\gamma} - \frac{\beta}{\alpha}$$

30.8 人名模型

有许多利率模型与它们发明者的名字相关联。对于描述风险中性利率过程的随机微分方程式 (30-1), 如果风险中性漂移率和波动率形如式 (30-6) 和式 (30-7), 则是 Vasicek 模型, Cox, Ingersoll & Ross 模型, Ho & Lee 模型和 Hull & White 模型的一般形式。



30.8.1 Vasicek

Vasicek 模型采用式 (30-6) 和式 (30-7) 的形式, 但其中 $\alpha = 0$, $\beta > 0$, 且所有其他的参数都独立于时间

$$dr = (\eta - \gamma r)dt + \beta^{1/2} dX$$

这个模型很易于处理以至于许多利率衍生品都有显性公式。零息债的价值如下



$$e^{A(t; T) - rB(t; T)}$$

其中

$$B = \frac{1}{\gamma}(1 - e^{-\gamma(T-t)})$$

且

$$A = \frac{1}{\gamma^2}(B(t; T) - T + t)(\eta\gamma - \frac{1}{2}\beta) - \frac{\beta B(t; T)^2}{4\gamma}$$

这个模型有一个很好的性质，就是利率可以均值回归到一个固定水平；但也有一个很不好的性质，就是利率可能变为负的。

图 30-2 展示了由 Vasicek 模型预测的 3 种收益率曲线的形状，其中每个都选取了不同的参数（用合理的数据得到驼峰状的收益率曲线是很困难的）。

Vasicek 模型的稳态概率密度函数是式 (30-16) 的退化情形，因为 $\alpha=0$ 。我们发现

$$P_{\infty}(r) = \sqrt{\frac{\gamma}{\beta\pi}} e^{-\frac{\gamma}{\beta}(r - \frac{\eta}{\gamma})^2}$$

这个概率密度函数如图 30-3 所示。因此，长期来看，Vasicek 模型中瞬时利率是正态分布的。均值为

$$\frac{\eta}{\gamma}$$

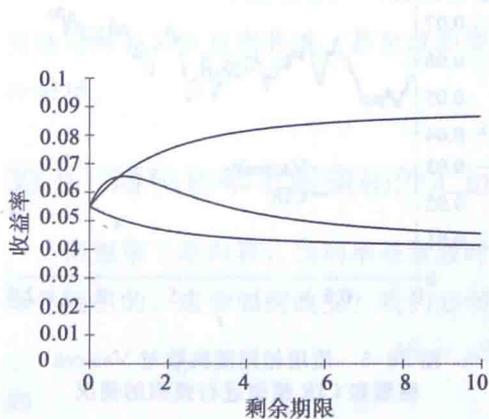


图 30-2 Vasicek 模型给出的 3 种收益率曲线形状

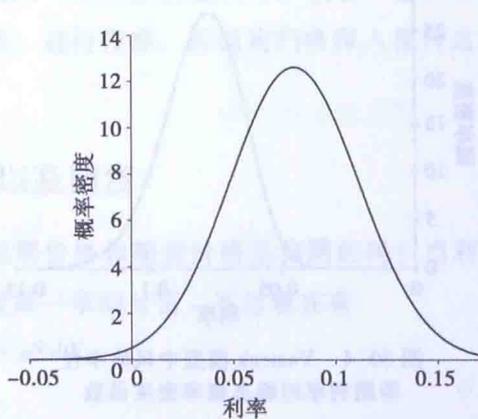


图 30-3 Vasicek 模型中风险中性瞬时利率的稳态概率密度函数

图中的参数是经过慎重选择的，使负利率的概率足以达到警戒值。对于合理的参数，负利率的概率并不是那么令人担忧，但是用合理的参数得到看起来真实的收益率曲线是困难的。

30.8.2 Cox, Ingersoll & Ross

CIR 模型把式 (30-6) 和式 (30-7) 作为利率模型, 但 $\beta=0$, 且也没有时变的参数

$$dr = (\eta - \gamma r)dt + \sqrt{\alpha r} dX$$

瞬时利率是均值回归的, 且若 $\eta > \alpha/2$ 则瞬时利率保持为正。尽管通常涉及非中心的卡方分布的积分, 但一些利率衍生品仍存在显性解。零息债的价值为

$$e^{A(t; T) - rB(t; T)}$$

其中 A 和 B 由 $\beta=0$ 时的式 (30-15) 和式 (30-14) 给出。结果表达式与非零 β 的情形相比并未简单很多。

瞬时利率的稳态概率密度函数是式 (30-16) 的一种特殊情形。这个函数的图形如图 30-4 所示。稳态分布的均值也为

$$\frac{\eta}{\gamma}$$

图 30-5 是使用相同随机数对 Vasicek 模型和 CIR 模型进行模拟的情况。通过参数选择使得两个过程有相似的均值和标准差。

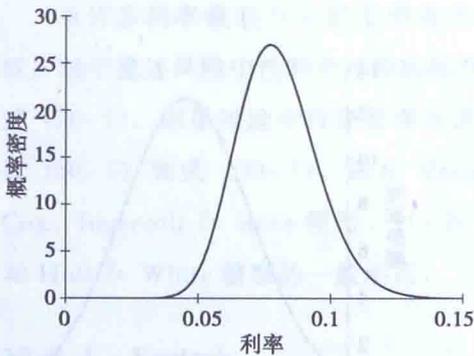


图 30-4 Vasicek 模型中风险中性即期利率的稳态概率密度函数

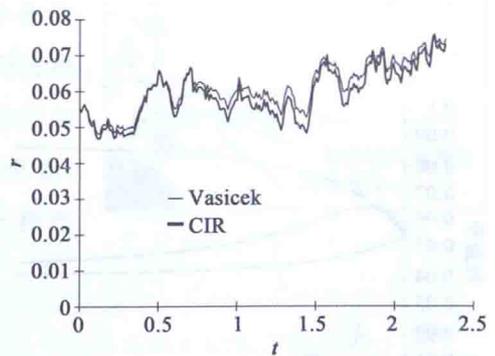


图 30-5 使用相同随机数对 Vasicek 模型和 CIR 模型进行模拟的情况

30.8.3 Ho & Lee

Ho & Lee 中 $\alpha=\gamma=0$, $\beta>0$ 且为常数, 但 η 可以是时间的函数

$$dr = \eta(t)dt + \beta^{1/2} dX$$

零息债的价值为



$$e^{A(t;T) - rB(t;T)}$$

其中

$$B = T - t$$

且

$$A = - \int_t^T \eta(s)(T-s)ds + \frac{1}{6}\beta(T-t)^3$$

这个模型是利率期限结构的第一个无套利模型。这意味着通过仔细选择函数 $\eta(t)$ ，使从模型得出的理论零息债价格与市场价格相同。这种技巧被称为收益率曲线拟合 (yield curve fitting)。这个仔细的选择为



$$\eta(t) = - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \log Z_M(t^*; t) + \beta(t - t^*)$$

其中今天为时间 $t = t^*$ ， $Z_M(t^*; T)$ 是到期日为 T 的零息债今天的市场价格。很明显这里假设存在所有到期日的债券，且价格关于到期日是二阶可微的。后面我们将会看到为什么这能够得出正确的价格。这种分析上易于处理的模型使债券期权也存在简单的显性公式。收益率曲线校准问题是第 31 章的主题。

30.8.4 Hull & White

Hull & White 通过加入时变的参数扩展了 Vasicek 模型和 CIR 模型。这种时变性也允许对收益率曲线（甚至波动率结构）进行校准。后面我们将深入探讨这种模型。

30.9 随机利率下股票和外汇远期以及期货

回想第 5 章内容，当利率是常数时，远期价格和期货价格是相同的吗？当利率是随机的，这会如何改变？我们必须重复那一章的分析，不过现在有

$$dS = \mu S dt + \sigma S dX_1$$

和

$$dr = u(r, t)dt + w(r, t)dX_2$$

我们的世界中存在相关的随机游走，就像第 11 章所描述的那样。相关系数为 ρ 。

30.9.1 远期合约

$V(S, r, t)$ 为以 S 为标的资产、 T 时刻到期的远期合约在合约存续期内任

意时间 t 的价值。就像第 5 章那样，我将假设交割价格是已知的，然后寻找远期合约的价值。

建立包括一份远期合约多头、 Δ 份标的资产空头和 Δ_1 份无风险债券空头的组合

$$\Pi = V(S, t) - \Delta S - \Delta_1 Z$$

我不会具体介绍所有的细节，因为结论是显然的

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\sigma Sw \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial r} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + (u - \lambda w) \frac{\partial V}{\partial r} - rV = 0$$

这个方程的终值条件为资产价格 S 和固定的交割价格 \bar{S} 之间的差，故

$$V(S, r, T) = S - \bar{S}$$

在这个终值条件下方程的解为

$$V(S, r, t) = S - \bar{S}Z$$

此处 Z 不是任何现有的无风险债券，而是与远期合约有着相同到期日的零息债。这就是远期合约在存续期内的价值。

记住交割价格是使得在 $t = t_0$ 时刻远期合约价值为 0 的价格。如果标的资产在 t_0 时刻价格为 S_0 ，那么

$$0 = S_0 - \bar{S}Z$$

或

$$\bar{S} = \frac{S_0}{Z}$$

因此远期报价为

$$\text{远期价格} = \frac{S}{Z}$$

记住 Z 满足

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} + (u - \lambda w) \frac{\partial Z}{\partial r} - rZ = 0$$

且

$$Z(r, T) = 1$$

30.9.2 期货合约

用 $F(S, r, t)$ 来表示期货价格。

建立包括一份期货合约多头、 Δ 份标的资产空头和 Δ_1 份无风险债券空头的

组合

$$\Pi = -\Delta S - \Delta_1 Z$$

(记住期货合约没有价值。)

$$d\Pi = dF - \Delta dS - \Delta_1 dZ$$

遵循通常的推导过程, 我们得到

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + \rho\sigma S w \frac{\partial^2 F}{\partial S \partial r} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + rS \frac{\partial F}{\partial S} + (u - \lambda w) \frac{\partial F}{\partial r} = 0$$

终值条件为

$$F(S, r, T) = S$$

我们把偏微分方程的解写成如下形式

$$F(S, r, T) = \frac{S}{p(r, t)}$$

为什么? 有两个原因。第一, 我们期望得到一个类似的解, 期货价格应该与标的资产价格成比例。第二, 我想把期货价格和远期价格做一个比较, 后者为

$$\frac{S}{Z}$$

所以很自然地会问 Z 和 p 有多相似?

可以得出 p 满足

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + (u - \lambda w) \frac{\partial p}{\partial r} - rp - \underbrace{w^2 \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)^2}{q}} + \rho\sigma\beta \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (30-17)$$

(将相似的形式代入方程就可以看到这点。)

终值条件为

$$p(r, T) = 1$$

p 和 Z 满足的方程的差别体现在式 (30-17) 中下划线部分。

30.9.3 凸性调整

当利率随机时, 远期价格与期货价格明显存在差别。从式 (30-17) 可以看到这个差别取决于瞬时利率的波动率、标的资产的波动率以及它们之间的相关性。倘若 $\rho \geq 0$, 则期货价格总是大于相应的远期价格。如果相关性为零, 那么股票的波动是无关系的。如果利率的波动率为 0, 那么利率是确定性的, 远期价格与期货价格相同。

由于远期价格与期货价格的差别取决于瞬时利率的波动，业界倾向于利用凸性调整实现从一项到另一项的转换。显然，凸性调整取决于模型的精确性。对于上面描述过的常用模型， p 的式 (30-17) 仍有简单的解。

30.10 总结

在本章我介绍了随机利率的思想。我们建模的利率为“瞬时利率”——一种短期利率。介绍了一些常用的瞬时利率模型。选择这些模型，是因为系数的简单形式使得基本的债券定价方程可以直接得到解析解。

从瞬时利率的模型我们可以得到整条收益率曲线，但这必定是不符合实际的，在后面章节中我们将看到怎样使得模型应用起来更符合实际。

拓展阅读

- 阅读经典的利率模型，见 Vasicek (1977)，Dothan (1978)，Cox, Ingersoll 和 Ross (1985)，Ho 和 Lee (1986) 以及 Black, Derman 和 Toy (1990)。
- 对于一般仿射模型的细节，阅读论文 Pearson 和 Sun (1989)，Duffie (1992)，Klugman (1992) 以及 Klugman 和 Wilmott (1994)。
- Rebonato (1996) 全面的教材，详细介绍了所有常用的利率模型。



第31章

收益率曲线拟合

本章内容

- 在单因子模型中如何选择时变的参数，使得今天的收益率曲线为模型的输出结果
- 收益率曲线拟合的优势与不足

31.1 引言

瞬时利率单因子模型通过对瞬时利率模型及其参数的认识来构建整条收益率曲线。使用单因子模型时，我们必须决定如何选择参数，以及是否相信模型的输出结果。如果我们使用历史时间序列数据来选择模型参数，那么模型的输出结果之一将是理论收益率曲线。除非极



其幸运，否则理论收益率曲线与市场收益率曲线是不尽相同的。那我们究竟应该相信哪一个？我们是相信理论的收益率曲线还是相信市场上的交易价格？你肯定是勇敢过头才会忽视债券和互换这类高流动性工具的市场价格。即使是为很复杂的产品定价，我们也必须使用更简单的、流动性更好的可交易合约进行对冲，我们希望这些合约的价格是正确的。

由于这种为高流动性合约正确定价的需要，收益率曲线拟合 (yield curve fitting) 或者说校准 (calibration) 的思路才变得很普遍。在实际应用单因子模型时，人们几乎总是会进行拟合。这意味着模型中一个或更多参数是时变的。通过仔细选择时变的函数形式可以使模型的一个输出结果——零息债价格与市场价格完全一致。收益率曲线拟合是本章的主题。

31.2 Ho & Lee 模型

Ho & Lee 瞬时利率模型是进行收益率曲线拟合的模型中最简单的一种。通过详细分析该模型我们可以了解实践是如何进行校准的。

在 Ho & Lee 模型中，风险中性瞬时利率服从的过程为

$$dr = \eta(t)dt + cdX$$

瞬时利率过程的标准差 c 是常数，漂移率 η 是时变的。

在这个模型中，求解零息债的债券定价方程可得

$$Z(r, t; T) = e^{A(t; T) - r(T-t)}$$

其中

$$A(t; T) = - \int_t^T \eta(s)(T-s)ds + \frac{1}{6}c^2(T-t)^3$$

如果知道 $\eta(t)$ ，上面的式子就给出了所有期限零息债的理论价值。现在让我们反过来思考这个关系，并提出这样的问题： $\eta(t)$ 选择什么样的函数形式才能使所有期限贴现率的理论值与其市场值相一致呢？我们把 η 的这个特定选择称为 $\eta^*(t)$ 。在今天 $t = t^*$ 时拟合收益率曲线，此时瞬时利率为 r^* ，市场上贴现因子为 $Z_M(t^*; T)$ 。为了使债券的理论价格与市场价格相一致，我们必须求解下式

$$Z_M(t^*; T) = e^{A(t^*; T) - r^*(T-t^*)}$$

取对数并重新整理，可以得到

$$\int_{t^*}^T \eta^*(s)(T-s)ds = -\log(Z_M(t^*; T)) - r^*(T-t^*) + \frac{1}{6}c^2(T-t^*)^3$$

(31-1)

注意积分的下限是今天的日期 t^* 。这是一个常数，但我想强调一下我们拟合的是今天的收益率曲线。如果明天再拟合一次，市场收益率曲线将会改变。

式 (31-1) 对 T 求两次微分可以得到

$$\eta^*(t) = c^2(t-t^*) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \log(Z_M(t^*; t))$$

当选择这个形式的时变参数 $\eta(t)$ 时, 零息债的理论价格与实际市场价格是一致的。且有下式成立

$$A(t; T) = \log\left(\frac{Z_M(t^*; T)}{Z_M(t^*; t)}\right) - (T-t) \frac{\partial}{\partial t} \log(Z_M(t^*; t)) - \frac{1}{2} c^2 (t-t^*)(T-t)^2$$

31.3 扩展的 Vasicek 模型——Hull & White

Ho & Lee 模型并不是唯一能进行校准的模型, 它只是其中最简单的。大多数单因子模型都可以校准, 不过模型越易于处理, 校准起来越容易。如果模型不易于处理, 没有显性的零息债价格公式, 那我们总可以转用数值方法求解。

第二容易校准的模型是 Vasicek 模型。Vasicek 模型中, 风险中性瞬时利率的随机微分方程如下

$$dr = (\eta - \gamma r)dt + cdX$$

Hull & White 把它扩展到包括一个时变参数

$$dr = (\eta(t) - \gamma r)dt + cdX$$

假设已经估计出参数 γ 和 c , 比如通过统计方法。在时刻 t^* 我们选择 $\eta = \eta^*(t)$, 使得债券的理论价格与其市场价格相同。

在这个风险中性过程下, 零息债的价值为

$$Z(r, t; T) = e^{A(t; T) - rB(t; T)}$$

其中

$$A(t; T) = -\int_t^T \eta^*(s) B(s; T) ds + \frac{c^2}{2\gamma^2} \left(T-t + \frac{2}{\gamma} e^{-\gamma(T-t)} - \frac{1}{2\gamma} e^{-2\gamma(T-t)} - \frac{3}{2\gamma} \right)$$

且

$$B(t; T) = \frac{1}{\gamma} (1 - e^{-\gamma(T-t)})$$

为了拟合 t^* 时刻的收益率曲线, 我们必须使 $\eta^*(t)$ 满足

$$\begin{aligned} A(t^*; T) &= -\int_{t^*}^T \eta^*(s) B(s; T) ds + \frac{c^2}{2\gamma^2} \left(T-t^* + \frac{2}{\gamma} e^{-\gamma(T-t^*)} - \frac{1}{2\gamma} e^{-2\gamma(T-t^*)} - \frac{3}{2\gamma} \right) \\ &= \log(Z_M(t^*; T)) + r^* B(t^*, T) \end{aligned} \quad (31-2)$$

如果所有其他参数和函数, 比如债券的市场价格 $Z_M(t^*; T)$ 都已知, 那么这就是一个关于 $\eta^*(t)$ 的积分方程。

式 (31-2) 可以通过拉普拉斯变换的方法解出, 但还有一种特别简单的解法就是对 T 求两次微分。这样我们有

$$\eta^*(t) = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} \log(Z_M(t^*; t)) - \gamma \frac{\partial}{\partial t} \log(Z_M(t^*; t)) + \frac{c^2}{2\gamma} (1 - e^{-2\gamma(t-t^*)}) \quad (31-3)$$

通过式 (31-3) 我们可以写出函数 $A(t; T)$

$$A(t; T) = \log\left(\frac{Z_M(t^*; T)}{Z_M(t^*; t)}\right) - B(t; T) \frac{\partial}{\partial t} \log(Z_M(t^*; t)) - \frac{c^2}{4\gamma^3} (e^{-\gamma(T-t^*)} - e^{-\gamma(t-t^*)})^2 (e^{2\gamma(t-t^*)} - 1)$$

31.4 收益率曲线拟合：支持与反对

31.4.1 支持

债券定价方程的构建基础是 Delta 对冲和无套利。要正确地使用单因子模型，必须遵从 Delta 对冲的假设。我们必须买卖金融工具以保持 Delta 中性，而金融工具的买卖必须以市场价格进行。买卖不可能以理论价格进行。但我们并不是直接对债券价格建模的，而是先为瞬时利率建模，然后将债券价格作为瞬时利率的衍生品处理。这意味着模型输出的债券价格与其市场价格相去甚远是很有可能。用债券进行对冲时这样的理论价格毫无用处。这种情况下模型就是失败的，不能用来为其他工具定价。除非我们能够找到某种方法，使得模型可以得出对冲工具的正确价格，这就是所谓的收益率曲线拟合。

一旦校准了可交易产品的价格，我们就可以用这些产品进行动态或静态套保。其背后的思想是这样的：即使模型是错误的以致我们在要定价的合约上赔钱，我们还可以从套保工具上赚回这些钱。在第 60 章中将会详细讨论这一思想。

31.4.2 反对

如果模型（比如在时刻 t^* 校准的 Ho & Lee 模型或 Hull & White 模型）可以正确地给出简单债券的市场价格，那么当在一周之后，比如 $t^* + 1$ 周，重新校准函数 $\eta^*(t)$ ，我们应该发现这个函数在此期间没有改变。但在实际中这是不可能的，我们会发现函数 η^* 变得面目全非。这意味着什么？很明显模型是错误的。[⊖]

通过简单搜寻剩余期限较短的债券的定价方程的泰勒级数解，我们可以把短

⊖ 这并不意味着它是无用的，这是一个很微妙的问题。

端风险调整漂移率与市场收益率曲线的斜率和曲度联系起来。这可以通过下面的步骤进行。首先寻找式(30-4)的如下形式的解

$$Z(r, t; T) \sim 1 + a(r)(T-t) + b(r)(T-t)^2 + c(r)(T-t)^3 + \dots$$

将其代入债券定价方程

$$\begin{aligned} & -a - 2b(T-t) - 3c(T-t)^2 + \frac{1}{2} \left(w^2 - 2(T-t)w \frac{\partial w}{\partial t} \right) \left((T-t) \frac{d^2 a}{dr^2} + (T-t)^2 \frac{d^2 b}{dr^2} \right) \\ & + \left((u - \lambda w) - (T-t) \frac{\partial(u - \lambda w)}{\partial t} \right) (T-t) \left(\frac{da}{dr} + (T-t)^2 \frac{db}{dr} \right) \\ & - r(1 + a(T-t) + c(T-t)^2) + \dots = 0 \end{aligned}$$

注意我是如何在 $t=T$ 处对漂移项和波动项进行展开的；上面这些是在 r 和 T 处计算的。通过使 $(T-t)$ 的各幂次项相等，我们得到

$$a(r) = -r, b(r) = \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{2}(u - \lambda w)$$

和

$$\begin{aligned} c(r) &= \frac{1}{12}w^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r^2 - r(u - \lambda w)) - \frac{1}{6}(u - \lambda w) \frac{\partial}{\partial r}(r^2 - r(u - \lambda w)) \\ &\quad - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial t}(u - \lambda w) + \frac{1}{6}r^2(r - (u - \lambda w)) \end{aligned}$$

式子中所有 $u - \lambda w$ 和 w 项都是在 r 和 T 处计算的。

通过 Z 的泰勒级数表达式，我们发现剩余期限较短的到期收益率由下式给出

$$-\frac{\log(Z(r, t; T))}{T-t} \sim -a + \left(\frac{1}{2}a^2 - b \right) (T-t) + \left(ab - c - \frac{1}{3}a^3 \right) (T-t)^2 + \dots$$

很明显，在到期时收益率取值为 $-a(r) = r$ 。收益率曲线的斜率为

$$\frac{1}{2}a^2 - b = \frac{1}{2}(u - \lambda w)$$

也就是风险中性漂移项的一半。短端收益率曲线的曲度与下式成比例

$$ab - c - \frac{1}{3}a^3$$

其中 c 包含了风险中性漂移项对时间的导数。我来强调一下分析的关键：短端收益率曲线的斜率取决于风险中性漂移项，反之亦然；短端收益率曲线的曲度取决于风险中性漂移项对时间的微分，反之亦然。

如果我们在风险调整漂移项中选择时变参数使得在 t^* 时刻市场价格是符合模型的，那么我们有

$$Z(r^*, t^*; T) = Z_M(t^*; T)$$

此式为时变参数的一个方程。

因此，比如对 Ho & Lee 模型来说，函数 $\eta^*(t)$ 在短端 $t=t^*$ 的值取决于市场收益率曲线的斜率。此外， $\eta^*(t)$ 的斜率取决于短端收益率曲线的曲度。对于所有校准的模型，类似的结果是很典型的。这些看起来无害的结果其实有很深的含义。

通常收益率曲线的斜率为很大的正数，超短期利率和期限不那么短的利率之间的利差很大。但是对于更长期限的利率，收益率曲线通常会变平。这意味着收益率曲线有绝对值很大的负曲度。如果进行我们刚刚介绍的 Ho & Lee 模型或扩展的 Vasicek 模型的校准，你很可能发现如下结果：

- 在 $t=t^*$ 处 $\eta^*(t)$ 的值很大。这是因为短端收益率曲线的斜率通常很大。
- 在 $t=t^*$ 处 $\eta^*(t)$ 的斜率很陡且为负。这是因为收益率曲线的曲度通常绝对值很大且为负。

图 31-1 展示了 $\eta^*(t)$ 与 t 典型的关系。这里显示出该拟合函数在初始阶段有很大的值，斜率很陡且为负。[⊖] 到目前为止没有什么不妥。也许这样的曲线是对的，也许校准参数看起来就应该是这样的。但是几个月后我们再观察校准参数的表现会发现什么呢？如果模型是正确的，拟合的曲线应该如图中曲线的粗体部分那

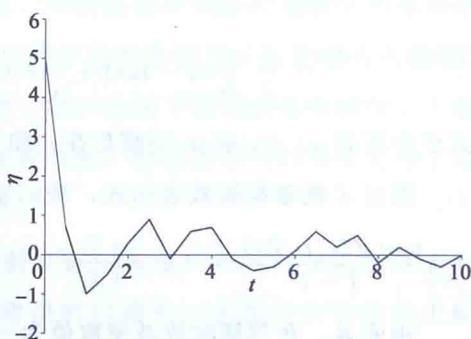


图 31-1 典型的校准函数 $\eta^*(t)$

样：前面时期的数据被移除，曲线剩余部分保持不变。

我们应该会看到收益率曲线会相应地急剧变平。事实上会发生吗？答案是不会。真实情形看起来更像图 31-2 所展示的情况，只是曲线整体随时间向前推移。我们再一次看到了短端的高水平、高的负斜率和震荡。图 31-2 的再校准函数与图 31-1 中的粗体线看起来一点都不像。这是因为收益率曲线整体并没有发生大的改变，它还是有很大的斜率和曲度。事实上我们甚至不需要等到几个月后才能

⊖ 通常函数 η^* 在短端之外的异常波动不会超过数值误差。

看到显著的偏离，几周甚至几天后偏离就很明显了。

由此我们可以得出结论，收益率曲线拟合是不一致并且很危险的操作。这里的结论不只适用于我前面提到过的模型中，没有什么单因子模型可以刻画收益率曲线的常见的高斜率和高曲度。当收益率曲线极其平缓时，它们也许可以给出合理的结果。我们将在第 36 章讨论这些对收益率曲线建模的批评。事实上，可以刻画收益率曲线常见的高斜率和高曲度的模型很少。例外包括一些 HJM 模型（见第 37 章）和第 68 章将要介绍的一种非概率化模型。

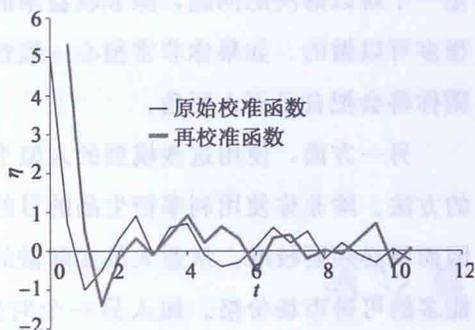


图 31-2 典型的短时间后再校准函数 $\eta^*(t)$

31.5 其他模型

还有一些短期利率的其他模型。其中最常用（但是不存在显性解）的是 Black, Derman & Toy 模型（即 BDT 模型），该模型中风险中性瞬时利率满足

$$d(\log r) = \left(\theta(t) - \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} \log r \right) dt + \sigma(t) dX$$

两个时变函数 σ 和 θ 使得零息债的利率期限结构及波动率结构都能够得到匹配。一个更一般的模型就是 Black & Karasinski 模型

$$d(\log r) = (\theta(t) - a(t) \log r) dt + \sigma(t) dX$$

这些模型很常用，因为通过数值方法可以很简单地校准。

当然对收益率曲线拟合的任何一般性批评在这些模型中都存在。另一方面，我们将在第 36 章所看到，模型中 r 的波动率依赖于 r 本身，这与从美国利率数据中发现的实证结果一样。

31.6 总结

本章概述了拟合收益率曲线的原因，以及在一些简单模型中进行校准的方法。从实用主义角度来看，很难对校准进行反对，因为我们不能用理论价格与实际交易价格相差甚远的工具进行对冲。但是从建模和实证角度，又很难赞同校

准，因为实际数据显示了这种思路有多么不一致。这对单因子布朗运动模型来说是一个难以解决的问题，除非收益率曲线突然不那么陡峭了。在理论方面并没有很多可以做的。如果你非常担心一致性的问题，那么就避免使用单因子模型，否则你将会把自己逼入死角。

另一方面，使用这些模型的人似乎是可以赚钱的，我想这是测试模型正确性的方法。除非你使用利率衍生品的目的是进行投机，否则就必须进行 Delta 对冲，因而就必须校准。从业人员实际做的比这里展示的要多得多，他们会校准尽可能多的可得市场价格。加入另一个时变参数，你可以校准不同期限利率的波动率；再加入另一个参数你还可以校准利率顶的市场价格。校准的数据越来越多，这到底算是在挖一个越来越深的墓地还是在精练模型的准确度？

从另一个角度看，假设我们感兴趣的不是套保，而是想用一些固定收益工具进行投机，那么一个常识是收益率曲线是对未来真实利率很差的预测。这种情况下校准收益率曲线是不必要的甚至危险的，我们应该使用现实瞬时利率的过程为固定收益工具“估值”。这样得到的“价值”是现实随机游走下该工具所有预期现金流的现值。为了做到这一点，我们需要针对现实漂移率 u 的模型。有很多方法可以给出满意的结果，它们都不需要进行校准，我们将在第 36 章中讨论这些。在投机情形下的估值问题将是第 59 章的主题。

拓展阅读

- 对于时变参数选择的深入讨论，可参考 Hull 和 White (1990)。
- 关于一般仿射模型的校准，可参考 Klugman 和 Wilmott (1994)。
- 关于积分方程数值解法更详细的介绍，可参考 Baker (1977)。
- 关于 BDT 模型的细节，可参考 Black, Derman 和 Toy (1990)。
- 关于很多常用模型校准问题的深入讨论，可参考 Rebonato (1996)。
- 关于 BDT 模型背后的故事，可参考 Derman (2004)。



第 32 章

利率衍生品

本章内容

- 常见的固定收益合约，如债券期权、利率顶和利率底
- 如何在一致的偏微分方程框架下为利率产品定价
- 如何用市场方式为合约定价
- 路径依赖的利率产品，比如指数摊销利率互换

32.1 引言

在本书第一部分，我们针对股票期权、货币期权和商品期权等多种不同类型的期权推导了定价及对冲的理论。在第 30 章中，我给出了零息债券定价理论，并大胆说，该模型对于其他合约可能也是适用的。

在股票期权世界中，我们已经见识过各种不同程度的复杂性。简单的合约没有路径依赖性，包括香草看涨期权、看跌期权以及二值期权和跨式组合等终值条件不同的合约。复杂程度较高的合约是弱路径依赖的，比如美式期权和障碍期权。从技术角度来讲这些合约中标的资产的路径是重要的，但我们只需要两个维度（ S 和 t ）来解决问题。最后，对于像亚式期权和回溯期权这样的强路径依赖合约，我们必须引进一个新的状态变量来跟踪标的资产路径的关键特征。多数这样

的思路在利率衍生品中也同样适用。

在本章我们将深入研究固定收益合约，考察像债券期权、利率顶、利率底、互换期权、利率顶期权和利率底期权之类的利率衍生品，以及指数摊销利率互换等更复杂的路径依赖合约。

32.2 可赎回债券

作为了解更复杂固定收益产品的热身，我们考察可赎回债券（callable bond）。这是一种简单的付息债，但其发行者可在特定日期以特定金额赎回该债券。赎回该债券的金额可能是时间依赖的。该特性减少了债券的价值：当利率较低从而债券价值较高时，发行者将会赎回此债券。

可赎回债券满足

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \omega^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + (u - \lambda \omega) \frac{\partial V}{\partial r} - rV = 0$$

且

$$V(r, T) = 1$$

在付息日前后有

$$V(r, t_c^-) = V(r, t_c^+) + K_c$$

如果能够以金额 $C(t)$ 赎回债券，那么债券价值满足约束条件

$$V(r, t) \leq C(t)$$

且 $\partial V / \partial r$ 是连续的。

32.3 债券期权

我们可以利用第 30 章中介绍的瞬时利率的随机模型为债券期权这样的或有要求权定价。除了标的资产是债券之外，债券期权（bond option）与股票期权是一样的。债券期权也同时存在欧式期权和美式期权。

作为一个简单的示例，我们推导执行价格为 E 、到期日为 T 、标的资产为在时刻 $T_B \geq T$ 到期的债券的看涨期权满足的微分方程。在计算债券买权的价值之前，我们必须先计算标的债券的价值。

把债券价值计为 $Z(r, t; T_B)$ ，则 Z 满足微分方程

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{1}{2} \omega^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} + (u - \lambda \omega) \frac{\partial Z}{\partial r} - rZ = 0 \quad (32-1)$$

并满足终值条件

$$Z(r, T_B; T_B) = 1$$

及适当的边界条件。现在令这只债券的看涨期权的价格为 $V(r, t)$ 。因为 V 也取决于随机变量 r ，故它也必须满足式 (32-1)。唯一的不同在于期权的终值条件为

$$V(r, T) = \max(Z(r, T; T_B) - E, 0)$$

该回报如图 32-1 所示。

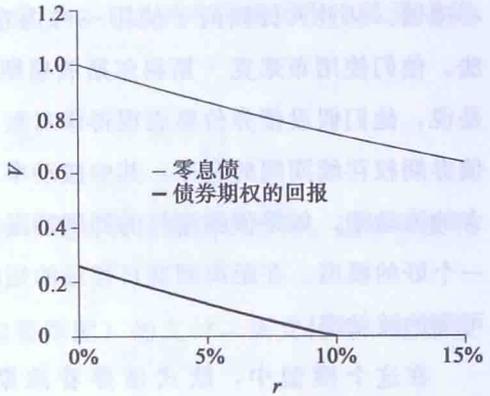


图 32-2 展示了债券期权的彭博期权

计算器。这里使用的是 Black, Derman & Toy 模型。图 32-1 作为瞬时利率函数的零息债价格及基于此债券的看涨期权的回报

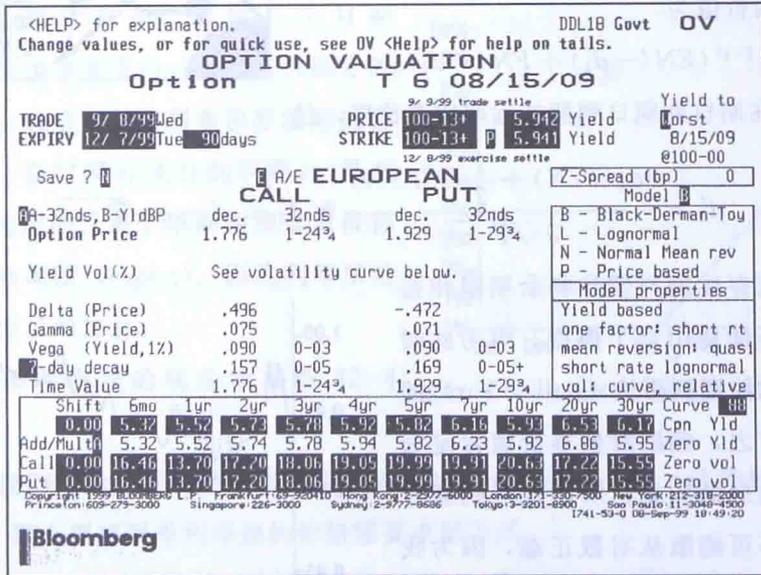


图 32-2 债券期权定价

资料来源：彭博资讯。

市场实践

上面的推导当然是正确的，但存在如下问题：模型中的任何不精确性都会被先求解债券价格再求解债券期权价格两次过程所放大。正如第 22 章所言，该合约是一种二次合约。当执行看涨期权时，你收到的金额是实际债券价格与执行价

格之差，而不是理论债券价格与执行价格之差。所以模型最好能得到正确的债券价格。当然，这种模型是不可能完全正确的，因此给债券期权的定价需要更为小心谨慎。从业人员倾向于使用一种内在不一致但却不太可能出现很大错误的方法。他们使用布莱克-斯科尔斯股票期权定价公式，将标的资产改为债券。也就是说，他们假设债券价格表现得像对数正态资产。他们需要估计债券的波动率和债券期权存续期间的利率，其中波动率可以通过统计估计得到或使用其他合约隐含的波动率。如果债券期权的到期期限与标的债券的剩余期限相比很短，这将是一个好的模型。在距离到期日很远的短时间内债券的表现的确是随机的，且存在可测的波动率。

在这个模型中，欧式债券看涨期权的价格为

$$e^{-r(T-t)} (FN(d'_1) - EN(d'_2))$$

看跌期权的价值为

$$e^{-r(T-t)} (EN(-d'_2) + FN(-d'_1))$$

其中 F 为在期权到期日到期的远期债券价格，且

$$d'_1 = \frac{\log(F/X) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{和} \quad d'_2 = d'_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

当期权存续期与债券剩余期限相差不多时，不能使用这个模型。因为此时存在明显的拉回到平价 (pull to par) 的现象，换言之，到期时债券价值肯定为本金加上最后的利息；所以接近到期时债券价格不可能服从对数正态，因为我们知道它最终的取值。这与股权类资产存在明显的区别，我们不可能确切地知道股权在未来某个日期的价值。这种拉回到平价的现象如图 32-3 所示。

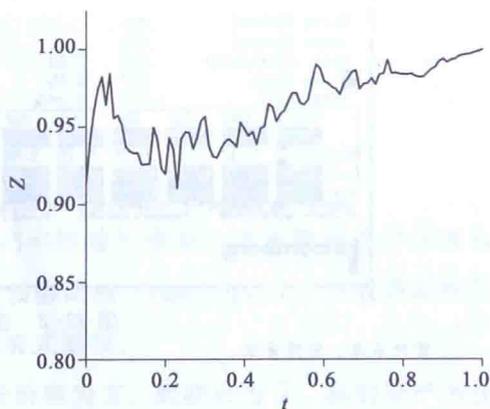


图 32-3 零息债的拉回到平价现象

实践中使用的另一种方法是对标的债券的到期收益率建模。最常见的假设是到期收益率服从对数正态随机游走。通过为收益率建模，然后基于收益率计算债券的价格，我们可以得到在接近到期日也表现得很好的债券价格；拉回到平价的



现象被内生到模型中了。

债券期权的定义中要注意一个技术问题，就是“价格”的确切含义。所考察的期权究竟采用的是净价还是全价必须要十分小心。这要求明确回报中是否应该包括应计利息，详见第 13 章。

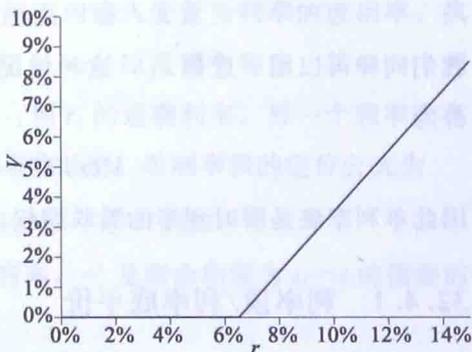
32.4 利率顶和利率底

利率顶 (cap) 是向持有者保证浮动利率不超过特定数值的合约，这样可变速率就被封顶了。

典型的利率顶合约涉及在时间 t_i (比如每季度) 的支付，该支付对一定数量的本金应用某可变的利率，现金流形式为

$$\max(r_L - r_c, 0)$$

乘以本金 (再乘以利息支付的时间间隔，例如每半年支付一次则乘以 0.5)。这里 r_L 为基准浮动利率，例如 3 个月期 LIBOR 如果每季度支付一次， r_c 为固定的利率上限。这些支付在利率顶存续期内会一直持续。在时间 t_i 支付的利率 r_L 是在时间 t_{i-1} 确定的。每个单期的现金流被称为一个单利率顶 (caplet)，因此利率顶是很多单利率顶的加总。



一个单利率顶的现金流如图 32-4 所示。

如果我们假设实际的浮动利率为瞬时利率，也就是 $r_L \approx r$ (这种近似可能并不重要)，那么要得到单利率顶的价格需要求解下式

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + (u - \lambda w) \frac{\partial V}{\partial r} - rV = 0 \quad (32-2)$$

终值条件为

$$V(r, T) = \max(r - r_c, 0)$$

从数学角度看，这相当于一个浮动利率 r 的看涨期权。

图 32-5 展示了求解利率顶价格的彭博计算器。

利率底 (floor) 与利率顶类似，不同之处在于其确保利率以 r_f 为下限。利率底由很多单利率底 (floorlet) 组成，每一个的现金流形式都为

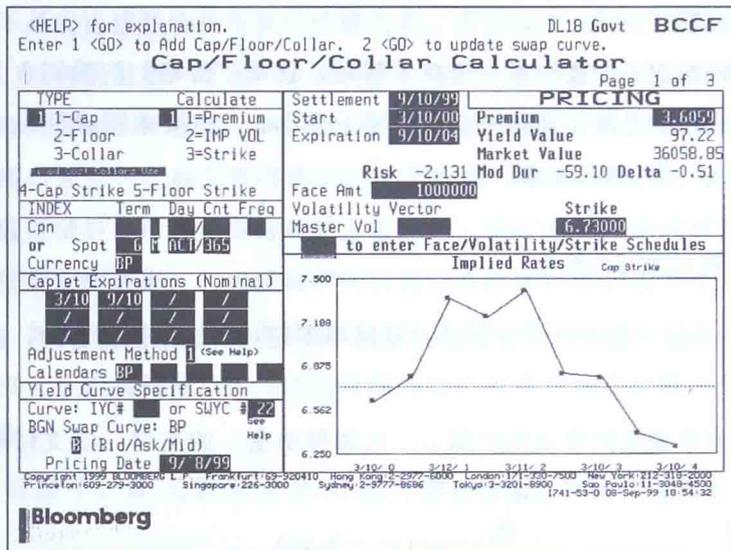


图 32-5 利率顶/利率底/利率领计算器

资料来源：彭博资讯。

$$\max(r_f - r_L, 0)$$

我们同样可以用 r 近似 r_L ，这种情况下单利率底满足债券定价方程，但终值条件为

$$V(r, T) = \max(r_f - r, 0)$$

因此单利率底是瞬时利率的看跌期权。

32.4.1 利率顶/利率底平价

一个单利率顶多头和一个单利率底空头（其中 $r_c = r_f$ ）组合的现金流为

$$\max(r_L - r_c, 0) - \max(r_c - r_L, 0) = r_L - r_c$$

这个现金流与利率互换的一期现金流支付相同。因此存在独立于模型的无套利关系

$$\text{利率顶} = \text{利率底} + \text{互换}$$

32.4.2 利率顶与债券期权的关系

单利率顶的现金流为

$$\max(r_L - r_c, 0)$$

此现金流在时间 t_i 收到，但利率 r_L 在时间 t_{i-1} 确定。这个现金流恰好相当于时间 t_{i-1} 收到的现金流

$$\frac{1}{1 + r_L \tau} \max(r_L - r_c, 0)$$

毕竟这是 r_L 的定义。其中 τ 是利息支付之间的时间间隔。我们可以把该现金流改写成

$$\max\left(1 - \frac{1 + r_c\tau}{1 + r_L\tau}, 0\right)$$

但

$$\frac{1 + r_c\tau}{1 + r_L\tau}$$

是在时间 t_i 支付 $1 + r_c\tau$ 的债券在时间 t_{i-1} 的价格。由此我们可以断定单利率顶与标的为 t_i 时刻到期的债券、在 t_{i-1} 时刻到期的看跌期权等价。

32.4.3 市场实践

由于布莱克 - 斯科尔斯公式使用方便, 应用其为利率顶和利率底定价是很常见的。操作步骤如下。每个独立的单利率顶 (或单利率底) 都作为服从对数正态分布的利率的看涨 (或看跌) 期权来定价。模型的输入变量为利率的波动率、执行价格 r_c (或 r_f)、距现金流支付的剩余时间 $t_i - t$, 以及两个利率。其中一个利率替代了股票价格的位置, 为当前时刻的 t_{i-1} 到 t_i 的远期利率。另一个利率为在 t_i 到期的债券收益率, 用来将现金流贴现到当前时刻。单利率顶的定价公式为

$$e^{-r^*(t_i-t)} (F(t, t_{i-1}, t_i) N(d'_1) - r_c N(d'_2))$$

其中 $F(t, t_{i-1}, t_i)$ 是今天 t_{i-1} 到 t_i 的远期利率, r^* 是剩余期限为 $t_i - t$ 的债券的到期收益率,

$$d'_1 = \frac{\log(F/r_c) + \frac{1}{2}\sigma^2 t_{i-1}}{\sigma \sqrt{t_{i-1}}} \quad \text{和} \quad d'_2 = d'_1 - \sigma \sqrt{t_{i-1}}$$

σ 为 $(t_i - t_{i-1})$ 利率的波动率。单利率底的定价公式为

$$e^{-r^*(t_i-t)} (-F(t, t_{i-1}, t_i) N(-d'_1) + r_c N(-d'_2))$$

32.4.4 利率领

利率领 (collar) 对支付的利息同时设置了上限和下限, 可以把它看作一个利率顶多头和利率底空头的组合来定价。

32.4.5 定制的利率互换、利率顶和利率底

定制利率互换 (step-up swaps) 等产品的互换利率 (或利率上限等) 按照事

先约定的方式随时间变化。

32.5 范围中期债券

范围中期债券 (range note) 只在利率处于约定的上下限之间的日期才会基于其名义本金支付利息。我们假设相关的利率为瞬时利率 r 。这种情形下我们需要求解

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\omega^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + (u - \lambda\omega) \frac{\partial V}{\partial r} - rV + \mathcal{I}(r) = 0$$

终值条件为

$$V(r, T) = 0$$

其中

$$\mathcal{I}(r) = r, \text{ 这里 } r_l < r < r_u, \text{ 否则为 } 0$$

这只是对其正确价格的一个近似, 因为在实际应用中的相关利率对应有限 (而不是无穷小) 的期限。

32.6 互换期权、利率顶期权和利率底期权

互换期权设定了一个执行利率 r_E , 为执行该期权时与浮动利率进行交换的固定利率。对于看涨互换期权或者说支付方互换期权 (payer swaption), 购买者有权利成为固定利率支付方; 对于看跌互换期权或者说接收方互换期权 (receiver swaption), 购买者有权利成为浮动利率支付方。

利率顶期权和利率底期权分别是以利率顶和利率底为标的的期权。这些合约可以很容易用偏微分方程框架来定价。然而, 这些合约是二次合约, 意味着它们的价值取决于另一个更基础的合约, 详见第 22 章。尽管可以使用偏微分方程方法, 且对不同的金融工具模型是一致的, 但实际应用中计算耗时量会很大, 并且由于合约的高阶性容易导致严重的定价偏误。

市场实践

略作调整后, 布莱克 - 斯科尔斯公式可以用于为欧式互换期权定价。也许在模型上这并不完全一致, 但的确比求解偏微分方程更容易些。

假设标的是到期期限为 T_S 的平价互换的固定端利率, 记为 r_f 。假设其服从对数正态随机游走且存在可测的波动率。如果在时间 T 平价互换的利率大于执行

利率 r_E ，那么期权处于实值状态。此时互换期权的价值为

$$\max(r_f - r_E, 0) \times \text{所有未来现金流的现值}$$

我们选择平价利率为“建模”对象是很关键的，因为平价利率是使得浮动方现值等于固定方现值的利率。因此在这个式子中，我们只需要考虑平价利率高于执行利率的部分。这个式子看起来像是典型的看涨期权的回报。在布莱克 - 斯科尔斯框架下为互换期权定价需要输入的变量有平价利率的波动率、到期日、执行时间以及正确的贴现因子。在这个框架下支付方互换期权的定价公式为

$$\frac{1}{F} e^{-r(T-t)} \left(1 - \left(1 + \frac{1}{2} F \right)^{-2(T_s - T)} \right) (FN(d'_1) - EN(d'_2))$$

接收方互换期权的定价公式为

$$\frac{1}{F} e^{-r(T-t)} \left(1 - \left(1 + \frac{1}{2} F \right)^{-2(T_s - T)} \right) (EN(-d'_2) - FN(-d'_1))$$

其中 F 为远期互换利率， T_s 为互换到期日，且

$$d'_1 = \frac{\log(F/E) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{和} \quad d'_2 = d'_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

这些公式假设在互换中每六个月交换一次利息支付。

图 32-6 展示了彭博中互换期权定价的页面。这里定价时使用了布莱克 - 斯科尔斯模型。

<HELP> for explanation, <MENU> for similar functions. DL18 M-Mkt OVSU

SWAPTION VALUATION

OPTION TYPE: American/Bermudan/European

SWAP		Swap Curve	
EFFECTIVE DT	9/ 8/00 or 1 Y x 5 Y	B Bid/Ask/Mid	CURVE # 22
MATURITY	9/ 8/05 NOTIONAL 100001	CURRENCY: BP	BGN CURVE
CALCULATE: <input type="checkbox"/>		CURVE DATE: 9/ 8/99	
	FIXED FLOATING	Deposit Rates	Swap Rates
(1) COUPON	6.0046%	1 Y 4.8667	2 Y 6.5800
NOMINAL DATE	9/ 8 + 0.0 bp (2)	1 M 5.0616	3 Y 6.8100
1st COUPON	3/ 8/01	2 M 5.1531	4 Y 6.8100
PAYMENT FREQ	8	3 M 5.2142	5 Y 6.7300
DAY COUNT	ACT/365	4 M 5.5638	7 Y 6.5100
BUSINESS DAY ADJ.	1	5 M 5.5898	10Y 6.4000
(3) SWAP PREM (PER 100)	0.0000	6 M 5.6250	30Y 5.6500
		9 M 5.7589	
		1 Y 6.1200	
		Enter:	
		1 <GO> Update Swap Curve	
		2 <GO> View Swap/Option Deltas	
		3 <GO> Save OVSU	

OPTION

OPTION TO P= Pay/R=Receive Fixed

MODEL 1-Black 2-BDT 3-LogNormal 4-NNR

SETTLEMENT 9/ 8/99 EXP 9/ 8/00

Volatility 10.05% Mean Rev Speed N/A

Opt Prem (par 100) 2.0061018 51.18 bp

BPV Opt -1884.25 BPV Swap -4058.19

Delta 0.46 Gamma 7.89 Vega 2.71

Copyright 1999 Bloomberg L.P. Frankfurt 1 69-782410 Hong Kong 852-2277-6000 London 1 71-330-7600 New York 212-218-2000
 Price for 609-275-3000 Singapore 65-636-3000 Sydney 61-2-977-4666 Tokyo 3-3001-8900 Fax Pacific 11-2484-350
 1741-93-0 08-Sep-99 18:55:18

Bloomberg

图 32-6 互换期权定价

资料来源：彭博资讯。

32.7 利差期权

利差期权 (spread options) 的回报取决于两个利率之差。最简单的情况下两个利率取自同一收益率曲线, 在更一般的情况下利差可以是不同但相关的收益率曲线上的利率 (收益率曲线与互换曲线、LIBOR 与国库券) 之差、有风险和无风险收益率曲线上的利率 (见第 41 章信用衍生品) 之差或者不同货币的利率之差。

我们可以在前面建立的框架下为这个合约定价吗? 答案是不能。这个合约关键取决于收益率曲线的倾斜程度。在我们的单因子世界中, 所有利率都是相关的, 因此利差几乎没有随机变化的空间。我们等到第 35 章才能在一致的框架下为这种合约定价。

为这种合约定价的另一种方法是应用布莱克 - 斯科尔斯型框架。实际上就是直接把利差当作一个对数正态 (或正态) 的变量来建模, 然后选择合适的利率来贴现。后一种方法是市场实践中使用的方法, 尽管理论上并不十分令人满意, 但也不容易出现大的错误。

32.8 指数摊销利率互换

互换是两方之间基于一定本金而交换利息支付的协议; 通常一方支付固定利率, 另一方支付浮动利率。在指数摊销利率 (index amortizing rate, IAR) 互换中本金数量根据互换期内某种“指数”的表现而减少或摊销 (amortizes); 通常该指数为某短期利率。理解这种互换最简单的方式就是通过示例, 这里我使用尽量简单的例子。

示例

假设初始本金为 1 000 万美元, 其中一方支付的利率为 5%, 而另一方支付的利率为瞬时利率 $r\%$ 。这些利息按季度支付。[⊖] 每个季度都按本金的 $r-5\%$ 进行利息的交换。但是, 本金可能会依据每个季度的即期利率水平进行摊销。在表 32-1 中我们可以看到一个典型的摊销安排表。

下面我们来解读这张表。首先, 在每个季度的重设日都要交换基于当时的本

⊖ 在这种情况下, 实践中 r 为 3 个月期利率而不是瞬时利率。指数摊销利率互换是路径依赖的, 以至于这个差别可能并不重要。

金数量的利息支付。接下来的安排取决于即期利率的水平。如果在利息交换日即期利率（或者摊销安排表所设定的那个指数）

低于 3%，那么未来利息支付的本金将被摊销 100%；换句话说，新的本金水平变为零因而不会再有未来支付。如果即期利率为 4%，那么将摊销 60%，也就是本金将下降到重设日之前水平的 40%。如果即期利率为 8%，那么本金将只

表 32-1 典型的摊销安排表

即期利率 (%)	本金减少量 (%)
小于 3	100
4	60
5	40
6	20
8	10
大于 12	0

摊销 10%。如果利率大于 12%，那么将不会有摊销且本金保持在原有水平。对于表格第一列中间的利率水平，摊销量为其线性插值。这种插值的结果由图 32-7 中所示，我们将其对 r 的函数记为 $g(r)$ 。

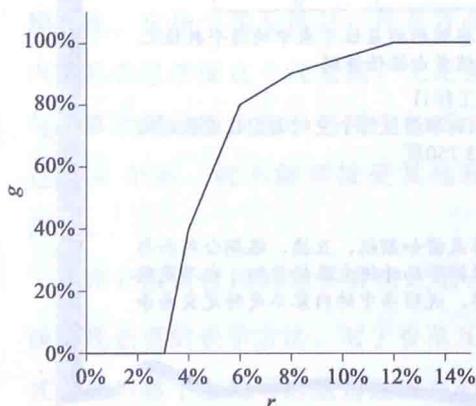


图 32-7 典型的摊销安排表

类别	指数摊销利率互换
时变性	有
现金流	有
决策	无
路径依赖性	强的 / 离散的
维度	3
阶数	一阶

指数摊销利率互换的分类表

所以，尽管初始时设定本金为 1 000 万美元，但每个季度后它都可能会改变。这个特征使得指数摊销利率互换是路径依赖的。

如果利率上升，那么固定利率接受方将会遭受损失，因为他需要按照上升的浮动利率支付而本金并没有减少。如果利率下降，本金会减少，那么他在以更低的浮动利率支付时会基于更少的本金，仍然会遭受损失。所以固定利率接收方是在做空波动率，他们希望利率保持稳定。

图 32-8 展示了美元指数摊销利率互换的条款说明书。合约规定每 6 个月进行一次固定利率和 6 个月期 LIBOR 的交换。这是一个没有附加条款的香草指数摊销利率互换，可以用前面描述的方法定价。方括号内的数值应该在达成协议时设定。

美元指数摊销利率互换															
对手方	x × 机构 客户														
名义本金	5 000万美元, 并按照摊销安排表变化														
结算日	交易日2天之后														
最晚到期日	交易日5年之后														
提前到期日	名义本金变为零的任意支付确定日														
客户的支付	6个月期美元LIBOR, 每半年支付一次, 天数计算惯例A/360														
XX机构的支付	美元年利率X%, 每半年支付一次, 天数计算惯例30/360														
指数利率	6个月期美元LIBOR														
基准利率	[] %														
摊销计划表 (第一个付息期后)	<table border="1"> <thead> <tr> <th>美元6个月期LIBOR-基准利率(%)</th> <th>摊 销 (%)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>-3</td><td>-□</td></tr> <tr><td>-2</td><td>-□</td></tr> <tr><td>-1</td><td>-□</td></tr> <tr><td>0</td><td>-□</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>2</td><td>0</td></tr> </tbody> </table>	美元6个月期LIBOR-基准利率(%)	摊 销 (%)	-3	-□	-2	-□	-1	-□	0	-□	1	0	2	0
美元6个月期LIBOR-基准利率(%)	摊 销 (%)														
-3	-□														
-2	-□														
-1	-□														
0	-□														
1	0														
2	0														
	注意: 如果实际观察到的利差位于表中的两个数值之间, 那么摊销量由插值得到														
支付确定日	每个付息期前两个工作日														
美元6个月期LIBOR	6个月期美元LIBOR利率参见每个支付确定日伦敦时间正午的德励资讯第3 750页														
协议编制	ISDA														
适用法律	英国														
	注: 这个说明书既不代表购买或出售某证券或诸如期权、互换、远期合约和与场外衍生产品具有相似特征的结构性票据等场外衍生产品的要约, 也不是购买或出售证券或OTC衍生产品的宣传单。说明书中的内容不是特定交易条款的完整描述, 其更改不受限制。														

图 32-8 美元指数摊销利率互换的条款说明书

我们将在第 38 章讨论为这些合约定价的细节问题。

指数摊销利率互换的其他特征

1. 锁定期

通常在合约存续期之初存在一个锁定期, 锁定期内本金并不减少。此期间的利息支付与香草互换类似。在数学上, 我们可以通过将摊销安排表中的 $g(r)$ 改成时变的 $g(r, i)$ 来刻画此特征。此种情况下摊销量不仅取决于即期利率, 还取决于重置日 t_i 。该模型可用于刻画比简单的锁定期更加复杂的结构。此时相似性结构得到了保留。

2. 清零

对于一些合约，一旦本金下降到初始本金的特定比例，那么它将直接被降低到零。这种特征与障碍条款一样使相似性降维变得不可能。

32.9 内嵌可决策条款的合约

下面这个合约很有趣，因为它需要持有者做出一系列复杂的决策，决定是否接受或拒绝现金流。这个合约是路径依赖的。

该合约名为**灵活互换**（flexiswap），是存续期内有 M 次基于浮动利率与固定利率之差的现金流交换的互换。持有者必须在这些现金流中选择恰好 $m \leq M$ 个现金流。在每个现金流日，持有者必须声明是否想接受这个现金流，无论接受与否事后都不能反悔。当接受的现金流达到 m 个后，就不能再接受其他现金流了。

类别	灵活互换
时变性	有
现金流	有
决策	有
路径依赖性	强的 / 离散的
维度	3 (2连续, 1离散)
阶数	一阶

灵活互换的分类表

在介绍该合约的定价方法之前，先谈谈现金流的表示方法。对于香草互换，我们会把互换的浮动端写成零息债的形式，然后整个合约可以通过贴现率曲线进行定价。我们肯定不会去求解偏微分方程。但是，由于现在的问题是路径依赖的，比较保险的方式是按通常的假设令每个现金流形式为

$$r - r_f$$

其中 r 为瞬时利率。

该合约定价的窍门是引入 $m+1$ 个 r 和 t 的函数 $V(r, t, i)$ ，其中 $i=0, \dots, m$ 。指数 i 表示剩余可选择的现金流数量。例如， $i=0$ 表示所有的现金流都已经选择完毕。不管你采用何种单因子利率模型，上述每个函数都将满足该模型。

由于现金流选择完毕，函数 $V(r, t, 0)$ 一定等于零。但其他函数呢？引入 t_j 作为有现金流的日期，其中 $j=1, \dots, M$ 。我们要确保两点。首先，如果只剩下 i 个现金流可选，而我们还有 i 个现金流没有选择，那么我们必须全部接受。

其次，我们真的面对选择时，必须使选择的结果达到最优。

第一点可以由如下条件保证，在每个现金流日

$$V(r, t_{M-i}, i+1) = V(r, t_{M-i}, i) + r - r_f, i = 0, \dots, m-1$$

这些等式意味着如果只剩 i 个现金流没有选择，那么剩下的 i 个现金流都会被接受。

之前的其他选择的最优性由一个美式约束保证

$$V(r, t_j, i+1) \geq V(r, t_j, i) + r - r_f$$

无论你选择何种利率模型，求解这个合约价值所需的时间近似于求解一个同样期限的无路径依赖的单一合约的 $m+1$ 倍。

同样存在灵活利率顶 (flexicaps) 和灵活利率底 (flexifloors)。

32.10 利率不是瞬时利率的情况

在介绍利率的章节我们已经看到瞬时利率、1 个月期利率、3 个月期利率甚至 6 个月期利率几乎都是通用的。通常考察的合约会指定使用哪种利率。如果现金流每季度发生一次，那么合约一般都指定利率为 3 个月期的利率。在第 14 章中把互换分解为一系列零息债时我们利用了这个事实。在其他时候我按照习惯用不可观察的瞬时利率代替了真实利率。这么做的原因在于我们的建模对象是瞬时利率 r ，直接用建模变量来表示现金流是很好的选择。

下面是对何时使用理论上合用的瞬时利率以及何时使用真实的利率（虽然实践中保持一致性通常困难很多）的粗略指引。

如果下面所有条件都适用，那么就用瞬时利率为合约定价：

- 合约细节中提到的真实利率为 6 个月期或是更短期限的；
- 合约现金流对于利率高度非线性，或是提前执行，或是路径依赖；
- 不存在与我们的合约现金流匹配的更具流动性的可得工具。

为了保险起见，你应该同时使用可得的工具进行静态套保以减少所有的现金流，然后为剩余现金流定价。这可以尽可能多地减少模型误差。这看起来可能像是小小的近似，但却是真正的问题所在：你可能会在不经意间造成了套利机会。

瞬时利率与其他利率之间的关系

期限无穷小的瞬时利率与有限期限利率的关系可以通过零息债定价方程来描述。对于一般的瞬时利率模型来说这个关系是复杂的，除非利率期限非常短。

我们可以通过泰勒级数来展开短期限零息债定价方程式 (30-4)。在第 31 章我们详细地介绍过，不过这里再来看一下展开的结果。将

$$Z(r, t; T) = 1 + a(r)(T-t) + \frac{1}{2}b(r)(T-t)^2 + \dots$$

代入式 (30-4)，我们得到

$$a(r) = -r$$

和

$$b(r) = r^2 - (u - \lambda w)$$

从这里我们可以推出短期限收益率曲线由下式给出

$$-\frac{\log Z}{T-t} \sim r + \frac{1}{2}(u - \lambda w)(T-t) + \dots, \text{ 当 } t \rightarrow T \text{ 时} \quad (32-3)$$

作为瞬时利率模型的一部分，我们介绍过作为 r 和 t 函数的风险调整漂移率 $u - \lambda w$ 。因此上式给出了任意短期限利率和瞬时利率的近似关系。我们可以在下面的例子中看到该式的应用。

一个单利率顶的现金流为

$$\max(r_L - r_c, 0)$$

如果其中 r_L 为 3 个月期 LIBOR，可将其近似写成

$$\max\left(r + \frac{1}{8}(u - \lambda w) - r_c, 0\right)$$

$\frac{1}{8}$ 来自 $\frac{1}{2}$ 乘上以年计算的 3 个月期利率的期限。如果我们相信所采用的单因子模型，那么就必须相信与简单地用 r 代替 r_L 相比，该式是对真实现金流更好的表示。

32.11 一些例子

图 32-9 的条款说明书展示了一个英镑/德国马克利差扩大互换的细节。这个合约让对手方可以对德国与英国之间利差变大进行下注。为这个合约定价需要一个能刻画英国利率、德国利率以及两者相关性的模型。

<u>英镑/德国马克互换</u>	
开始日	1999/3/10
到期日	2003/3/10
对手方1	
支付浮动利率利差	3个月期德国马克LIBOR加上利差2.35%
对手方2	
支付浮动利率	3个月期英镑LIBOR
注：这个说明书既不代表购买或出售某证券或诸如期权、互换、远期合约和与场外衍生品具有相似特征的结构票据等场外衍生品的要约，也不是购买或出售证券或OTC衍生产品的宣传单。说明书中的内容不是特定交易条款的完整描述，其更改不受限制。	

图 32-9 一个英镑/德国马克利差扩大互换的条款说明书

图 32-10 展示了可用世界银行债券偿还的美元 1 年期固定利率债券。这个合约有趣的地方在于债券发行者可以选择按面值偿还该债券，也可以在 3 只世界银行债券中选择 1 只来偿还。很明显，发行者将选择在赎回时刻交割最便宜的那种债券。因此这是最便宜可交割券的一个例子。

<u>可用世界银行零息债偿还的美元1年期固定利率债券</u>	
此债券既可以按面值偿还，也可以用在2009年3月1日、2009年4月15日或者2009年7月15日到期的世界银行零息债偿还。偿还选择是发行者的期权。如果用世界银行债券偿还，有效价格将是3月债券价格的57.24%，4月债券价格的56.85%和7月债券价格的56.05%。	
发行日	2002/4/15
到期日	2003/4/15
发行价格	100%
票息	7.00%
注：这个说明书既不代表购买或出售某证券或诸如期权、互换、远期合约和与场外衍生品具有相似特征的结构票据等场外衍生品的要约，也不是购买或出售证券或OTC衍生产品的宣传单。说明书中的内容不是特定交易条款的完整描述，其更改不受限制。	

图 32-10 一个美元固定利率票据的条款说明书

图 32-11 中的条款说明书为与英镑 LIBOR 挂钩的英镑 2 年期可选范围中期债券。合约支付等价于 6 个月期 LIBOR 年利率加上 100 个基点的日票息。但是该票息只有当 LIBOR 水平落在宽度为 80 个基点的区间中才支付。这个范围中期债券新奇之处在于由持有者在每个付息期之初选择这 80 个基点的区间。

与英镑6个月期LIBOR挂钩的英镑2年期可选范围中期债券

此票据基于6个月期LIBOR在80个基点范围之内的天数来支付票息。这个范围由购买者在每个付息期之初选择。

发行日	2000/3/24
到期日	2002/3/24
发行价格	100%
票息	$[6\text{个月期LIBOR}+1.00\%]\times N/D$
N	6个月期LIBOR在范围内的交易日天数
D	观察期内的交易日天数
范围	每个观察期开始之前两天由购买者决定
观察期	时期1: 2000/03/24 ~ 2000/09/24 时期2: 2000/09/24 ~ 2001/03/24 时期3: 2001/03/24 ~ 2001/09/24 时期4: 2001/09/24 ~ 2002/03/24

注：这个说明书既不代表购买或出售某证券或诸如期权、互换、远期合约和与场外衍生品具有相似特征的结构性票据等场外衍生品的要约，也不是购买或出售证券或OTC衍生产品的宣传单。说明书中的内容不是特定交易条款的完整描述，其更改不受限制。

图 32-11 一个可选范围中期债券的条款说明书

32.12 更多利率衍生品

下面的产品都需要随机利率模型来定价，它们是模型依赖的。

- **期限可变互换 (accordion swap)**：到期期限可以根据持有者意愿而延长或缩短的互换（固定收益工具，见第 14 章）。
- **障碍利率顶/利率底 (barrier cap/floor)**：有障碍特征的利率顶或利率底。
- **基差互换 (basis swap)**：互换两端都为浮动利率，比如不同期限或不同货币的利率。
- **百慕大互换期权 (bermudan swaptions)**：百慕大互换期权与香草互换期权的相似之处在于它们都赋予持有者支付（支付方互换期权）或接收（接收方互换期权）互换固定端的权利，而百慕大特征允许持有者在特定日期执行。
- **有界利率顶或利率底 (bounded cap or floor)**：总回报有界的利率顶或利率底。
- **可赎回互换 (callable swap)**：固定利率支付方可以赎回的互换。
- **常期限互换 (constant maturity swap)**：互换一端本身就是一个常期限的互换利率（而不是更标准的 LIBOR 利率）。

- **后定 LIBOR 利率互换 (LIBOR-in-arrears swap)**: 后定 LIBOR 利率互换是一种在确定利率的同时进行浮动支付的利率互换。在香草互换中浮动利率在支付前就先被固定住了, 所以对于每 6 个月支付一次 6 个月期 LIBOR 的互换, 其浮动利率在现金流支付前 6 个月就已经确定了。这个微妙的区别意味着后定 LIBOR 利率互换不能分解为债券, 且其定价是模型依赖的。得出式 (32-3) 的分析展示了香草互换与后定 LIBOR 利率互换之间的细微区别。由于这个区别取决于远期曲线的斜率, 后定 LIBOR 利率互换常被看作赌收益率曲线变陡或变平。
- **移动平均利率顶/利率底 (moving average cap/floor)**: 支出由一段时间内平均利率所决定的利率顶或利率底。
- **可回售互换 (putable swap)**: 浮动利率支付方可以赎回的互换。
- **单向浮动利率债券 (ratchets and one-way floaters)**: 单向浮动利率债券是以单调递增 (或递减) 的方式重新设定周期性支付数量的浮动利率债券。重新设定的数量取决于特定浮动利率。
- **可变利率顶/利率底 (reflex cap/floor)**: 支付取决于触发器的利率顶或利率底。
- **反向浮动债券 (reverse floater)**: 当标的利率下降时票息上升的浮动利率债券, 反之亦然。
- **滚动利率顶/利率底 (rolling cap/floor)**: 每次支付的虚值部分滚动到下一期的利率顶或利率底。
- **触发器 (triggers)**: 触发器与障碍期权类似, 其支付只有在特定金融资产的交易价格达到特定水平之上或之下才发生。例如, 触发式互换在参考 LIBOR 利率高于/低于某特定水平时跟香草互换一样进行固定端和浮动端的交换。你可以想象到这些合约有向上向下、敲入和敲出等变种。

32.13 总结

在固定收益世界中存在很多种合约。完整介绍并为全部产品建模是不可能的任务, 我们只能介绍其中一小部分。在本章中我介绍了在一些特殊情况下两种可能的建模方法。这两种方法分别是通过偏微分方程的一致性方法和通过布莱克-斯科尔斯股票期权模型的业界方法。前者的优点在于其对所有工具都是一致的, 但是用于高流动性和高阶的合约时比较危险。对于更复杂的、低流动性的和路径

依赖的合约可以使用这种技巧。正如所有人承认的那样，另一种方法要求所有合约的表现扭曲变换，直到看起来像是某个虚拟的对数正态分布的东西的看涨或看跌期权那样。尽管对于不同的合约完全不具备一致性，但不会轻易导致严重的定价偏误。

我们鼓励读者去探索使用这两种截然不同方法为产品定价的更多细节。若读者能自己为新合约进行建模就更好了。

拓展阅读

- Black (1976) 假设债券是对数正态资产为债券期权价格建模。
- 为指数摊销利率互换定价的更多例子，参见 Hull 和 White (1996)。
- Jamshidian 关于利率衍生品定价的所有文章在业界都很流行，请参考书后的文献目录。
- 关于利率衍生品定价和套保方面最好的技术书籍是 Rebonato (1996)。
- 关于利率衍生品全面的清单，参见 <http://my.dreamwiz.com/stoneq/products>。
- Hagan (2002) 解释了如何用香草对冲工具表达奇异产品的波动率风险。
- 关于一些金融工具凸性调整的解释，参见 Hagan (2003)。
- 关于利率顶定价，参见 Jäckel (2003)。
- 关于 CMS 定价，参见 Berrahoui (2004)。
- Jäckel 和 Kawai (2005) 介绍了存在波动率偏斜时利率期货合约的定价公式。



第 33 章

可 转 债

本章内容

- 可转债 (CB) 基础
- 可转债的目的
- 可转债定价和分析的市场惯例
- 如何在单因子框架下为可转债定价
- 如何在多因子框架下为可转债定价
- 可能造成可转债路径依赖的特性

33.1 引言

可转债具有可转换的性质，使得这类合约在数学上与美式期权相近。它们引人注目的另一个原因是其价值既依赖于股票价格又依赖于利率。本章中我首先给出市场实践中用于分析可转债的一些概念和定义，接下来我将在单因子（随机资产价格）的框架下解读可转债的合约条款。最后我会展示如何在两因子（随机资产价格和随机利率）的情形下给可转债定价。

33.2 可转债基础

除非在到期前持有人已经将债券转换成了标的资产，某只股票的可转债

(convertible bond, CB) 支付事先约定的息票并且到期支付本金。因此可转债除了拥有普通债券的性质以外,还具有允许持有人自己选择交换成特定资产的性质。这种可交换的性质称为**转换**(conversion)。

可转债的价值显然不会低于下面两个值:

- 其**转换价值**(conversion value),即立即转换成标的股票可以获得的价值(无论此时转换是否是最优的)



$$\text{转换价值} = \text{股票市价} \times \text{转换比率}$$

- 其作为公司债获得最终本金及存续期息票的价值。该价值称为**纯债价值**(straight value)。

从后者可以看出为何可转债的定价需要考虑信用风险问题。信用风险问题是非常重要的,但在此我们不会进行详细的讨论。我们假设没有违约风险。在第40章我们再深入讨论信用风险的问题。

33.2.1 可转债的目的

公司发行债券是为了筹集资本。有各种各样不同类型的公司债。一种是最简单的普通债券,即支付固定的息票和到期支付本金的债券。多数公司债附带可赎回条款,因此发行公司可以在到期前将债券赎回,当利率下降到低于发债时的市场利率时它们就会这么做。有些债券具有可回售条款,这样债券持有人可以在到期前将债券卖回给发行公司。因为具有违约的可能,公司债还会根据破产事件发生时得到偿付的优先程度进行分级。

可转债只是另一种类型的公司债券。从发行方的角度来看,可转债相比普通债券的优势在于,当公司经营成功时,其股票价格会上升,从而可转债的持有人会把债券转换成股票,于是发行公司成功增发了新的股份,对发行方来说增发新的股份相比持续支付利息是一个更好的选择。而债券的持有方购买可转债是为了在获得该公司股票头寸的同时可以得到某种下跌保护。当然,可转债仍然是商业票据的一种,违约风险总是存在的。

多数可转债由小公司发行,通常息票都比较低。通过发行可转债,小公司可以在短期得到低息的资金。而在长期中如果公司获得成功,它们可以将股权换给

投资者达到皆大欢喜的局面。另一方面，发行可转债的可能会是投机性更强的公司，它们在通过这种方式募集到资金后会倾向于冒更大的风险。试想一下如果经营不成功会怎样呢？

可转债具有的特征使得其表现得时而像股票，时而像债券。可转债的可转换性质又使其具备类似美式期权的特征。何时执行美式期权的问题与何时转换可转债的问题非常类似。这种“可选择”特性增加了可转债的价值。与期权不同的地方在于可转债被转换时是要发行新股的。

可转债同时有股权和债权特征，是混合（hybrid）金融工具的一个例子。

33.2.2 可转债的发行方

- 可转债是由公司发行的。
- 这些公司在信用等级上通常都不是最高等级的。

通过出售可以转换成股权的债券，发行方只需支付较低的利率。

33.2.3 为何发行可转债

公司募集资金有许多可选的方式。这些可选方式分为两类：发行股权和发行债权。

- **发行股权**（issue equity）：稀释了每股盈利但是初始融资成本较低。
- **发行债权**（issue debt）：不会稀释每股盈利，但是可能有较高的初始融资成本。

另一种可能的选择是发行同时具有上述两种特征的混合性金融工具：可转债。

- 该债券比相同到期日和相同价格的普通债券息票率更低（或者说以相同的息票率可以卖出更高的价格）。
- 在债券被转股并发行新股票之前每股盈利不会被稀释。
- 如果债券被转股，本金就不用再偿还了。

通常可转债的发行方具有很高的现金需求，或许是那种花钱飞快的低信用公司。这些公司可能是一些新成立的公司。在美国，只有30%的可转债是投资级别的（但是比例在上升）。在欧洲和日本该数据为85%。

示例

科技/传媒/通信和生物科技公司 (Technology/Media/Telecommunications and Biotechnology companies), 高烧钱率 (现金消耗速度), 高波动率, 高违约风险。(高波动率提高了可转债的价格, 而高违约风险降低了价格。)

33.2.4 为何购买可转债

可转债具有吸引力的原因是:

- 可以获得公司股价上升的获利, 同时又有下跌保护 (如果没有违约)。
- 息票通常会比对应股票的股息要高。
- 一些投资者可能存在直接参与股权市场的政策障碍。可转债的债券特性使得其具有吸引力。
- 作为债权型证券, 在违约时它在法律上的偿付优先权高于股权。

33.2.5 一些统计数据

投资可转债目前已不再是个人投资者的专属, 对冲基金在最近一段时间已经统治了该市场。

- 从全球来看, 可转债的资本量达到 5 000 亿美元。
- 有 400 家专门做可转债套利的对冲基金 (在总计 7 000 家对冲基金当中)。
- 可转债套利 (自 1993 年以来) 是第三好的对冲基金策略, 仅次于股票市场中性策略和事件驱动策略, 夏普比率达到了 1.04 (同时期 N. B. 标普 500 的夏普比率为 1.18)。
- 对冲基金持有了全部可转债的 70%。

以上是进行统计时的情形, 现在风向又变了。最近可转债套利已经算不上盈利的策略了。太多的对冲基金跳进了这辆马车, 压坏了车轮。套利机会已经被压榨一空。但是不管怎样……

33.3 市场实践

前面已经说了, 可转债的价值不会低于其转换价值。而可转债中的债券成分会提高其价值。我们可以据此计算其市场转换价格 (market conversion price)。

其值为可转债持有人立刻执行其转股权获得股票所实际支付的每股价格。

$$\text{市场转换价格} = \frac{\text{可转债的市场价格}}{\text{转股比率}} \geq \text{标的股票价格}$$

可转债的购买者支付了标的股票的市场价格以外的溢价。该权利金的大小由市场转换溢价比率 (market conversion premium ratio) 衡量

$$\text{市场转换溢价比率} = \frac{\text{市场转换价格} - \text{可转债当前的市场价格}}{\text{标的股票的市场价格}}$$

通过持有标的股票你可以获得所有红利, 而持有可转债你可以获得债券息票而不是股票的红利。衡量持有债券的这种好处的指标是有利收入差 (favorable income differential)

$$\text{有利收入差} = \frac{\text{债券的息票} - (\text{转换比率} \times \text{每股红利})}{\text{转换比率}}$$

在计算出上述指标后我们可以估计溢价偿付期 (premium payback period), 即需要多长时间才能弥补可转债高于股票价格的溢价

$$\text{溢价偿付期} = \frac{\text{市场转换价格} - \text{可转债当前的市场价格}}{\text{有利收入差}}$$

当然这里没有考虑货币的时间价值。

当标的股票价格较低时转换的可能性很小, 可转债表现得非常像普通债券。如果股票价格涨到足够高从而可转债会被转换时其表现会跟股票相当。

图 33-1 展示了某可转债的细节, 图 33-2 展示了其价格计算。

SECURITY INFORMATION		ISSUER INFORMATION	
CPN FREQ	ANNUAL	NAME	SOL MELIA EUROPE, BV
CPN TYPE	FIXED	TYPE	INDUSTRIAL
MTY/REFUND TYP	CONVERTIBLE	IDENTIFICATION #'s	
CALC TYP (1)	STREET CONVENTION	ISIN	XS0101633310
DAY COUNT (1)	ACT/ACT	HLNUM	FC287
MARKET ISS	EURO NON-DOLLAR	COMMON	010163331
COUNTRY/CURR	ES /EUR	ISSUANCE INFO	
COLLATERAL TYP	COMPANY GUARNT	ANNOUNCE DT	8/31/99
AHT ISSUED	200,000(M)	1ST SETTLE DT	9/15/99
AHT OUTSTAND	200,000(M)	1ST CPN DT	9/15/00
MIN PC/INC	1,000/ 1,000	INT ACCRUE DT	9/15/99
PAR AHT	1,000.00	PRICE @ ISSUE	100
LEADMGR-BOOKS	WDR-sale	RATINGS	
APPLIED	LUXEMBOURG	MOODY	NA
		S & P	NA
		COMP	NR
		DCR	NA
		FII	NA

NOTES: NO PROSPECTUS
 CALL ACC VAL FROM 9/29/02 ONLY IF CH STK @LST=@19.5052 FOR 20/30 T/D. PRX/SHR=
 €15.004. INIT CVR PREM=21%. CVTS FROM 10/25/99. GTD BY SOL MELIA. SR, UNSEC'D.
 Copyright 1999 BLOOMBERG L.P. Frankfurt 1189-300410 Hong Kong 2-2997-0000 London 111-3307-7500 New York 212-311-3000
 Prince of Wales 609-273-3000 Singapore 3-225-3000 Sydney 2-397-8686 Tokyo 3-3201-6500 Sao Paulo 11-3048-4500
 1741-5340 Dblimp-99 18-29-09

Bloomberg

图 33-1 可转债债券信息

资料来源: 彭博资讯。

YA		DL18 Corp YA		
Enter all values and hit <GO>.				
CONVERTIBLE BOND ANALYSIS				
Press DVCV <GO> for Bloomberg's Convertible Bond Model Analysis				
SOL MELIA EUROPE SOLSM 1 09/15/04 99.3750/99.8750 (3.38/3.28) BGN @18:00				
SETTLEMENT DATE		9/15/1999	WORKOUT 9/15/2004 @ 112.020	
BOND: PRICE	99.87500	DURATION (YEARS)	4.906	
YIELD TO WORKOUT	3.279	ACCRUED INTEREST/BOND		
STOCK: SOL PRICE	12.33	ANNUAL DIVIDEND	0.060393	
CONVERSION TERMS				
CONVERSION RATIO	66.649	<OR>	CONVERSION PRICE	15.004
CASH REQUIRED / 1000 FACE			DILUTION PROTECTION	100 %
COST OF CARRY (%)	?		PROVISIONAL PRICE	19.505199
SHORT REBATE (%)	5.6		HEDGE RATIO (%)	100
HAIRCUT (%) on stock	0		CASH REQUIRED FOR HEDGE	176.97
CURRENT YIELD BOND	1.00	PREMIUM POINTS	17.70	
STOCK	0.49	PERCENT PREMIUM	21.53	
ADVANTAGE	0.511	PARITY	82.18	
NET CASH FLOW (\$)/YR	-17.918 = -10.1 %	PROVISIONAL HEDGE	62.99	
BREAK-EVENS YLD ADV.	34.65 (YRS)	BREAKEVEN P & L	-176.97	
CASHFLOW	-9.88 (YRS)			
<small>Copyright 1999 BLOOMBERG L.P. Frankfurt 69-920410 Hong Kong 2-2977-6000 London 171-330-7500 New York 212-318-2000 Princeton 609-279-3000 Singapore 226-3000 Sydney 2-9777-6606 Tokyo 3-3201-6500 Sao Paulo 11-3046-4500 1741-53-0 08-Sep-99 18:59:43</small>				
Bloomberg				

图 33-2 可转债计算器

资料来源：彭博资讯。

33.4 将可转债视为期权

可转债的“回报”形式与普通看涨期权类似。在特定的条件下可转债可以分解为一个纯粹的债券加上一个股票的普通看涨期权。要进行该分解可转债不能具有可赎回或可回售特性。为了分析简单，我们假设股票没有红利。将可转债视为期权进行定价分为 3 个步骤。

- (1) 计算单纯的债券部分的价格；
- (2) 计算普通看涨期权的执行价；
- (3) 使用布莱克 - 斯科尔斯公式计算期权部分的价格。

示例

- 5 年期可转债，不能赎回或回售，本金 1 000 美元。
- 息票率 2%，半年付息一次。
- 转换比率 20。
- 股价 47 美元。
- 5 年期连续复利利率为 5%（相当于半年复利 5.06%）。
- 股票波动率为 22%。

步骤 1: 单纯债券成分 1 000 美元本金的现值 (5% 连续复利下) 为 786.59 美元。所有息票的现值和为 79.59 美元。

因此可转债的单纯债券成分的价值为 866.18 美元。

步骤 2: 执行价 有效执行价就是本金除以转换比率:

$$\frac{1\,000}{20} = 50$$

步骤 3: 期权 一个执行价为 50 美元, 5 年到期, 标的价格为 47 美元, 波动率为 22%, 利率为 5% 的看涨期权价格为多少?

将以上数字输入一个布莱克 - 斯科尔斯公式计算器中, 你得到的结果将是每股 12.97 美元, 对 20 股的期权来说为 259.40 美元。

因此可转债的价格就是单纯债券成分加上期权成分

$$866.18 + 259.40 = 1\,125.58$$

注意期权的 Delta 是 0.74, 所以可转债表现得更像股票而不是债券。

上述定价技巧目前看起来还是不错, 但是如果我们引入一些可转债中常见的特性时就得做出很大的改动了。所以下面我们建立一个灵活一致的一般理论, 但仍然在同样的布莱克 - 斯科尔斯框架中。

33.5 利率已知时可转债的定价

我继续使用 S 来代表标的资产价格, T 代表到期日, 可转债债券可以转换为 n 份标的资产。要介绍可转债定价背后的思想, 我先假设利率在债券存续期内为确定的。因为可转债价格取决于标的资产价格, 我们有

$$V = V(S, t)$$

合约价值取决于标的资产价格和剩余期限。重复布莱克 - 斯科尔斯式的分析, 构造一个由 1 份可转债和 $-\Delta$ 份标的资产构成的组合, 同以前一样, 我们可以得到组合价值变化为

$$d\Pi = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt - \Delta dS$$

选择

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$$



来消除组合的风险。[⊖]

该无风险组合的回报不会超过银行存款的利率，所以有

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (rS - D(S, t)) \frac{\partial V}{\partial S} - rV \leq 0$$

此不等式为布莱克 - 斯科尔斯基本不等式。将本金标准化为 1 美元，终值条件为

$$V(S, T) = 1$$

离散息票每季度或每半年支付一次，所以有每个息票日的跳跃条件

$$V(S, t_c^-) = V(S, t_c^+) + K$$

其中 K 表示日期 t_c 支付的离散息票。

因为债券可能被转换成 n 份资产，我们有约束条件

$$V \geq nS$$

此外，我们还要求 V 和 $\partial V / \partial S$ 的连续性。

提前转换的特性使得可转债与美式期权问题类似；在数学上，我们遇到了另一个自由边界问题。有意思的是终值数据不满足定价约束。因为，虽然到期时价格为 1 美元，但是正好在此之前价格为

$$\max(nS, 1)$$

不考虑信用风险问题，边界条件为

$$V(S, t) \sim nS, \text{ 当 } S \rightarrow \infty$$

和 $S=0$ 时债券价格等于本金和所有息票的现值之和

$$V(0, t) = e^{-r(T-t)} + \sum K e^{-r(t_c-t)}$$

此处求和是对所有未来息票进行。之前我们说过，当资产价格很高时可转债表现得像标的资产，而当资产价格很低时它表现得像非可转的债券一样。

图 33-3、图 33-4、图 33-5 展示了可转债在 $n=1$ 、 $r=0.06$ 、 $\sigma=0.25$ 、剩余期限为 2 年时可转债的价格。

在图 33-3 中，债券无息票支付，股票也没有红利。跟无红利股票的美式看涨期权一样，在到期前执行或转换都不是最优选择。直线是股票价格，可转债券可以以此价格转换。可转债券的价值总是在此直线之上。

[⊖] 由于可转债被对冲基金大量持有，而对冲基金会进行 Delta 对冲，我们发现了一个有趣的现象。对冲基金需要卖空股票来保持 Delta 中性，当股票价格上涨时需要卖出的量更多。股价涨，卖出。相反，当股票价格下跌时需要买回股票。股价跌，买入。最终造成了股票的波动率被降低了。相关的数学计算见 61 章。

在图 33-4 中，股票有 5% 的连续红利率。这种情况下存在一个自由边界，如图所示：对于足够高的股价 S 可转债应该被转换。粗线是可转债价值，细线是无红利时的股票价格和债券价格。

在图 33-5 中，股票无红利，但是债券有 3% 的息票，一年支付两次。跟前两种情况相比可转债的价值更高。这种情况下有在到期日前应该提前执行的情况吗？细线是用于比较的无息票情况下的股票价格和债券价格。

可转债所能转换股票的数量 n 可以时变的。有时候只能在特定的时间段进行转换。这种情况被称为**期间转换** (intermittent conversion)。如果存在这种情形，那么约束条件只需要在这些时间段中满足；在另一些例子中合约是欧式的。

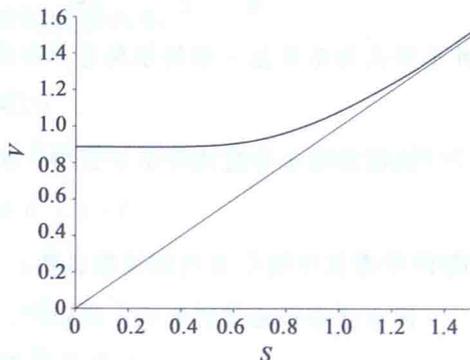


图 33-3 常利率下可转债价值，零息债无红利（详见正文）

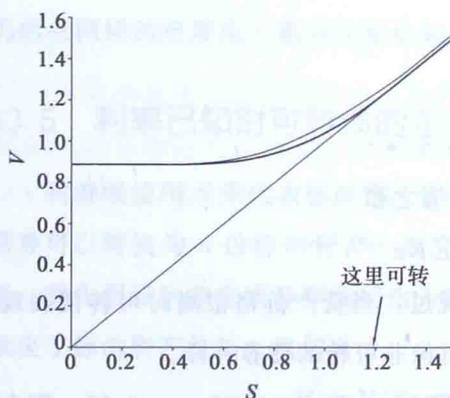


图 33-4 常利率下标的有红利的可转债价值（详见正文）

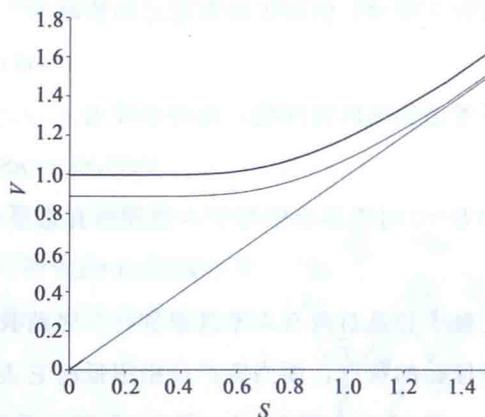


图 33-5 常利率下有息票的可转债价值（详见正文）

可赎回和可回售特性

可转债允许持有人在任意时候选择将债券交换为一定数量的标的资产。可转债常常带有可赎回特性，给予了发行公司在任意时候（或在特定时间段）用约定的金额将债券购回的权利。这个金额有时是随时间变化的。存在可赎回特性的债券显然比没有此特性的债券便宜。对此特性的建模跟对美式执行的处理也是一样的。

如果公司可以以金额 M_C 将债券赎回，那根据无套利条件可以得到

$$V(S,t) \leq M_C$$

M_C 的值可能是随时间变化的。现在我们需要求解一个约束问题，即债券价格以 nS 为下限同时以 M_C 为上限。要满足无套利并求解最优债券价格， V 和 $\partial V / \partial S$ 必须是连续的。跟期间转换特性一样，使得公司只能在特定时间段赎回的期间可赎回特性也不难处理。

图 33-6 的例子展示了存在明显可赎回特性的可转债价值跟标的资产价格的关系。这里可转债可以在任意时刻以 1.2 的价格被赎回。细线是无可赎回性质的同样可转债的价值。

有些可转债附带可回售特性。该权利允许债券持有人以一定金额 M_P 将债券卖给发行公司。 M_P 可能是随时间变化的。现在我们施加的约束为

$$V(S,t) \geq M_P$$

对持有人而言该特性增加了债券的价值。

图 33-7 的例子展示了存在明显可回售特性的可转债价值跟标的资产价格的关系。这里可转债可以在任意时刻以 0.95 的价格回售。细线是无可回售性质的债券价值。

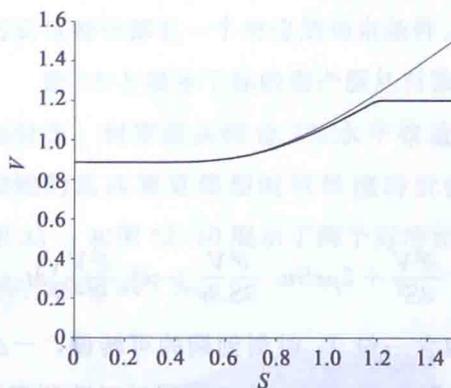


图 33-6 债券可赎回时的可转债与标的资产价值

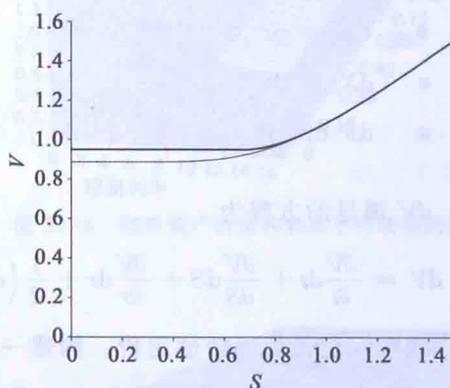


图 33-7 债券可回售时的可转债与标的资产价值

33.6 双因子建模：随机利率下的可转债

通常可转债的存续期间比市场上交易的期权要长得多。因此我们最好还是使用随机利率模型对可转债定价。当利率是随机的，可转债价值的形式为

$$V = V(S, r, t)$$

此前， r 只是一个参数，现在它是一个自变量了。

我们仍然假设资产价格服从对数正态

$$dS = \mu S dt + \sigma S dX_1 \quad (33-2)$$

而利率的过程为

$$dr = u(r, t)dt + w(r, t)dX_2 \quad (33-3)$$

最终我们都会进行数值求解，所以我们允许 u 和 w 为 r 和 t 的任意函数。注意式 (33-2) 和式 (33-3) 有两个维纳过程。这是因为驱动 S 和 r 的是不同的随机变量；这是一个双因子模型。 dX_1 和 dX_2 仍然是从均值为 0 方差为 dt 的正态分布中抽样得到的，但是它们不是同一个随机变量。它们可能是相关的，我们假设

$$E[dX_1 dX_2] = \rho dt$$

其中 $-1 \leq \rho(r, S, t) \leq 1$ 。相关的随机游走在第 11 章中已经讨论过了。在该章中我们见到了其他多因子模型的例子，在这些例子中存在两个（或更多）的风险源，因此除了 t 以外还有两个自变量。多随机变量函数的理论在第 11 章中有涉及，回忆一下伊藤引理可以应用于两个或多个随机变量的函数上。普通的泰勒级数展开加上一些拇指法则就可以得到 S 和 r 的任意函数的微小变化的正确表达式。这些拇指法则包括：

- $dX_1^2 = dt$
- $dX_2^2 = dt$
- $dX_1 dX_2 = \rho dt$

dV 满足的方程为

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{1}{2} \left(\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + 2\rho\sigma S w \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial r} + w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right) dt$$

现在我们来为可转债定价。构建一个包含一份 T_1 时刻到期的可转债， $-\Delta_2$ 份 T_2 时刻到期的零息票债券和 $-\Delta_1$ 份标的资产的组合。我们要同时对冲利率风险和标的资产风险。因此

$$\Pi = V - \Delta_2 Z - \Delta_1 S$$

跟以前的分析一样，选择

$$\Delta_2 = \frac{\partial V}{\partial r} / \frac{\partial Z}{\partial r}$$

和

$$\Delta_1 = \frac{\partial V}{\partial S}$$

以消除组合的风险。将包含 T_1 和 T_2 的项分别整理可以发现

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\sigma S w \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial r} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \\ & + rS \frac{\partial V}{\partial S} + (u - \lambda w) \frac{\partial V}{\partial r} - rV = 0 \end{aligned} \quad (33-4)$$

其中 $\lambda(r, S, t)$ 仍然表示利率风险的市场价格。这跟非资产依赖的普通债券的风险市场价格完全一样, 所以我们可以预期它与 S 无关, 只是 r 和 t 的函数。

该式即可转债的定价方程。我们已经见过了该方程的两个特殊例子:

- 当 $u=0=\omega$, 我们得到了常数利率 r , 式 (33-4) 退化为布莱克 - 斯科尔斯方程。
- 当不依赖资产价格时, 所有的 $\partial/\partial S=0$, 我们回到了基本的债券定价方程。

红利和息票可以按照第 8 章和本章前面的处理方式进入模型。对于离散红利和离散息票我们可以使用跳跃条件。

到期条件和约束条件跟以前的情况一样, 对于可转换特征、可赎回特征和可回售特征都有一个对应的约束条件。

图 33-8 展示了标的资产服从对数正态分布、利率服从拟合 7% 水平收益率曲线的瓦西塞克模型时可转债的价值。图 33-9 和图 33-10 展示了两个对冲比率 $\partial V/\partial S$ 和 $\partial V/\partial r$ 。

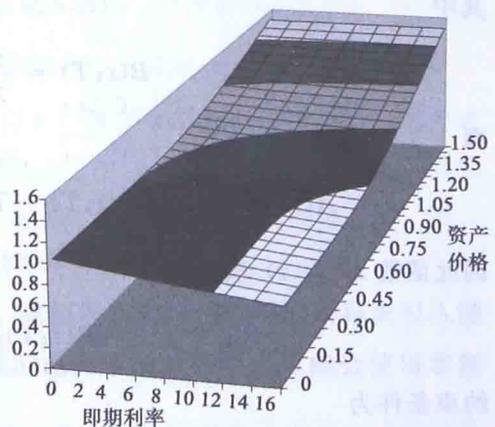


图 33-8 随机资产价格和利率下可转债的价值

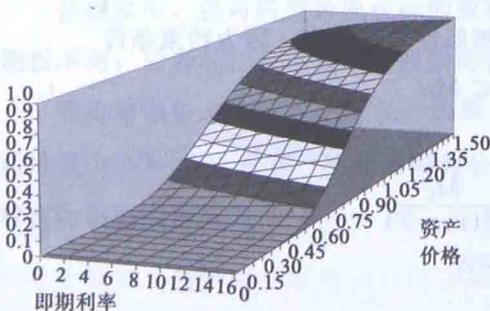


图 33-9 随机资产价格和利率下可转债的 $\partial V/\partial S$

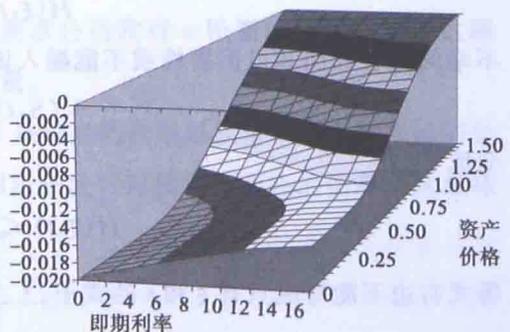


图 33-10 随机资产价格和利率下可转债的 $\partial V/\partial r$

33.7 一个特殊的模型

在一些情况下,对于少数利率模型来说,我们可以进行相似性降维。比如说,如果风险中性利率服从瓦西塞克模型

$$dr = (\eta - \gamma r)dt + \beta^{1/2} dX_2$$

那么我们假设可转债价格的形式为

$$V(S, r, t) = g(r, t)H\left(\frac{S}{g(r, t)}, t\right)$$

跳过一些细节,我们可以知道函数 $g(r, t)$ 一定是与可转债期限相同的零息票债券的价格

$$g(r, t) = Z(r, t; T) = e^{A(t; T) - rB(t; T)}$$

其中

$$B(t; T) = \frac{1}{\gamma}(1 - e^{-\gamma(T-t)})$$

而

$$A(t; T) = \frac{1}{\gamma^2} \left((B(t; T) - T + t)(\eta\gamma - \frac{1}{2}\beta) \right) - \frac{\beta B(t; T)^2}{4\gamma}$$

因此函数 $H(\xi, t)$ 满足

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}\xi^2(\sigma^2 + 2B(t; T)\rho\beta^{1/2}\sigma + B(t; T)^2\beta) \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} = 0$$

约束条件为

$$H(\xi, T) = \max(n\xi, 1)$$

和

$$H(\xi, t) \geq n\xi$$

不幸的是可赎回和可回售性质不能融入该相似性方程当中。因为约束条件

$$V(S, t) \leq M_C$$

变成了

$$H(\xi, t) \leq \frac{M_C}{Z(r, t; T)}$$

等式右边不能写成只有 ξ 和 t 的式子。

33.8 可转债的路径依赖

上面提到的可转债是最简单的一种,实际当中可能会复杂得多。一个复杂性

的来源是路径依赖。一个典型的路径依赖债券可能是下面这样的：

债券在到期时刻 $t=T$ 支付 1 美元。在到期前的任意时刻，它可能被转换为 n 份标的资产。在一开始， n 被设定为一个常数 n_b 。在时刻 T_0 转换比率 n 会根据某标的资产当时价格的函数设定为 $n_a(S(T_0))$ 。我们只分析确定性利率的情况，该三维问题（此时没有利用相似性的解决方案）满足

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV \leq 0$$

其中 $V(S, \mathcal{S}, t)$ 是可转债价值， \mathcal{S} 是 T_0 时 S 的取值。红利和息票可以根据需要加入方程中。可转债价格满足终值条件

$$V(S, \mathcal{S}, T) = 1$$

约束条件

$$V(S, \mathcal{S}, t) \geq n(S, \mathcal{S})$$

其中

$$n(S, \mathcal{S}) = \begin{cases} n_b, & t \leq T_0 \\ n_a(S), & t > T_0 \end{cases}$$

以及跳跃条件

$$V(S, \mathcal{S}, T_0^-) = V(S, \mathcal{S}, T_0^+)$$

此问题是三维的，自变量为 S 、 \mathcal{S} 和 t 。我们可以进行一些理论推导来引入随机利率（而不是选择利率模型），但是四维问题需要的计算时间可能会使得求解难以实现。

33.9 稀释

在现实中，将可转债转换成标的股票要求公司发行 n 份新的公司股份。这跟期权不同，后者的行权不会改变股票的数量。

我将稍微修改一下 S 的定义。如果 N 是转换前的股票数量，那么转换前的公司价值为 $NS - V$ 。存在 $-V$ 项是因为公司由于发行可转债而存在的债务。这意味着实际的股票价格为

$$\frac{NS - V}{N}$$

而不是 S 。可转债价格必须大于股票价格的约束变为

$$V \geq n \frac{NS - V}{N}$$

重新整理可得

$$V \geq \frac{N}{n+N} nS \quad (33-5)$$

我们还有

$$V \leq S \quad (33-6)$$

以及

$$V(S, T) = 1$$

约束式 (33-5) 通过转换价值为可转债价格限定了下界, 比之前的下界更低。约束式 (33-6) 允许公司在债券价格过高时宣布破产。因子 $N/(n+N)$ 被称为稀释度 (dilution)。当取极限值 $n/N \rightarrow 0$ 我们回到了 $V \geq nS$ 。

33.10 信用风险问题

可转债的信用风险问题是非常重要的。如果发行债券的公司破产, 你将得不到任何息票, 可转换成股票的权利也没有什么价值。我们说过当没有违约问题存在时, 可转债在股价较低时表现得像债券一样。这是对的, 但这个债券是有风险的债券, 存在违约的可能。而且, 股票价格很低通常意味着公司健康状况不良。我们可以预期, 这也是市场中实际看到的, 可转债的价格跟股票价格的关系很像图 33-11 所显示的那样。这里可转债价格在 $S \rightarrow 0$ 时趋于 0。我们将在第 40 章看到用于绘制此图的模型。

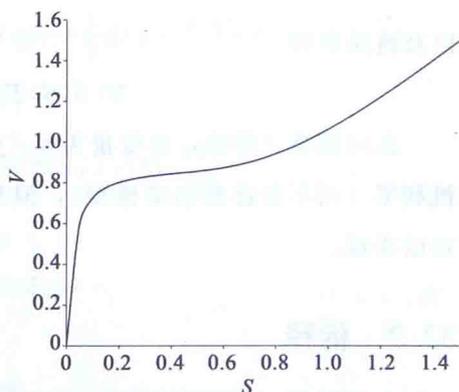


图 33-11 存在违约风险的可转债价值

33.11 总结

可转债是一种非常重要的合约, 在公司融资中占据主要地位。从定价和对冲的角度来看, 它们是非常复杂的工具。它们具有美式期权的提前执行特征并隐含在三个特性 (转换、赎回和回售期权) 中, 它们时而表现得像债券, 时而表现得像股票。它们具有很长的存续期, 比如说 5 年, 这意味着常数利率的假定不再合理。在更复杂的情况中它们还可能是路径依赖的。最后, 它们不是没有违约风险的产品。综合考虑上述因素, 你所面临的是一个非常复杂的合约。

拓展阅读

- 关于增发新股对可转债价格影响的细节见 Brenna 和 Schwartz (1997), Cox 和 Rubinstein (1985) 以及 Gemmill (1992)。
- 要了解可转债定价市场实践的更多信息见 Fabozzi (1996) 和 Nyborg (1996)。
- 对于可转债建模更艺术的分析见 Ayache 等 (2002) 的研究。
- Ouachani 和 Zhang (2004) 考察了跨货币可转债。



第 34 章

按揭支持证券

本章内容

- 按揭贷款的种类
- 使得按揭支持证券如此特殊的原因
- 对提前还款的建模

34.1 引言

大多数房屋所有者知道按揭贷款。而按揭支持证券简单地说就是将许多按揭贷款打包在一起然后出售。按揭支持证券最有趣的一面是你必须对住房拥有者的行为建模，看他们是否会提前偿还按揭，会不会进行重新融资等。因为每个证券对应了非常多的按揭对象，我们只需要对住房拥有者的平均行为进行建模。

34.2 个人按揭贷款

按揭 (mortgage) 是一种贷款，通常发放给个人以帮助其购买房屋。按揭有各种不同的形式。利率可能是固定的、浮动的或者固定一段时间后浮动。有时候每月的偿付既包含利息也包含分期偿还的本金。有时候只偿付利息，最终的本金

在按揭到期时通过其他形式的资金支付。按揭的存续期通常很长，典型的期限有 20 年、25 年和 30 年。

个人可以按揭的金额取决于他们的收入和评估的信用度。贷款通常是由房产支持的。对于贷方来说风险可能高于普通的利率风险，因为除了违约还有房产价值下降的风险。



- **固定利率按揭** (fixed rate mortgages) 的利率在整个按揭期内是固定的。每月的支付保持在同样的水平，包含了利息和分期偿还的本金。这是美国最常见的按揭形式。
- **浮动利率按揭** (floating rate mortgages) 的利息支付跟某个可变利率相关。这个可变利率由按揭发放方即贷方决定，其变化是离散的，跟该货币的利率存在松散的联系。这是在英国最常见的按揭形式。

34.2.1 固定利率按揭的每月支付

固定利率按揭每月的支付是固定的，其中既包含了利息也包含了分期偿还的本金。刚开始时，利息占大头，到后面，本金占大头。如果利率为 r_M ，按揭的金额标准化为 1，每月的支付为 x ，那么

$$1 = \sum_{i=1}^{12N} \frac{x}{\left(1 + \frac{r_M}{12}\right)^i}$$

其中 N 为按揭偿付的年数，或者说按揭的存续期。每月支付的计算公式为

$$x = \frac{r_M/12}{1 - (1 + r_M/12)^{-12N}}$$

当还有 M 次剩余支付时，余额的公式为

$$P = \sum_{i=1}^M \frac{x}{\left(1 + \frac{r_M}{12}\right)^i}$$

上述计算使用的是离散时间利率。如果我们用连续时间利率，那加和就要改成积分。

要了解按揭贷款运行的更多细节，你可以去玩一下“垄断者”游戏。

34.2.2 提前偿还

虽然按揭跟其他固定收益证券很相似，但它的确具有一个新的特性：借款者可能会决定在到期前提前偿还余额。这种提前偿还很像普通债券中的可赎回条款。明白两者的不同之处是很重要的。我们在第 32 章中谈过了如何处理债券的可赎回性。那里，债券的可赎回性的处理类似美式期权的提前执行的执行，假设选择者在最优的时刻进行赎回。对于按揭来说提前偿付的时点很大程度上取决于个人的经济状况和他自己对于“最优”的定义（第 63 章更详细地讨论了这对贷款人的影响）。

提前偿付的原因可能是以下任意一种。

- 房产所有者得到了一笔钱，他是风险厌恶的，所以决定提前将按揭还了（可能按揭利率比银行的利率高）。
- 房主决定搬家，所以用卖房所得的钱偿还了按揭。
- 房子毁于地震，保险公司赔的钱交给了贷方。
- 房主违约了，保险公司支付了贷款。
- 利率下降了，房主发现从其他贷方可以获得更优惠的按揭，这被称为重新融资。

其中一些原因比另一些更重要，但大多数都不属于利率有利时房主提前偿还的常见定价假设。只有最后一个原因很接近该“理性”解释，但即便在该情况发生时，惰性也会让很多人懒得进行重新融资操作，甚至很多人根本就不知道还可以这样操作。

我们稍后再来分析提前偿还及其建模方法。

34.3 按揭支持证券

按揭支持证券（mortgage-backed securities, MBS）是通过将许多按揭贷款打包在一起而创建的资金池。投资者可以购买这个池子中的一小份，从而获得所有利息和本金支付的一部分。通常这些



MBS 稍后都可以在二级市场上进行买卖。

通过购买按揭资金池，投资者相当于购买了住房贷款，但没有面临那么大的提前偿还风险。大多数提前偿还并不是基于个人分析的“理性”行事，但如果有大量的提前偿还出现，那就需要考虑“平均”提前偿还。这跟分散化很像。我们稍后会看到如何利用描述借贷者平均行为的提前偿还函数进行定价。

抵押担保债权（collateralized mortgage obligation, CMO）是基于 MBS 的证券，但是经过了再次的打包和（或）分割，从而得到不同到期日的证券。典型的 CMO 可能只有在一定的时间范围内才能收到利息和本金的支付。

MBS 可以分割成本金和利息。只付本金（principal only, PO）MBS 只能得到本金的支付，当提前偿还增加时会变得更值钱。只付利息（interest only, IO）MBS 只能得到利息的支付。后者可能有很大的风险，因为提前偿还率高时利息支付会大幅下降。

发行者

在美国大多数 MBS 由下面的机构发行：

- 政府国民抵押贷款协会（GNMA，俗称吉利美）；
- 联邦国民抵押贷款协会（FNMA，俗称房利美）；
- 联邦住房贷款抵押公司（FHLMC，俗称房地美）。

这些都是美国政府机构或政府支持机构。

其他的像投资银行和住房建设商也会发行自有品牌的 MBS。

34.4 对提前偿还的建模

如果提前偿还是 MBS 区别于其他固定收益证券和衍生品的地方，那么我们就必须对这种提前偿还进行建模。

我们可以极端一点，像对美式期权做的那样求解最优的提前偿还时间。这样可以得到一个理论上的 MBS 最大价值。通常我们不这么做，因为按揭者（房主）并不如此“理性”行事，这样得到的 MBS



通常我们不这么做，因为按揭者（房主）并不如此“理性”行事，这样得到的 MBS

价格会高得不现实。这里的理性打了引号是因为是否理性要以当事人的角度来看(见第 63 章)。^①我们将按按揭者的实际行为建模。

此后几节中我们介绍提前偿还模型。我们假设标的按揭贷款都是固定利率的。

34.4.1 提前偿还的统计数据

图 34-1 展示了按发行年份和息票率绘制的吉利美 30 年新按揭发行金额的等高线地图,单位是 10 亿美元。利率降低的时期通常伴随着息票率的降低。图 34-2 展示了同一时期美国 30 年期利率。

很明显,息票率的分布范围很广。所以,使用任何 MBS 的模型我们都用平均息票率。我们倾向于使用加权平均息票率(weight-averaged coupon, WAC),权重是贷款的价值。

下面是两个提前偿还模型常用的定义。

单月消亡率(single monthly mortality, SMM)是每个月的提前支付占预期按揭贷款余额的比例

$$SMM = \frac{\text{计划余额} - \text{实际余额}}{\text{计划余额}}$$

条件提前偿还率(conditional prepayment rate, CPR)是 SMM 的年化

$$CPR = 1 - (1 - SMM)^{12}$$

34.4.2 PSA 模型

最简单的模型是公共证券协会模型(public securities association model, PSA),

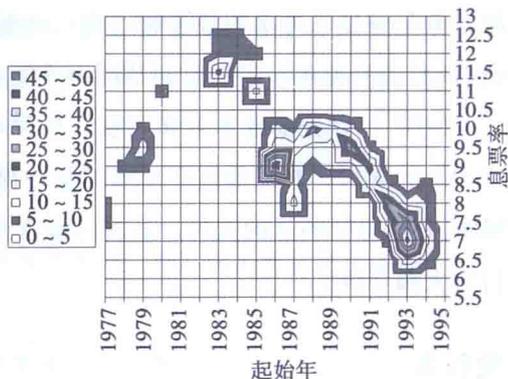


图 34-1 按年和息票排列的吉利美 30 年期按揭发行

资料来源: Davidson & Herskovitz (1996)。

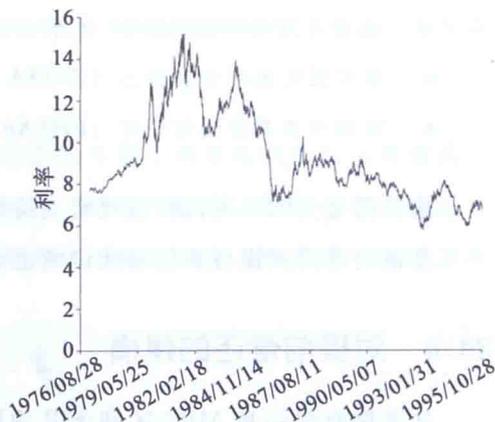


图 34-2 美国 30 年期利率

^① 这儿存在套利机会吗? 如果存在, 它将涉及数百万房主。

该模型中提前偿还率只跟按揭贷款的时间有关。模型假设按揭刚开始时提前支付率为 0，在前 30 个月每个月提高 0.2%，然后保持在 6% 的水平。这些数字是年化的 CPR。图 34-3 和图 34-4 展示了 PSA 模型的 CPR 和剩余按揭比率。请问我是如何算出图 34-4 中数据的呢？

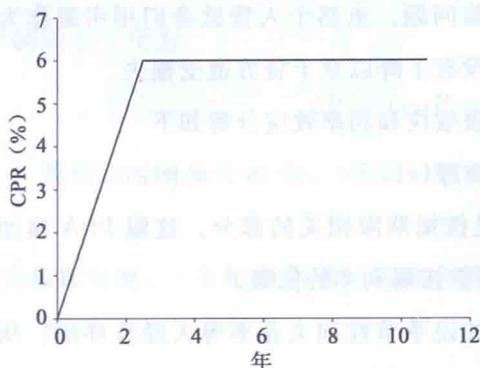


图 34-3 PSA 模型的 CPR

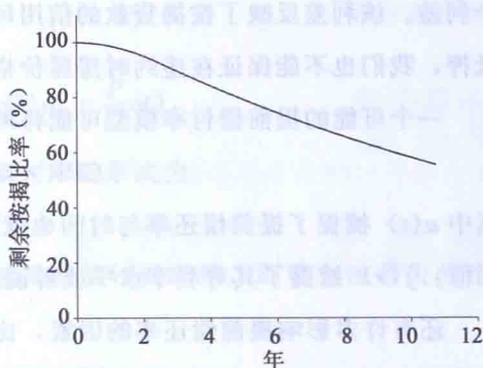


图 34-4 PSA 模型的剩余按揭比率

PSA 模型使用起来简单明了。如果在没有提前支付时我们可以对 MBS 的所有现金流定价（不管根据什么模型），那对存在提前支付的 MBS 定价就非常简单了。归根结底 PSA 模型中的提前支付率是完全确定的，只取决于按揭开始至今的时间。当然，我们的确是在想象的世界中工作。没有人能保证提前支付率真的会像模型显示的那样表现，如果模型错了我们也无法对冲该风险。

34.4.3 更符合现实的模型

PSA 模型最大的缺陷在于无法很好地刻画市场利率对提前支付率的影响，提前支付率会随着市场利率的降低而增加。因为房主会以更低的利率进行重新融资，他们的行为还是有那么一点理性的。

图 34-5 展示了 30 年期吉利美贷款的 CPR，现在它是加权平均息票率和当前息票率之间利差的函数了。这里没有考虑按揭的剩余期限。

在利差为负的时候也存在提前偿还率，这是搬家、获得额外收入等原因造成的提前偿还。只有当利差上升到 1% 以上

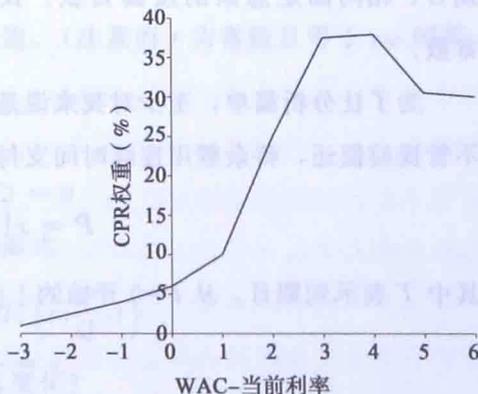


图 34-5 CPR 跟 WAC 与当前按揭利率利差的关系

时重新融资的影响才显现出来。

当我们决定让提前支付率水平取决于当前的按揭利率时，我们就进入了路径依赖的世界。

作为会引发重新融资的按揭利率的代理变量，我们可以使用短期利率加上一个利差。该利差反映了按揭贷款的信用风险问题。虽然个人贷款者们用房屋作为抵押，我们也不能保证在违约时房屋价格没有下降以至于贷方遭受损失。

一个可能的提前偿付率模型可能将期限效应和利率效应分解如下

$$CPR = a(t)f(r)$$

其中 $a(t)$ 捕捉了提前偿还率与时间也就是按揭期限相关的部分。这跟 PSA 模型相似。 $f(r)$ 捕捉了其利率水平或者说当前按揭利率的依赖。

还有许多影响提前偿还率的因素，比如说季节性和失业率等大经济环境。从建模的角度来说，一个很有趣的现象是从按揭利率的变化到提前偿付率的变化有 2~3 个月的延迟。

34.5 MBS 定价

我觉得已经给出了足够多的材料让读者可以开始给 MBS 定价了。如果你打算将利率效应引入提前偿付率，那么你会遇到路径依赖问题。你可以将瞬时利率 r 和时间 t 作为两个显变量，然后将当前总余额 P 作为路径依赖变量。我们还需要资金池中的按揭剩余比率 Q 。于是我们得到的 MBS 价格形式为 $V(r, P, Q, t)$ 。

让我们思考一下最简单的情形，MBS 资金池中包含的都是相同剩余期限和到期日、相同固定息票的按揭贷款。我们还假设按揭存续期内的所有支付都是常数。

为了让分析简单，至少对我来说是简单了，我们使用连续时间框架。暂时先不管提前偿还，将余额用连续时间支付 x 表示的方程为

$$P = x \int_t^T e^{-r_M(\tau-t)} d\tau$$

其中 T 表示到期日。从 $t=0$ 开始的 1 美元按揭的支付 x 由下式给出

$$x = \frac{1}{\int_0^T e^{-r_M \tau} d\tau}$$

其他条件不变，余额的变化为

$$dP = (r_M P - x) dt$$

在没有提前偿还时这完全是确定的。

现在引入剩余按揭的比率 Q

$$P = Qx \int_t^T e^{-r_M(\tau-t)} d\tau$$

P 的动态变化为

$$dP = (r_M P - xQ) dt + \frac{P}{Q} dQ$$

假设在时间步长 dt 中, (平均) 提前偿付率的形式为

$$a(t) f(r) dt$$

t 为按揭时间, r 为短期利率。这是余额被提前偿付的比率, 即资金池消失的比率。所以

$$dQ = -a(t) f(r) Q dt$$

现在我们可以写出

$$dP = (r_M P - xQ + a(t) f(r) P) dt$$

该式包括了常规支付造成的预期余额变化和提前偿还造成的非预期余额变化。

$V(r, P, Q, t)$ 的控制方程是什么? 使用风险中性瞬时利率模型

$$dr = (u - \lambda w) dt + w dX$$

我们可以得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + (u - \lambda w) \frac{\partial V}{\partial r} + (r_M P - xQ - a(t) f(r) P) \frac{\partial V}{\partial P} \\ - a(t) f(r) Q \frac{\partial V}{\partial Q} - rV + (a(t) f(r) P + xQ) = 0 \end{aligned}$$

最后一项是常规支付和提前偿付造成的现金流。(注意当 r 为常数且等于 r_M 时其解为 $V = P$ 。)

在到期日

$$V(r, P, Q, T) = 0$$

可以进行相似性降维, 变成三个变量的形式

$$V(r, P, Q, t) = PH\left(r, \frac{P}{Q}, t\right)$$

如果给 IOs 和 POs 定价, 问题会有什么变化?

34.6 总结

关于 MBS 还有很多我没有介绍的内容。但是我希望你已经看到了从建模视角来看它们有多有趣。关于其他合约和建模中细微之处等更多的细节请参考下面提到的书籍。

拓展阅读

- 关于 MBS 的更多信息参考 Arditti (1996) 和 Davidson 和 Herskovitz (1996)。



第 35 章

多因子利率建模

本章内容

- 多因子利率建模的理论框架
- 为什么“长期利率”是不错的第二因子选择
- 常见的两因子模型
- 风险的市场价格

35.1 引言

想要用第 30 章简单的随机瞬时利率模型来刻画现实中丰富多样的利率期限结构变化是不现实的。这些模型基于给定时间的给定瞬时利率来预测整条收益率曲线。一般说来，仅有瞬时利率这一个随机源，可能可以刻画收益率曲线的整体水平，但未必能刻画收益率曲线的形状变化，后者指不同到期期限的收益率的不同变化。对某些金融工具而言这可能不重要，例如那些依赖于收益率曲线水平的金融工具，用一个随机源或者说单因子建模就够了。但更复杂的金融产品依赖于不同到期期限的收益率之差，对这些产品而言刻画收益率曲线的倾斜程度非常重要。一种解决方法是在模型中引入第二个因子，也就是第二个随机源。这种思路原则上可以被扩展到任意数量的因子。

在这章中我首先将描述多因子利率建模背后的理论。然后我会详细地介绍几个常用的两因子模型。在这些模型中，第二个因子通常（虽然不是必须的）是一个长期利率。

35.2 两因子模型的理论框架

假设零息债（以及其他所有简单利率工具）的价格依赖于两个变量：瞬时利率 r 和另一个自变量 l 。此时一个 T 时刻到期的零息债价格可以写成 $Z(r, l, t; T)$ 。两个变量分别满足

$$dr = udt + w dX_1$$

以及

$$dl = pdt + qdX_2$$

u 、 w 、 p 和 q 可以是 r 、 l 和 t 的函数。 dX_1 和 dX_2 的相关系数 ρ 同样也可以取决于 r 、 l 和 t 。

注意，到目前为止我故意没有说明 l 是什么。它可以是另外一个利率，比如一个长期利率，或者短端收益率曲线的斜率，或瞬时利率的波动率。我们现在先建立一个一般化的框架，之后再讨论特定的模型。

因为我们现在有两个随机源，在对零息债定价时我们必须用其他两个零息债对冲以消除风险

$$\Pi = Z(r, l, t; T) - \Delta_1 Z(r, l, t; T_1) - \Delta_2 Z(r, l, t; T_2)$$

组合价值的改变由下式给出

$$\begin{aligned} & (\mathcal{L}(Z) - \Delta_1 \mathcal{L}(Z_1) - \Delta_2 \mathcal{L}(Z_2)) dt \\ & + \left(\frac{\partial Z}{\partial r} - \Delta_1 \frac{\partial Z_1}{\partial r} - \Delta_2 \frac{\partial Z_2}{\partial r} \right) dr + \left(\frac{\partial Z}{\partial l} - \Delta_1 \frac{\partial Z_1}{\partial l} - \Delta_2 \frac{\partial Z_2}{\partial l} \right) dl \end{aligned} \quad (35-10)$$

其中 Z 、 Z_1 和 Z_2 的含意显而易见。而

$$\mathcal{L}(Z) = \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} + \rho w q \frac{\partial^2 Z}{\partial r \partial l} + \frac{1}{2} q^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial l^2}$$

现在选择 Δ_1 和 Δ_2 使得式 (35-1) 中的 dr 和 dl 前面的系数等于 0。此时组合是无风险的，因此必须赚取无风险利率 r 。

这样，我们有 3 个方程

$$\frac{\partial Z}{\partial r} - \Delta_1 \frac{\partial Z_1}{\partial r} - \Delta_2 \frac{\partial Z_2}{\partial r} = 0$$



$$\frac{\partial Z}{\partial t} - \Delta_1 \frac{\partial Z_1}{\partial t} - \Delta_2 \frac{\partial Z_2}{\partial t} = 0$$

和

$$\mathcal{L}'(Z) - \Delta_1 \mathcal{L}'(Z_1) - \Delta_2 \mathcal{L}'(Z_2) = 0$$

其中

$$\mathcal{L}'(Z) = \mathcal{L}(Z) - rZ$$

对 Δ_1 和 Δ_2 有三个联立方程。因此系统是过度描述的，要让这些方程相互一致，需要

$$\det(\mathbf{M}) = 0$$

其中

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}'(Z) & \mathcal{L}'(Z_1) & \mathcal{L}'(Z_2) \\ \partial Z / \partial r & \partial Z_1 / \partial r & \partial Z_2 / \partial r \\ \partial Z / \partial l & \partial Z_1 / \partial l & \partial Z_2 / \partial l \end{pmatrix}$$

这样矩阵 \mathbf{M} 的第 1 行就是第 2 行和第 3 行的线性组合。因此我们可以写出

$$\mathcal{L}'(Z) = (\lambda_r w - u) \frac{\partial Z}{\partial r} + (\lambda_l q - p) \frac{\partial Z}{\partial l}$$

其中 $\lambda_r(r, l, t)$ 和 $\lambda_l(r, l, t)$ 这两个函数分别是 r 和 l 的市场风险价格，跟以前一样它们独立于债券的到期期限。将变量代入后可得

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} + \rho w q \frac{\partial^2 Z}{\partial r \partial l} + \frac{1}{2} q^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial l^2} \\ & + (u - \lambda_r w) \frac{\partial Z}{\partial r} + (p - \lambda_l q) \frac{\partial Z}{\partial l} - rZ = 0 \end{aligned} \quad (35-2)$$

要定义该利率衍生品模型需要选择 w 、 q 、 ρ 以及风险调整漂移率 $u - \lambda_r w$ 和 $p - \lambda_l q$ 。

在 35.3 节我们将考察常见的两因子模型的更多细节。在此之前，我们先简要考察 l 是长期利率的特殊情况。

为防止遗忘，先写出

$$\Delta_1 = \frac{\partial Z / \partial r \partial Z_2 / \partial l - \partial Z / \partial l \partial Z_2 / \partial r}{\partial Z_1 / \partial r \partial Z_2 / \partial l - \partial Z_1 / \partial l \partial Z_2 / \partial r}$$

和

$$\Delta_2 = \frac{\partial Z / \partial r \partial Z_1 / \partial l - \partial Z / \partial l \partial Z_1 / \partial r}{\partial Z_1 / \partial r \partial Z_2 / \partial l - \partial Z_1 / \partial l \partial Z_2 / \partial r}$$

35.2.1 特例：对长期利率建模

我们还没有对模型中的 l 进行选择。一个自然而且特殊的候选是长期利率，这样选择有一定的优点。特别地，这里我们考察选择永续债收益率作为 l 的情况。

一种简单的永续债 (consol bond) 是永不到期的固息债。如果 C_0 是票息为 1 美元时该债券的价值，那么其收益率为

$$l = \frac{1}{C_0}$$

这就是本例中对 l 的定义。因为永续债可以交易，其价值必然满足定价方程，所以此时变量 l 的选择是非常特殊的。此时定价方程与式 (35-2) 相比多了一个额外项

$$\mathcal{L}'(C_0) + 1 = (\lambda_r w - u) \frac{\partial C_0}{\partial r} + (\lambda_l q - p) \frac{\partial C_0}{\partial l}$$

额外项 1 是由息票支付造成的。[⊖] 将 $1/l$ 代入方程，我们发现

$$p - \lambda_l q = l^2 - rl + \frac{q^2}{l^2}$$

换句话说，因为建模对象为可交易量，所以可以找到该因子市场风险价格的表达式。因此将永续债收益率作为一个因子的债券定价方程为

$$\mathcal{L}'(Z) = (\lambda_r w - u) \frac{\partial Z}{\partial r} - \left(l^2 - rl + \frac{q^2}{l^2} \right) \frac{\partial Z}{\partial l}$$

展开后即

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} + \rho w q \frac{\partial^2 Z}{\partial r \partial l} + \frac{1}{2} q^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial l^2} + (u - \lambda_r w) \frac{\partial Z}{\partial r} + \left(l^2 - rl + \frac{q^2}{l^2} \right) \frac{\partial Z}{\partial l} - rZ = 0$$

注意 $\partial Z / \partial l$ 的系数中不再含有市场风险价格。我们将之与可交易股票的期权做比较。在那个例子中，因为股票是可交易的，所以我们没有看到股票的市场风险价格；事实上，我们根据真实的资产漂移率为市场风险价格找了一个简单的表达式。再跟瞬时利率项做比较，因为瞬时利率不能交易，所以瞬时利率的市场价格出现在了方程中。

因为用永续债收益率作为因子时模型中可以少一个函数，所以它看起来是一

⊖ 注意这里我已经做了连续付息的近似。在实际中付息是离散的，但这种差异对接下来的分析影响不大。

个不错的两因子利率模型中第二因子的选择。

但实际上，事情没有刚刚所说的那么美好。长期利率和短期利率之间的联系比前面提到的更加紧密。不可能完全独立地为短期利率和长期利率建模。例如，在仿射单因子世界中，长期利率仅仅只是短期利率的一个简单函数。在两因子世界中也有同样的限制。内在一致性要求对长期利率的波动率做出约束。约束的细节见 Duffie、Ma 和 Yong (1994)。

35.2.2 特例：为长短期利差建模

上述模型另一个版本是将长短期利差作为新变量，称该变量为 s 。因为

$$s = \frac{1}{C_0} - r$$

并且 C_0 是可交易的，我们可以为利差的市场风险价格找到一个简单的表达式。此外，有证据表明短期利率和长短期利差是不相关的，至少在美国是这样。这使得模型中的函数又少了一个，仅仅剩下三项：短期利率和利差的波动率，以及风险调整的瞬时利率漂移率。

35.3 常用模型

这一节我将简要介绍一些常用的模型。大部分模型常用是因为定价方程式 (35-2) 有显性解。在这些模型中，第二个因子有时是长期利率，有时是其他的变量（通常是不可观测的）。

1. 布伦南和施瓦茨模型

在布伦南和施瓦茨模型 (Brennan and Schwartz, 1982) 中，经风险调整的瞬时利率满足

$$dr = (a_1 + b_1(l - r))dt + \sigma_1 r dX_1$$

长期利率满足

$$dl = l(a_2 - b_2 r + c_2 l)dt + \sigma_2 l dX_2$$

布伦南和施瓦茨从统计上来选择参数。因为这些方程的函数形式相对复杂，所以定价方程没有简单解。这两个随机微分方程里的随机项是对数正态的，但漂移项很复杂，具有一定的均值回复特征。

该模型的主要问题有两个。首先，长期利率和短期利率必须具有一定的内在一致性。其次，正如霍根 (Hogan, 1993) 所指出的，布伦南和施瓦茨模型在有

限时间内可能发生膨胀，这意味着利率可以变为无穷大。对利率模型来说这不是一个好性质。

2. 一般仿射模型 (general affine model)

如果 r 和 l 满足下列条件

- 经风险调整的 r 和 l 的漂移项都是 r 和 l 的线性函数 (但可以存在某种形式的时变性);
- r 和 l 的随机项都是 r 和 l 线性函数的平方根 (但可以存在某种形式的时变性);
- r 和 l 的随机过程是不相关的。

那么零息债的两因子债券定价方程式 (35-2) 有如下形式的解

$$e^{A(t;T)-B(t;T)r-C(t;T)l}$$

这是第 30 章中单因子模型中相关结论的两因子版本。

一般来说, 包含 A 、 B 和 C 的常微分方程需要数值求解。

3. 方和瓦西塞克模型

方和瓦西塞克模型 (Fong and Vasicek, 1991) 将风险调整变量设定为

$$dr = a(\bar{r} - r)dt + \sqrt{\xi}dX_1$$

和

$$d\xi = b(\bar{\xi} - \xi)dt + c\sqrt{\xi}dX_2$$

也就是说他们建模的对象为瞬时利率 r 和瞬时利率波动率的平方[⊖] ξ 。这个模型的一个明显弱点是后一个变量是不可观察的。但这也让证伪这个模型变得更难。简单的线性均值回复和平方根形式使得简单利率产品的价格有显性解。

4. 朗斯塔夫和施瓦茨

朗斯塔夫和施瓦茨模型 (Longstaff and Schwartz, 1992) 将风险调整变量设定为

$$dx = a(\bar{x} - x)dt + \sqrt{x}dX_1$$

和

$$dy = b(\bar{y} - y)dt + \sqrt{y}dX_2$$

而瞬时利率被设定为

$$r = cx + dy$$

⊖ 原文为 square root, 即平方根, 疑有误。——译者注

同样，这些等式的简单形式使得简单利率产品的价格有显性解。

5. 赫尔和怀特模型

风险中性模型

$$dr = (\eta(t) - u - \gamma r)dt + cdX_1$$

和

$$du = -audt + bdX_2$$

是单因子赫尔和怀特模型 (Hull and White) 的两因子版本。瞬时利率 r 会均值回复到时变而随机的 $(\eta(t) - u)/a$ 。函数 $\eta(t)$ 是用来拟合初始收益率曲线的。零息债价格的解为

$$e^{A(t;T) - B(t;T)r - C(t;T)}$$

其中，

$$\begin{aligned} A(t;T) = & - \int_t^T \eta(s)B(s;T)ds + \frac{c^2}{2\gamma^2} \left(T-t + \frac{2}{\gamma}e^{-\gamma(T-t)} - \frac{1}{2\gamma}e^{-2\gamma(T-t)} - \frac{3}{2\gamma} \right) \\ & - \alpha b \left(-\frac{1}{\gamma^2 a} \left(-(T-t) - \frac{1}{\gamma}e^{-\gamma(T-t)} + \frac{1}{\gamma} \right) \right. \\ & + \frac{1}{\gamma^2(a-\gamma)} \left(\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma(T-t)} - \frac{1}{2\gamma} - \frac{1}{2\gamma}e^{-2\gamma(T-t)} \right) \\ & \left. - \frac{1}{a\gamma(a-\gamma)} \left(\frac{1}{a}e^{-a(T-t)} - \frac{1}{a} - \frac{1}{\gamma+a}e^{-(\gamma+a)(T-t)} + \frac{1}{\gamma+a} \right) \right) \\ & - \frac{1}{2}b^2 \left(-\frac{T-t}{\gamma^2 a^2} + \frac{1}{2\gamma^3(a-\gamma)^2} (e^{-2\gamma(T-t)} - 1) + \frac{1}{2a^3(a-\gamma)^2} (e^{-2a(T-t)} - 1) \right. \\ & \left. - \frac{2}{\gamma^3 a(a-\gamma)} (e^{-\gamma(T-t)} - 1) + \frac{2}{\gamma a^3(a-\gamma)} (e^{-a(T-t)} - 1) \right. \\ & \left. - \frac{2}{a\gamma(a+\gamma)^2(a-\gamma)} (e^{-(\gamma+a)(T-t)} - 1) \right) \end{aligned}$$

$$B(t;T) = \frac{1}{\gamma} (1 - e^{-\gamma(T-t)})$$

$$C(t;T) = -\frac{1}{\gamma a} + \frac{1}{\gamma(a-\gamma)} e^{-\gamma(T-t)} - \frac{1}{a(a-\gamma)} e^{-a(T-t)}$$

两个随机游走之间的相关系数是 ρ ，被假设为常数。

35.4 市场风险价格作为随机因子

当你用于建模的因子是一个不可交易变量时，最后会出现该变量的市场风险价格。在前面我们已经知道如果 r 和 l 都不能交易，会出现两个市场风险价格。

如果我们将 r 的市场风险价格本身作为随机源中的一个会怎样？其结果是只会出现一个“自由”的市场风险价格：市场风险价格风险的市场风险价格。（这里没有打印错误！）在第 36 章我们将会看到，有大量证据表明瞬时利率的市场风险价格的确具有非常大的随机性，所以从建模的角度来看这样做是很有意义的。让我们进行一些数学推导。

假设有两个真实世界的随机游走为

$$dr = udt + \omega dX_1$$

和

$$d\lambda = p dt + q dX_2$$

其中 λ 是 r 的市场风险价格。那么零息债的定价方程就是

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{1}{2}\omega^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} + \rho\omega q \frac{\partial^2 Z}{\partial r \partial \lambda} + \frac{1}{2}q^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial \lambda^2} + (u - \lambda\omega) \frac{\partial Z}{\partial r} + (p - \lambda q) \frac{\partial Z}{\partial \lambda} - rZ = 0$$

唯一的自由函数是 λ_λ ，即市场风险价格风险的市场风险价格。我觉得自由函数少是一个模型的优点。那些喜欢编造大量因子的人可能不会同意该观点。

正如我们在第 31 章已经见过，并将在第 36 章再次见到的那样，瞬时利率的市场风险价格 λ 与收益率曲线短端的斜率有关。因此对 r 和 λ 建模就相当于对接近到期的收益率曲线的行为特征建模。

35.5 无随机性下的相平面

有一个简单的分析可以用于衡量两因子模型的表现。这个分析就是在无随机性的条件下检验模型的动态特征。这要求两个因子的漂移项系数与时间无关。下面的分析中我会玩一点小诡计。从理论上说我们应该先将随机微分方程转化

为常波动率的方程，但在此我将省略这一步骤。这不会改变我在奇点处作出的结论，但是可能会影响我对利率的全局表现的描述。

为了展示这个技巧，我们来考察方和瓦西塞克模型。如果不存在随机性，该模型变为

$$dr = a(\bar{r} - r)dt$$

和



$$d\xi = b(\bar{\xi} - \xi) dt$$

两式相除可以得到

$$\frac{d\xi}{dr} = \frac{b(\bar{\xi} - \xi)}{a(\bar{r} - r)} \quad (35-3)$$

我们可以将这个一阶常微分方程的解画在相平面 (phase plane) 上 (见图 35-1)。

通过考察该模型可以体会相位图背后的思想。图上的每一条线代表了 r 和 ξ 一种可能的演变路径。该示例中在点 $(\bar{r}, \bar{\xi})$ 处存在一个奇点 (singularity), 此处式 (35-3) 中分子和分母都为零, 因此斜率 $d\xi/dr$ 没有定义。这种奇点在这里被称为节点 (node)。在方和瓦西塞克模型中, 当 a 和 b 为正数时这个奇点是稳定的 (stable), 意味着从该奇点附近经过的解都会被卷入其中。(在此例中, 所有的解都被卷入该点。) 其他两因子 (非随机) 模型的更多类型的可能奇点见图 35-2, 除了这些, 还存在其他类型的奇点。两因子赫尔和怀特模型有一个良好的确定性相平面。

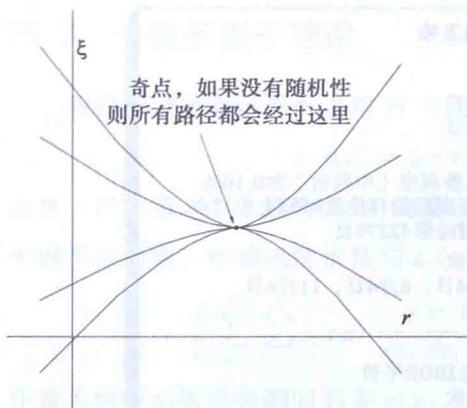


图 35-1 方和瓦西塞克模型的相平面 (无随机性)

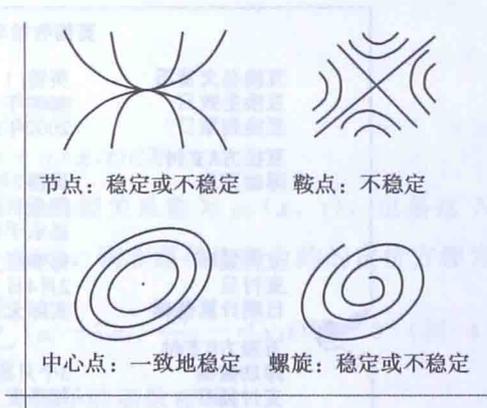


图 35-2 可能的相平面奇点

当把随机性加回到模型中时, 解的路径将不再是确定性的。图 35-3 展示了方和瓦西塞克模型单次实现的一种可能演变路径。这幅图以及图 35-2 有什么问题呢? 答案就是从相平面看好像我只画了离奇点较近的点。我之前说过, 理想情况下我们应该把随机微分方程转变成常波动率方程, 但是在这里我没有这么做。对于方和瓦西塞克模型这个特例, 只要 c 不是太大则变量 ξ 不会为负, 因为随机项之前的系

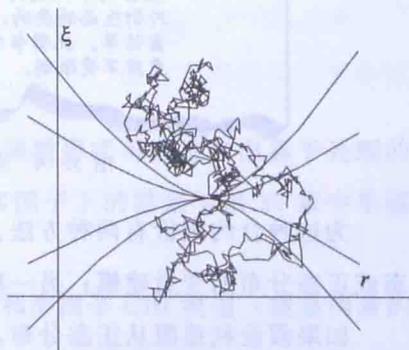


图 35-3 方和瓦西塞克模型的典型实现、相平面和时间序列

数加了平方根。

我们可以用这些相平面来判断模型的性质是否符合现实。一个典型的例子就是布伦南和施瓦茨模型。对某些参数范围，方程很不稳定，以至于长期和短期利率会趋于无穷。对利率模型来说这是很不符合现实的性质。[⊖]

35.6 收益率曲线互换

一个很重要的可能会用到两因子模型的合约是收益率曲线互换 (yield curve swap)。在该合约中一方的支付基于收益率曲线上某一部分的浮动利率，另一方的支付基于曲线上另一部分的浮动利率。图 35-4 是英镑的收益率曲线互换的说明书。每季度一方支付 3 个月的英镑 LIBOR，另一方支付两年期互换利率加 16 个基点。一个基点 (basis point) 就是 1% 的 1%。

英镑收益率曲线互换	
互换名义货币	英镑[]
互换生效日	2000年11月4日
互换到期日	2002年11月4日
互换方A支付 浮动票息	英镑2年期互换利率(中间价)加0.16%， 定盘价格于每期起始日伦敦时间上午11点 显示于德励财经第42279页
支付频率	每季度支付1次
支付日	2月4日，5月4日，8月4日，11月4日
日期计算基础	实际天数/365
互换方B支付 浮动指数	3个月期英镑LIBOR平价
支付频率	每季度支付1次
支付日	2月4日，5月4日，8月4日，11月4日
日期计算基础	实际天数/365
注：该说明书既不代表购买或出售某证券或诸如期权、互换、远期合约和与场外衍生产品具有相似特征的结构票据等场外衍生品的要约，也不是购买或出售证券或OTC衍生产品的宣传单。说明书中的内容不是特定交易条款的完整描述，其更改不受限制。	

图 35-4 英镑收益率曲线互换的说明书

为这种合约定价有两种方法。一种是将两个利率之间的利差作为服从对数正态或正态分布的变量建模；另一种是使用两因子利率模型。

如果假设利差服从正态分布，那么可以通过历史数据或是另一个合约中的隐

⊖ 当然不要忘了在这部分的例子中相平面是针对风险调整的利率，而不是真实世界的利率。

含信息找到它的波动率，然后在一个类似布莱克 - 斯科尔斯的世界中为这个合约定价。你还需要用一些利率来贴现，很自然的选择就是收益率曲线，因为它在定价的时点就可以获得。这是为该合约定价的一种稳健的方法。

如果使用随机利率模型，为什么一定要是双因子的呢？这是因为该合约的净现金流取决于两个利率之差。如果使用单因子模型，那么这两个利率就会完全相关，造成利差没有波动性。我们需要两因子模型来使得利差存在波动性，从而使每次的现金流都具有不确定性。对两个利息支付的处理稍有不同。3 个月利率可以被看作瞬时利率，但两年期利率更复杂，所以必须先为互换利率建模。为互换利率建模后，就可以用两个因子的微分方程为收益率曲线互换定价，用同样的方程但不同的现金流。因此可以将该合约看作二阶。这个过程烦琐耗时，而且结果对模型的依赖性很强。

35.7 一般多因子理论

假设固定收益世界可以用 N 个因子 x_i 建模

$$dx_i = \mu_i(\mathbf{x}, t)dt + \sigma_i(\mathbf{x}, t)dX_i$$

这里 \mathbf{x} 代表第 i 个分量为 x_i 的向量。因子间的相关系数为 $\rho_{ij}(\mathbf{x}, t)$ ，也是这 N 个因子的函数。市场风险价格用 $\lambda_i(\mathbf{x}, t)$ 表示，则非路径依赖合约的定价方程为

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^N (\mu_i - \lambda_i \sigma_i) \frac{\partial V}{\partial x_i} - r(\mathbf{x}, t)V = 0 \quad (35-4)$$

注意为何我们需要将瞬时利率 $r(\mathbf{x}, t)$ 作为因子的函数建模。

为一个因子精确建模已经够难了，所以可以想象处理两个或更多的因子将是怎样的任务。

易处理的仿射模型

对于波动率和风险中性漂移率的一些简单的函数形式可以推导出易于处理的模型，因为式 (35-4) 可以简单地显性求解。多因子下的结果与第 30 章中单因子的结果很相似。

有两个很明显的例子：多因子瓦西塞克模型和多因子 CIR 模型（或是两者的结合）。

1. 多因子瓦西塞克模型

在瓦西塞克 (Vasicek) 版多因子模型中，波动率和相关系数跟因子无关，但

可以是任意形式的时间的函数

$$\sigma_i = c_i(t) \text{ 和 } \rho_{ij} = d_{ij}(t)$$

风险中性漂移率必须是因子的线性函数

$$\mu_i - \lambda_i \sigma_i = a_i(t) - \sum_{j=1}^N b_{ij}(t)x_j$$

瞬时利率也必须是因子的线性函数

$$r = g_0(t) + \sum_{i=1}^N g_i(t)x_i$$

2. 多因子 CIR 模型

在 CIR 版多因子模型中，波动率是 N 个因子的线性函数的平方根，漂移率是因子的线性函数。相关系数必须都为零。

对于瓦西塞克和 CIR 模型，零息债解的形式都为

$$Z(\mathbf{x}, t; T) = \exp \left[f_0(t; T) + \sum_{i=1}^N f_i(t; T)x_i \right]$$

函数 $f_i(t, T)$ 满足自变量为 t 的常微分方程。

这些模型特别有趣，因为收益率

$$Y(t; T) = -\frac{\log Z(\mathbf{x}, t; T)}{T-t}$$

可以表示成

$$-\frac{1}{T-t} \left[f_0(t; T) + \sum_{i=1}^N f_i(t; T)x_i \right]$$

它们对于因子也是线性的。

最简单的例子是常参数和因子间无相关性的多因子瓦西塞克模型，所以 $d_{ij} = 0$ 。

要求解 f 必须通过方程

$$\dot{f}_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N c_i^2 f_i^2 + \sum_{i=1}^N a_i f_i - g_0 = 0$$

和

$$\dot{f}_i - \sum_{k=1}^N b_{ki} f_k - g_i = 0 \text{ (对于所有的 } i \text{)}$$

f 上面的点表示对时间的微分。不失一般性，我们可以假设在模型中除非 $i = j$ ， $b_{ij} = 0$ 且 $g_0 = 0$ 。这大大简化了方程，很容易看出此时零息债价值的解就是单因子瓦西塞克模型解的乘积。

35.8 总结

本章我们介绍了多因子利率模型的一般理论。多因子模型优于单因子之处在于它们允许更加丰富的收益率曲线结构。但与单因子模型一样，除非进行过校准，理论收益率曲线与市场收益率曲线并不一致。即使进行校准，所有我们在单因子模型中见过的问题在这里也存在：总体来说收益率曲线的斜率和曲度太大，就算使用多因子模型也很难一致地建模。虽然如此，多因子确实使得收益率曲线的不同部分不再完全相关，这是一个改进。对于回报为收益率曲线上不同点之间利差的合约来说，单因子模型是无法使用的。

拓展阅读

- 可参考 Brennan 和 Schwartz (1982) 和 Longstaff 和 Schwartz (1992) 的论文。
- 关于短期利率和长期利率之间关系的解释以及为什么它们不能作为独立变量建模，可参考 Duffie, Ma 和 Yong (1994)。
- Hogan (1993) 分析了 Brennan 和 Schwartz 模型，展示了它们一些令人担忧的特征，如利率在有限的时间里可能达到无穷。
- Rebonato (1996) 讨论了两因子模型的理论与实践的更多细节。
- Jordan 和 Smith (1977) 是关于相平面分析的经典参考教材。
- 关于著名的 SABR 模型，可参考 Hagan 等 (2002)。这是一个两因子模型，其精妙之处在于用非对称的分析寻找相对简单的解。

瞬时利率的实证表现

瞬时利率的实证表现

瞬时利率的实证表现

瞬时利率的实证表现

瞬时利率的实证表现

瞬时利率的实证表现



第 36 章

瞬时利率的实证表现

本章内容

- 怎样分析短期利率以确定最好的波动率和真实漂移率模型
- 怎样分析收益率曲线的斜率以得到市场风险信息
- 怎样建立合理的单因子或两因子瞬时利率模型



36.1 引言

前面我介绍了单因子利率建模的一般框架，并且详细分析了几个常用模型。我们之所以选择第 30 章中出现的那几种瞬时利率单因子模型，是因为它们具有很好的性质，其中大多数模型都可以得到债券定价方程的简单闭式解。在那章中我们已经讨论过这些模型的利弊。

在本章中我们将看到如何从实际数据中推断瞬时利率模型。我们使用的方法假设模型是时间齐次的，然后看瞬时利率是否有良好的表现。这跟第 53 章中根据波动率数据来建立波动率模型的原理是一样的。不过在这里我们会更进一步从收益率曲线数据中找出市场风险价格。如此得到的模型的缺点是无法得到合约价

值的闭式解，而且风险中性漂移率和波动率的结构都不够好。

我将使用美国的瞬时利率数据来进行相关分析和建模，并与常用模型相比较。我们使用数据来决定哪种模型最符合现实，并依此建立一个瞬时利率模型，该模型具有一些良好的性质：有一个符合现实的波动率结构和一个有意义的稳态概率密度函数。由于建模是基于真实数据的，因此难以保证在求解债券定价方程时的易处理性。为了易处理性所做的唯一让步是假设随机游走是非时变的。利用该假设并使用长时间段的数据，我们希望在某种程度上可以为瞬时利率的“平均”行为建模。该模型可以用于为期限较长的工具定价。最后我会对如何建立两因子利率模型提出一些建议。

36.2 常见的单因子瞬时利率模型

由于固定收益工具的复杂性，人们选择的常见利率模型都是那些能得出简单合约价格闭式解的。也就是说它们是易于处理的。这使得计算债券价格所需的时间减到最少。不幸的是，这也意味着模型未必能很好地描述现实。让我们简要地重新审视一些单因子模型。

考虑经典的单因子模型，包括瓦西塞克 (Vasicek, 1977)、CIR 模型 (Cox, Ingersoll & Ross, 1985)、霍和李模型 (Ho & Lee, 1986) 以及赫尔和怀特模型 (Hull & White, 1990) 的拓展。在这些模型中，瞬时利率 r 满足随机微分方程

$$dr = u(r, t)dt + w(r, t)dX \quad (36-1)$$

表 36-1 展示了上述作者采用的结构形式。

表 36-1 常用的单因子瞬时利率模型

模 型	$u(r, t) - \lambda(r, t)w(r, t)$	$w(r, t)$
Vasicek	$a - br$	c
CIR	$a - br$	$cr^{1/2}$
Ho & Lee	$a(t)$	c
HW I	$a(t) - b(t)r$	$c(t)$
HW II	$a(t) - b(t)r$	$c(t)r^{1/2}$
一般仿射模型	$a(t) - b(t)r$	$(c(t)r - d(t))^{1/2}$

这里用 $\lambda(r, t)$ 代表市场风险价格，函数 $u - \lambda w$ 代表经风险调整的漂移率。这些模型中的时变系数可以用来拟合收益率曲线以及我们在第 31 章见过的其他利率工具。

如果瞬时利率方程为式 (36-1)，那么如第 30 章所示，零息债的债券定价方程为

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{1}{2}w(r,t)^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} + (u(r,t) - \lambda(r,t)w(r,t)) \frac{\partial Z}{\partial r} - rZ = 0 \quad (36-2)$$

终值条件为 $Z(r, T; T) = 1$ 。表中大多数模型给出的零息债价格形式均为

$$Z(r, t; T) = e^{A(t, T) - rB(t, T)} \quad (36-3)$$

这并不是巧合。Duffie (1992)、Klugman (1992)、Klugman 和 Wilmott (1994) 及 Ritchken (1994) 等学者研究发现, 如果零息债定价方程式 (36-2) 的解为式 (36-3) 的形式, 那么系数的最一般形式一定如表 36-1 最后一行所示。这种一般仿射模型包含 4 个时变参数。在第 30 章中已经说过, 这是能够得出显性公式的最一般形式。

另一方面, Black, Derman & Toy (BDT) 模型

$$d(\log r) = \left(\theta(t) - \frac{w'(t)}{w(t)} \log r \right) dt + w(t) dX$$

并不是基于易处理性给出的。他们选择该模型是因为可以轻松拟合市场数据。模型的波动率结构 (瞬时利率方程中 dX 项的系数) 等于一个时变系数乘以瞬时利率。该系数和另一个时变系数风险调整漂移率使得 BDT 模型可以正确拟合今天的收益率曲线和利率期权。这种拟合当然很有吸引力, 但之前也说过, 必须谨慎处理此类模型。

36.3 隐含建模法: 单因子

现在我们考察另一种为利率建模的方法。我们一步一步建立模型, 并尽力不让“易处理性”岔开我们的主线。记住, 我们假设参数是不依赖于时间的。

图 36-1 显示了 1977~1994 年 1 个月期美元 LIBOR 的日数据。这就是我们在分析中要使用的数据。我们介绍的思路适用于任何货币, 但这里我们用美国的数据来说明。

一共有 3 个关键步骤。

(1) 通过对瞬时利率时间序列数据做差分来确定波动率对瞬时利率的依赖性 $w(r)$ 。

(2) 通过考察瞬时利率的稳态概率密度函数来确定漂移率 $u(r)$ 的函数形式。

(3) 通过考察收益率曲线的斜率

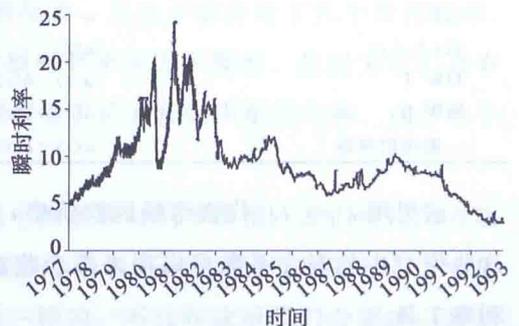


图 36-1 1977~1994 年美国瞬时利率

来确定市场风险价格 $\lambda(r)$ 。

36.4 波动率结构

我们首先观察到的是许多常用模型采用的形式为

$$dr = u(r)dt + vr^\beta dX \quad (36-4)$$

霍和李 ($\beta=0$)、瓦西塞克 ($\beta=0$) 和 CIR($\beta=1/2$)^① 都是这种模型的例子。由于它们在实务界和学术界都非常流行,有许多实证研究试图从数据中去估计 β 。被引用的最多的可能是 Chan, Karolyi, Longstaff & Sanders (1992) 基于美国数据的研究。他们估计出的 β 为 1.36。^② 这与许多从业人员的经验一致,他们认为实际中瞬时利率的相对变化 dr/r 对 r 的水平不敏感。

我们可以认为含有

$$dr = \dots + cdX$$

的模型具有正态的波动率结构。而含有

$$dr = \dots + crdX$$

的模型具有对数正态的波动率结构。在实际中,看起来瞬时利率似乎更接近对数正态模型而不是正态模型。这使得 BDT 模型要比其他模型更具优势。

使用美国的瞬时利率数据,我们可以估计 β 的最佳值。^③ 有许多复杂的方法可以用,这里我将介绍一种非常简单的方法。从时间序列数据出发,将利率的变化 δr 分块,以覆盖一定范围的 r 值。然后计算每一分块中 $(\delta r)^2$ 的平均值。如果式 (36-4) 是正确的,我们可以期望

$$E[(\delta r)^2] = v^2 r^{2\beta} \delta t$$

是时间步长 δt 的同阶值,在这里我们使用的步长是 1 天。这与第 53 章中用于估计波动率的波动率的技术相同。

图 36-2 用美国数据描绘了 $\log(E[(\delta r)^2])$

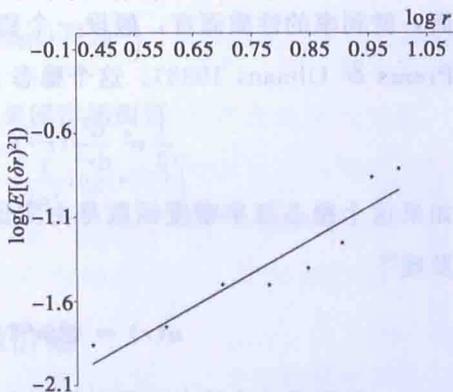


图 36-2 β 的估计

① Cox, Ingersoll 和 Ross (1980) 取 $\beta=3/2$, $u=0$ 。他们找到了一些永续工具的解析解,但是为了易处理性做出了一些假设。在这些假设下,找到零息债的相似性约简后的显性解是可能的。

② Murphy (1995) 发现对英国市场 $\beta=0.36$ 。这一章的分析同样可以较好地应用于英国市场。

③ 当然,我们不需要只研究幂指数形式的波动率。只要波动率依赖于 r ,这里介绍的技术对任何形式的波动率都有效。

与 $\log r$ 的关系。这条“线”的斜率给出了对 2β 的估计。我们可以看出这条线很直。从计算中可以估计出

$$\beta = 1.13 \text{ 和 } v = 0.126$$

这证实了瞬时利率波动率的表现实际上接近于对数正态。

36.5 漂移率结构

从统计上说很难从数据中估计漂移项。这一项比波动项小，因此具有更大的相对误差。如果我们使用常见的方法来估计漂移项，可能会发现模型的短期表现较好但长期表现很差。因此，我们将采用另一种更稳定的方法，该方法涉及 r 的稳态概率密度函数在实证和分析上的决定因素。

如果 r 满足随机微分方程式 (36-4)，那么 r 的概率密度函数 $p(r, t)$ 满足前向 Fokker-Planck 方程 (见第 10 章)

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2}v^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r^{2\beta}p) - \frac{\partial}{\partial r}(u(r)p) \quad (36-5)$$

在这里 r 和 t 是前向变量，通常用 r' 和 t' 表示。式 (36-5) 拥有一个稳态分布形式的解是可能的。该稳态分布是指从任何初始条件出发最后都会回到的概率密度函数。我们能够从实证数据中估计出这个稳定状态，从而找到式 (36-5) 的一个解。注意到股价显然没有稳态分布，因为股价通常是指数增长（或衰减）的。然而，就利率的性质而言，假设一个稳态概率密度函数是有道理的 (Ramamurtie, Prezas & Ulman, 1993)。这个稳态 $p_\infty(r)$ 将满足

$$\frac{1}{2}v^2 \frac{d^2}{dr^2}(r^{2\beta}p_\infty) - \frac{d}{dr}(u(r)p_\infty) = 0 \quad (36-6)$$

如果这个稳态概率密度函数是由实证数据决定的，那么对式 (36-6) 积分可以发现[⊖]

$$u(r) = v^2\beta r^{2\beta-1} + \frac{1}{2}v^2 r^{2\beta} \frac{d}{dr}(\log p_\infty)$$

一方面通过这种方法可以找到在长期内更稳定的漂移率，另一方面研究稳态概率密度函数可以避免分散精力；我们可以确定该模型不会表现得太异常。这个概率密度函数是可以估计出来的，至少可以进行有依据的猜测。相反，对漂移率

⊖ 存在性、唯一性以及 $r=0$ 和无穷大时的表现等问题是需要讨论的，基于可读性考虑我省略了这些内容。

的系数 $u(r)$ 有一个直觉上的认识是很难的。通过为模型选择一个合理的稳态分布，我们可以保证瞬时利率不会表现得脱离现实，例如出现无限增长的情况。

通过对 β 和 $p_\infty(r)$ （以及后面的 $\lambda(r)$ ）的选择，我们可以得到在表 36-1 中提到的所有模型。

让我们回到美国的数据，可以通过 1 个月期的美国 LIBOR 利率确定一个合理的 $p_\infty(r)$ 的函数形式。稳态分布是通过把 r 分成很多块，然后观察分配于每一块的频数来确定的。这与第 53 章将要用到的估计漂移率和波动率的技术是一样的。

这个分析的结果如图 36-3 所示。这幅图展示了我们对稳态概率密度函数的估计。该图的形状让我们想到对数正态分布曲线。因为这个原因，又因为对数正态分布只拥有两个参数的简单形式，[⊖] 所以我们选择能拟合实证数据的对数正态分布曲线作为 $p_\infty(r)$ 。该曲线同样被展示在图中。

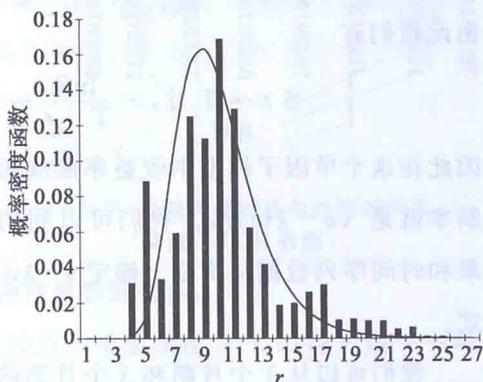


图 36-3 观察和选择的 r 的概率密度分布

我们对 $p_\infty(r)$ 的选择是

$$\frac{1}{ar\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2a^2}(\log(r/\bar{r}))^2\right)$$

其中， $a=0.4$ 而 $\bar{r}=0.8$ 。由此我们得到对于美国市场而言

$$u(r) = v^2 r^{2\beta-1} \left(\beta - \frac{1}{2} - \frac{1}{2a^2} \log(r/\bar{r}) \right)$$

真实的瞬时利率会均值回复到 8%。[⊖]

36.6 收益率曲线的斜率和市场风险价格

现在我们已经找到了 $w(r)$ 和 $u(r)$ ，剩下的任务就是寻找 $\lambda(r)$ ，然后模型就可以完成了。我还是允许 λ 与瞬时利率相关，但是与时间无关。注意瞬时利率的

⊖ 从技术上说有 4 个参数。一个是均值，一个是标准差，一个是分布起始位置，还有一个是向左或向右移动的参数。我已经假设 r 的下限是 0 且尾部可以延伸到正无穷。

⊖ 因为随机微分方程中的波动项，概率密度函数的均值和 $u=0$ 时的水平是不相等的。

过程中没有包含风险市场价格的信息，我们必须利用收益率曲线来为后者建模。特别地，我们将考察收益率曲线的短端来寻找该信息。

将 $Z(r, t; T)$ 在 $t=T$ 处泰勒展开就可以得到收益率曲线的短端。具体细节参见第 31 章的相关内容。从式 (36-2) 我们发现当 $t \rightarrow T$ ，对任何模型的 $w(r)$ 、 $u(r)$ 和 $\lambda(r)$ 而言都有

$$Z(r, t; T) \sim 1 - r(T-t) + \frac{1}{2}(T-t)^2(r^2 - u + \lambda w) + \dots$$

由此我们有

$$\text{当 } t \rightarrow T \text{ 时, } -\frac{\ln Z}{T-t} \sim r + \frac{1}{2}(u - \lambda w)(T-t) + \dots \quad (36-7)$$

因此在这个单因子模型中收益率曲线短端的斜率就是 $(u - \lambda w)/2$ 。我们可以利用该结果和时间序列数据从实证上确定 $u - \lambda w$ 的形式。

我们可以从 1 个月期和 3 个月期的美国 LIBOR 数据中计算出收益率曲线斜率的一个



时间序列。图 36-4 展示了收益率曲线斜率序列与瞬时利率序列的关系，其中每个数据点与下一个点都用直线连接。图 36-5 展示了作为 r 的函数的市场风险价格 λ 。图 36-6 展示了它跟时间的关系。图中正的顶点意味着人们愿意为承担风险而付费。注意上面的标记——恐惧和贪婪。

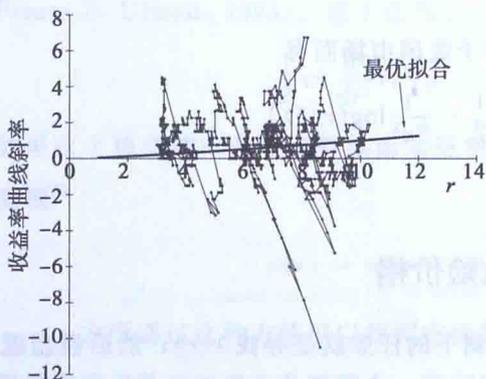


图 36-4 收益率曲线斜率与瞬时利率的关系和最优拟合 (美国 LIBOR 数据)

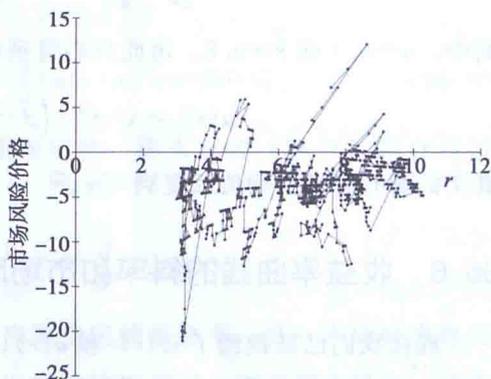


图 36-5 风险市场价格与瞬时利率的关系 (美国 LIBOR 数据)

我们继续采取利用非时变系数寻找最优拟合的策略。这么做的理由在于我们是从长时期的角度来观察数据，同时我们选择 $\lambda(r)$ 来从平均意义上拟合图 36-4。

在采用该方法时，不必掩饰什么，我们知道该模型的限制性。^①

我们发现对于美国数据而言，简单地选择 $\lambda(r) = -40r^{\beta-1}$ 从大体上讲能很好地拟合数据。

现在我们可以对易处理的单因子模型和这里所介绍的模型做一个比较。易处理的模型要求风险调整的漂移率 $u - \lambda w$ 具有 $a - br$ 的形式，我们的模型需要 $u - \lambda w$ 具有如下形式

$$v^2 r^{2\beta-1} \left(\beta - \frac{1}{2} - \frac{1}{2a^2} \log(r/\bar{r}) \right) - \lambda(r) v r^\beta$$

从图 36-4 我们马上可以看到当 a 和 b 为正时， $a - br$ 的形式不能很好地拟合 $u -$

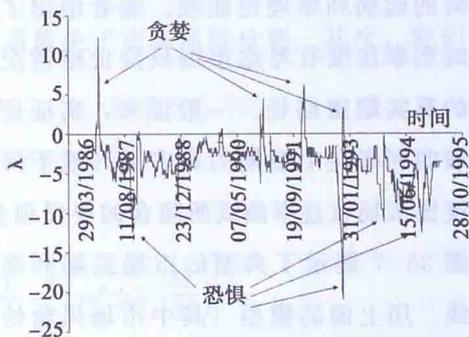


图 36-6 风险市场价格与时间的关系
(美国 LIBOR 数据)

λw 。事实上，BDT 模型的风险调整漂移率的性质要好得多。

图 36-4 也许是最具指导性的一张图。如果图中显示出 $u - \lambda w$ 与 r 是一一对应的关系，我们就很容易找到 $\lambda(r)$ 。然而，图中显示的并不是这种情况。对单因子模型的任何应用都存在这个问题。这同样强烈说明单纯地拟合市场数据将造成一种虚假的安全感。众所周知，拟合的时变参数总是需要再次拟合。^②

36.7 收益率曲线斜率告诉我们什么

关于这个结果有几点是需要注意的。首先，在选定了 λ 之后，现在的漂移项 u 比 λw 项要小得多。因此，在该模型中，风险调整的瞬时利率会均值回复到一个比 8% 高得多的值上。这是一个非常重要的现象，凸显了现实过程和风险中性过程的差异。其次，我们对 λ 的选择是通过匹配收益率曲线的短端斜率完成的。现在该模型的长期利率非常之高，因为风险中性利率会向一个非常高的水平回复。

由于收益率曲线斜率很大，从这些观测（以及式 (36-7) 对任何模型都是有效地）得到的结论是任何单因子模型都会遇到这些问题：要么对短端收益率曲线

① 我们可以改为选择最好/最差的 $\lambda(r)$ 来限制衍生品价格的范围。这个方向的想法可以参见第 52 章和第 68 章。

② 你可以虚构所有事实一小段时间，你也可以一直虚构一小部分事实，但是你无法在所有时候虚构所有事实。政客们深谙此道。

拟合较为精确，但对长期利率拟合较差；要么对长期利率拟合较好，但短端收益率曲线斜率拟合较差。我们可以比较一下 $\lambda=0$ 时和 λ 取匹配曲线斜率的特定值时的远期利率理论曲线。前者给出了瞬时利率在没有考虑市场风险价格情况下的真实期望路径。一般说来，实证证据表明利率在中短期的真实上升或下降速度比市场收益率曲线所隐含的要慢很多。图 36-7 展示了典型的市場远期利率曲线、用上面的模型（其中市场风险价格为 0）得到的预期瞬时利率路径以及拟合了收益率曲线斜率的理论远期利率曲线。

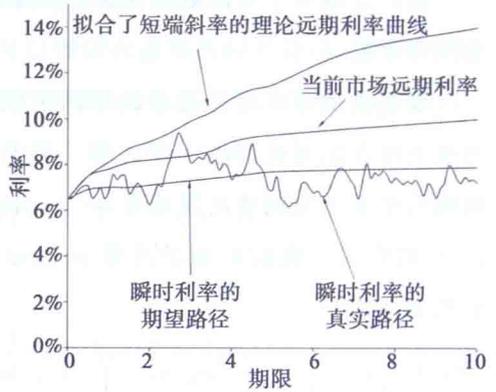


图 36-7 典型的市場远期利率、实证模型下瞬时利率的预期路径以及拟合了短端收益率曲线斜率的理论远期利率

当 $\lambda=0$ 时，我们实际上在为真实瞬时利率建模。这比为风险中性瞬时利率和收益率曲线建模要容易很多。 $\lambda=0$ 的模型能很好地拟合真实的美国瞬时利率。

最后，就美国数据而言，我们发现 BDT 模型是与我们所推导得到的模型最接近的常见模型。BDT 模型的波动率结构是符合现实的，并且风险调整漂移率也与实证数据非常匹配。BDT 模型与我们的模型很接近，但内在逻辑却有本质的不同——BDT 模型一开始就是利用其简单的树形结构去拟合数据，对此我们必须审慎对待。

36.8 远期利率曲线的“平均”性质

的确，你可能会说市场风险价格的选择不应该仅仅取决于短端收益率曲线的行为。那试试更全局的方法如何？继续使用非时变模型与实证数据相比较的思路，我们可以观察整条远期利率曲线的平均表现。首先，我们需要一些理论基础。

从 Fokker-Planck 方程我们可以得出真实漂移率、波动率和真实稳态概率分布的关系

$$u = \frac{1}{2p_{\infty}} \frac{d}{dr}(w^2 p_{\infty})$$

类似地，如果我们用 p_{∞}^* 来定义风险中性稳态分布，那么我们有

$$u - \lambda w = \frac{1}{2p_{\infty}^*} \frac{d}{dr} (w^2 p_{\infty}^*)$$

从这些结果出发可以做两件事情。首先，我们可以把它们之间的 u 消掉，得到

$$p_{\infty}^* = p_{\infty} e^{-2 \int \frac{\lambda(s)}{w(s)} ds}$$

显然真实和风险中性下的稳态分布之间的关系取决于市场风险价格。其次，我们可以从债券定价公式中消除 $u - \lambda w$ 得到

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} + \frac{1}{2p_{\infty}^*} \frac{d}{dr} (w^2 p_{\infty}^*) \frac{\partial Z}{\partial r} - rZ = 0$$

这可以写成

$$p_{\infty}^*(r) \left(\frac{\partial Z}{\partial t} - rZ \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(w^2 p_{\infty}^* \frac{\partial Z}{\partial r} \right)$$

使用实际的分布，我们有

$$p_{\infty}(r) e^{-2 \int \frac{\lambda(s)}{w(s)} ds} \left(\frac{\partial Z}{\partial t} - rZ \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(w^2 p_{\infty}^* \frac{\partial Z}{\partial r} \right)$$

如果我们在 r 的取值范围内对上式积分，那么等式右边将等于零，因为它是在取值范围末端性质良好的完全导数形式，这样我们有

$$\int_0^{\infty} p_{\infty}(r) e^{-2 \int \frac{\lambda(s)}{w(s)} ds} \left(\frac{\partial Z}{\partial t} - rZ \right) dr = 0$$

r 的取值范围未必是从 0 到无穷大，但是由于之前对 w 和 p_{∞} 的选择，所以 r 的范围就是这样。由于在这个积分中有一个真实的概率密度函数，所以它是真实期望，而不是风险中性期望。换句话说

$$e^{-2 \int \frac{\lambda(s)}{w(s)} ds} \left(\frac{\partial Z}{\partial t} - rZ \right)$$

的均值必须为 0。因为风险中性瞬时利率模型是时间齐次的，我们可以写成

$$Z(t^*; T) = Z(\tau), \text{ 其中 } \tau = T - t^*$$

现在对所有的剩余期限 τ ，我们可以将积分方程写成

$$E_{\infty} \left[g(r) \left(\frac{\partial Z}{\partial \tau} + Z(\tau) \right) \right] = 0 \quad (36-8)$$

其中

$$g(r) = e^{-2 \int \frac{\lambda(s)}{w(s)} ds}$$

注意这必须对所有剩余期限 τ 均成立。该结论是基于从时间和空间上取平均的等价性，即遍历性理论。如果存在任何的时间非齐次性则该式不成立。

这个结果特别有意思，因为这同时涉及真实概率和风险中性概率。例如我们

之前提到的关于单个收益率曲线形状的性质，要么其斜率取决于风险中性概率，要么瞬时利率的分布取决于真实概率分布。然而真实的远期利率曲线“平均”而言同时取决于这两种概率。我们能够用该性质来估计市场风险价格吗？

从贴现因子数据我们能够找到远期利率曲线和瞬时利率。如果数据足够多，我们就可以可靠地估计平均值。我们能够找到一个满足式(36-8)的非零函数吗？答案是肯定的。我们能够找到一个严格正的函数吗？这是非常非常难的。我们需要函数是正的，由此我们才能够对其取对数然后找到市场风险价格。我们并不想要一个虚数形式的市场风险价格。如果我们找不到这样的函数（我通过美国数据没有找到），那我们就要担心单因子利率模型拟合现实的能力。

36.9 隐含建模法：两因子

在本章的第一部分，我展示了从瞬时利率实证数据和收益率曲线斜率中推导隐含的瞬时利率模型的方法。在本部分，我将展示如何运用该方法建立两因子而不是单因子模型。这里仅仅是对未来可能研究方向的一些指引。众所周知的是有一些常见的两因子模型有一些非常不好的性质（比如利率在有限的时间内可以达到无穷大），所以该方法很重要。

对真实利率，常用的两因子利率模型是

$$dr = udt + w dX_1$$

和

$$dl = pdt + qdX_2$$

尽管存在内部一致性问题，^①我仍将假设 l 是长期利率。相关系数是 ρ 。我将介绍从实证数据中寻找函数 u 、 w 、 p 、 q 、 ρ 以及 λ_r 的方法。我们再一次假设这些函数是非时变的，但当然都可以是 r 和 l 的函数。下面是确定这 6 个函数形式的步骤。

- 我们首先寻找的两项是波动率的函数， w 和 q 。为简单起见，假设 w 和 q 的形式为 $wr^\alpha l^\beta$ （对 r 和 l ， w 、 α 、 β 的取值不同）。通过考察瞬时利率波动率和长期利率波动率来实现最优拟合。该步骤与前面的单因子隐含模型相同。
- 下一个建模对象是相关系数 ρ 。至少在美国，众所周知的实证观察是短期利率和长短期利差是不相关的。这个结果可以用来确定 ρ 。

① 这个问题只与风险中性利率有关而与真实利率无关。

- 接下来考察收益率曲线的斜率。它提供了瞬时利率的风险调整漂移率的信息。通过对短期利率的泰勒级数展开，我们发现即使在两因子世界中，瞬时利率的风险调整漂移率仍然与收益率曲线的斜率相关。这可以用于对 λ_t 的建模。
- 接下来考察真实漂移率。假设我们已经建立了波动率和相关系数的模型，那么 r 和 l 的实证稳态概率密度函数就给出了一些真实漂移率函数 u 和 p 的信息。真实漂移率和稳态概率密度函数之间的关系通过稳态的两因子前向 Fokker-Planck 方程展现。
- 最后一个难题是在没有随机性条件下考察模型的动态变化。换句话说，当我们不考虑随机项时，模型的表现如何呢？答案来自于两个常微分方程的解，即

$$dr = u(r, l)dt$$

和

$$dl = p(r, l)dt$$

从这两个方程中，我们可以消除对时间的依赖，得到一个常微分方程

$$\frac{dl}{dr} = \frac{p(r, l)}{u(r, l)}$$

选择 p 和 u 的比率使得方程的解与实证数据中 l 和 r 的表现类似。例如，此时我们可以将经济周期纳入模型。

36.10 总结

为利率建模是非常困难的。几乎没有经济学的经验法则可以帮助我们。在股票建模中，我们知道收益率是重要的，而且收益率必须独立于资产价格水平。这为我们对股票建模提供了很大帮助，事实上除此之外不需要什么其他信息就可以为股票建模了。在利率建模中我们就没有这样的指引。所有我们所知道的就是利率为正（尽管在一些极端情况下并不是这样）以及不会无限制增长。这并没有太大的帮助。

因此在这一章中，我们展示了如何通过考察数据来发现可能的合理模型。我们鼓励读者运用这里的方法自己动手建模，而不是采用文献中已有的模型。

就单因子模型而言，我们的结论是必须谨慎地使用。它们并没有用任何定量的方式来对现实建模，而且我们不清楚收益率曲线校准在长期是否有效，还是说

仅仅是为了 Delta 对冲而发明的只在短期有效的东西。

拓展阅读

- Chan, Karolyi, Longstaff 和 Sanders (1992) 非常详细地考察了美国瞬时利率, 并且使用他们的结论讨论常见模型的有效性。
- 对本章建模方法的更多细节见 Apabhai, Choe, Khennach 和 Wilmott (1995)。
- Apabhai (1995) 描述了两因子隐含分析法。



第 37 章

HJM 和 BGM 模型

本章内容

- Heath、Jarrow 和 Morton (HJM) 远期利率模型
- HJM 模型和瞬时利率模型的关系
- HJM 方法的优缺点
- 如何将远期利率曲线的随机变动分解为其主成分
- Brace、Gatarek 和 Musiela 模型或 LIBOR 市场模型

37.1 引言

Heath, Jarrow 和 Morton 对整条远期利率曲线建模的方法是固定收益产品定价的一个重大突破。它们建立的框架包含了所有我们曾经（以及更多还没有）提到的模型。它们没有对瞬时利率建模然后推导远期利率（或利率曲线），而是大胆地从整条远期利率曲线出发进行建模。因为远期利率在当前就是已知的，收益率曲线拟合的问题在它们的模型里自然而然地就完成了，不需要事后再来添加。而且，该方法可以利用现实数据来估计远期利率的随机运动，并将之用于衍生品定价。

37.2 远期利率方程

HJM 模型的核心在于建模的对象为整条远期利率曲线，而不仅仅是收益率曲线的短端。我们用 $F(t; T)$ 来表示 t 时刻的远期利率，[⊖] 那么到期日 T 支付 1 美元的零息票债券在 t 时刻的价格为

$$Z(t; T) = e^{-\int_t^T F(t; s) ds} \quad (37-1)$$

我们假设所有零息债的变化都遵循方程

$$dZ(t; T) = \mu(t, T)Z(t; T)dt + \sigma(t, T)Z(t; T)dX \quad (37-2)$$

这里没有做过多假设，仅仅说明这是一个单因子模型。稍后我会将之一般化。这里的微分符号 d 表示时间 t 在推移但到期日 T 是固定的。注意 $Z(t; t) = 1$ ，所以 $\sigma(t, t) = 0$ 。从式 (37-1) 出发可以得到

$$F(t; T) = -\frac{\partial}{\partial T} \log Z(t; T)$$

上式两边对 t 取微分并将式 (37-2) 代入可以得到远期曲线的变化方程

$$dF(t; T) = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{2} \sigma^2(t, T) - \mu(t, T) \right) dt - \frac{\partial}{\partial T} \sigma(t, T) dX \quad (37-3)$$

图 37-1 展示了今天 (t^* 时刻) 以及几天后的远期利率曲线。整条曲线根据式 (37-3) 变化。

这里面包含了什么信息呢？可以发现远期利率的漂移项是用远期利率的波动率表示的。该漂移项中还有一项是债券的漂移率 μ 。之前我们多次见到在为衍生品定价时债券的漂移率是不会出现的，取而代之的是无风险利率 r 。这里也不例外。

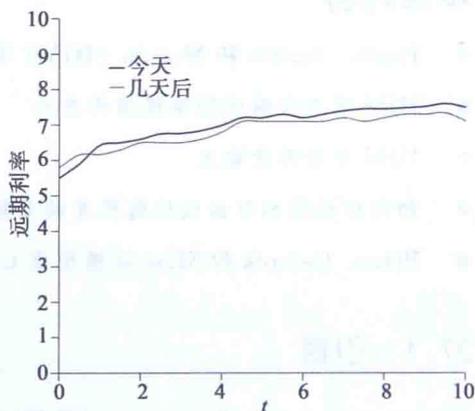


图 37-1 今天和几天后的远期利率曲线

37.3 瞬时利率过程

瞬时利率就是到期日为当前时刻的远期利率，即

[⊖] 实际上，这里的远期利率指的都是 t 时刻的 T 至 $T+dT$ 期间的瞬时远期利率。——译者注

$$r(t) = F(t; t)$$

本节中我们将利用该式推导瞬时利率的随机微分方程。通过推导我们会逐渐明白为什么用 HJM 方法给衍生品定价可能会比较慢。

假设当前时刻为 t^* ，我们已经知道了今天的整条远期利率曲线 $F(t^*; T)$ ，可以将未来任意时刻 t 的瞬时利率写成

$$r(t) = F(t; t) = F(t^*; t) + \int_{t^*}^t dF(s; t)$$

将式 (37-3) F 所遵循的随机过程代入可得

$$r(t) = F(t^*; t) + \int_{t^*}^t \left(\sigma(s, t) \frac{\partial \sigma(s, t)}{\partial t} - \frac{\partial \mu(s, t)}{\partial t} \right) ds - \int_{t^*}^t \frac{\partial \sigma(s, t)}{\partial t} dX(s)$$

两边对时间 t 求微分就可以得到 r 的随机微分方程

$$\begin{aligned} dr = & \left(\frac{\partial F(t^*; t)}{\partial t} - \frac{\partial \mu(t, s)}{\partial s} \right) \Big|_{s=t} \\ & + \int_{t^*}^t \left(\sigma(s, t) \frac{\partial^2 \sigma(s, t)}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial \sigma(s, t)}{\partial t} \right)^2 - \frac{\partial^2 \mu(s, t)}{\partial t^2} \right) ds \\ & - \left(\int_{t^*}^t \frac{\partial^2 \sigma(s, t)}{\partial t^2} dX(s) \right) dt - \frac{\partial \sigma(t, s)}{\partial s} \Big|_{s=t} dX \end{aligned}$$

HJM 的非马尔科夫性质

不必关心上述表达式的每个细节。先来看其中的一点。比较一下该瞬时利率随机微分方程和第 30 章中的模型。显然，该方程更复杂，多了很多项。除了最后一项以外的其他项都是确定性的，最后一项为随机项。要点在这些项的性质。带下划线的那一项依赖于 σ 从时刻 t^* 到未来时刻 t 的历史路径，还依赖于随机增长项 dX 的历史路径。所以该项具有很强的路径依赖性。这使得一般的 HJM 模型的瞬时利率变成了一个非马尔科夫 (non-Markov) 过程。在马尔科夫过程 (Markov process) 中只需要当前的变量状态就可以决定未来的可能状态。如果只要增加少量的状态变量就可以完成对未来的预测，那模型的非马尔科夫性质不是什么大问题。^①但不幸的是，一般的 HJM 模型需要无穷多数量的此类变量才可以定义当前的状态；如果我们要将 HJM 模型写成偏微分方程的形式，我们需要添加无穷多数量的自变量。

^① 回忆一下亚式期权定价的过程。

目前为止我们都是在现实世界中建模。要为衍生品定价需要转移到风险中性世界。要完成该转移我们先来看看持有一份对冲过的组合会发生什么。

37.4 市场风险价格

在单因子 HJM 模型中远期利率曲线的所有随机变化都是完全相关的。所以我们可以用不同到期日的债券相互对冲。这样的对冲组合形式为

$$\Pi = Z(t; T_1) - \Delta Z(t; T_2)$$

该组合的微小变化为

$$\begin{aligned} d\Pi &= dZ(t; T_1) - \Delta dZ(t; T_2) \\ &= Z(t; T_1)(\mu(t, T_1)dt + \sigma(t, T_1)dX) - \Delta Z(t; T_2)(\mu(t, T_2)dt + \sigma(t, T_2)dX) \end{aligned}$$

如果选择

$$\Delta = \frac{\sigma(t, T_1)Z(t; T_1)}{\sigma(t, T_2)Z(t; T_2)}$$

那对冲组合就是无风险的。令其收益率等于无风险利率 $r(t)$ 并进行适当的变换, 可以发现

$$\frac{\mu(t, T_1) - r(t)}{\sigma(t, T_1)} = \frac{\mu(t, T_2) - r(t)}{\sigma(t, T_2)}$$

左边是 T_1 的函数, 右边是 T_2 的函数。该式成立说明两边都是不依赖于到期日 T 的

$$\mu(t, T) = r(t) + \lambda(t)\sigma(t, T)$$

跟之前一样, $\lambda(t)$ 就是(所选单因子的)市场风险价格。

37.5 真实世界和风险中性世界

我们已经做好用 HJM 模型为衍生品定价的准备了。但首先我们先来讨论一下现实世界和风险中性世界的关系, 好建立与之前章节的联系。

本章前面介绍的都是现实世界下的变量。但要给衍生品定价需要在风险中性世界中进行。在 HJM 环境下, 风险中性指的是 $\mu(t, T) = r(t)$ 。因为在风险中性世界中所有可交易投资的回报都是 $r(t)$ 。我们可以用式(37-2)来演示。风险中性下零息债价格服从的方程为

$$dZ(t; T) = r(t)Z(t; T)dt + \sigma(t, T)Z(t; T)dX$$

上述方程的确定性部分表明零息债的指数增长率为无风险利率。方程的形式跟风

险中性下的股票过程类似，只是这里的波动率形式复杂很多。

风险中性远期利率的漂移项和波动项的关系

假设风险中性远期利率曲线的随机微分方程形式为

$$dF(t; T) = m(t, T)dt + v(t, T)dX$$

根据式 (37-3)，远期利率的波动率和漂移率分别为

$$v(t, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \sigma(t, T)$$

和

$$\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{2} \sigma^2(t, T) - \mu(t, T) \right) = v(t, T) \int_t^T v(t, s) ds - \frac{\partial}{\partial T} \mu(t, T)$$

这里用到了 $\sigma(t, t) = 0$ 。在风险中性世界中 $\mu(t, T) = r(t)$ ，所以风险中性远期利率曲线的漂移项跟波动项的关系为

$$m(t, T) = v(t, T) \int_t^T v(t, s) ds \quad (37-4)$$

因此

$$dF(t; T) = v(t, T) \left(\int_t^T v(t, s) ds \right) dt + v(t, T) dX \quad (37-5)$$

37.6 衍生品定价

为衍生品定价只需计算风险中性下所有现金流的期望现值。在第 10 章中我们已经讨论过股权、外汇和商品衍生品的相关过程。运气好的话可以通过一个低维的偏微分方程完成相关计算，相关理论见第 10 章。第 30 章和第 35 章的单因子和双因子模型沿袭了相关方法。但对于最一般的 HJM 模型来说，无法将之写成有限维的偏微分方程来为衍生品定价。

因为 HJM 的非马尔科夫性质，一般来说无法使用偏微分方程方法。我们只能使用两个备选方案。一个方案是模拟风险中性远期利率的随机过程来直接计算其期望值；另一个方案是建立树形结构。

37.7 模拟

如果要使用蒙特卡罗方法，我们要模拟整条远期利率曲线的变化，在每条路



径上计算所有发生的现金流，然后利用已实现瞬时利率贴现 $r(t)$ 来计算这些现金流的现值。

下面介绍使用蒙特卡罗模拟为衍生品定价的步骤。假设我们已经选择了一个远期利率波动率的模型 $v(t, T)$ ，今天的时点为 t^* ，远期利率曲线为 $F(t^*; T)$ 。

(1) 模拟风险中性远期利率曲线在所需时间段（例如从当前到 T^* ）中的一条实现路径。也就是模拟

$$dF(t; T) = m(t, T)dt + v(t, T)dX$$

其中

$$m(t, T) = v(t, T) \int_t^T v(t, s) ds$$

这样可以得到 $t^* \leq t \leq T^*$ 和 $T \geq t$ 上 $F(t; T)$ 的一条实现路径。我们现在有了整条远期利率曲线的一条实现路径。

(2) 上述模拟完成后，我们可以得到至 T^* 为止所有到期期限的零息债的一个实现价格。

(3) 使用该远期利率路径计算目标衍生品发生的所有现金流的价值。

(4) 使用瞬时利率 $r(t)$ 的实现路径计算这些现金流的现值。注意要使用连续复利形式的无风险利率进行计算，而不是其他的利率。在风险中性世界中所有资产的预期收益率均为 $r(t)$ 。

(5) 回到第 1 步再次进行模拟，重复上述过程直到达到计算精度的要求。

HJM 模型的缺点就是上述蒙特卡罗模拟过程可能会很慢。优点则是因为已经计算了整条远期利率曲线，模拟过程中任何到期日的债券价格都很容易算出来。

37.8 树方法

使用树方法为非马尔科夫变量建模有一个不好处理的地方，就是先上升再下降跟先下降再上升时的远期利率曲线是不一样的。在马尔科夫过程中两者会重合，所以二叉树方法十分强大而有效。非马尔科夫的树形结构更加“茂盛”，随着时间步长的增长其节点数目会呈现指数式增长。

如果合约是欧式的，没有提前执行条款，我们就不必使用树方法；蒙特卡罗模拟就可以完成定价。但如果合约有类似美式期权的特性那我们就不得不使用树形结构。指数增长的树形结构会使得定价过程非常缓慢。

37.9 Musiela 参数化

在实际应用中通常会将远期利率曲线的波动率结构设定为

$$v(t, T) = \bar{v}(t, T - t)$$

这意味着我们对不同到期期限（比如说 1 年、2 年或 3 年）的波动率进行建模，而不是对不同到期时间（比如说 2006 年、2007 年等）的波动率建模。如果用 τ 来表示期限长度 $T - t$ ，那么要找到一个满足下式的 $\bar{F}(t; \tau) = F(t, t + \tau)$ 就很容易了。

$$d\bar{F}(t; \tau) = \bar{m}(t, \tau)dt + \bar{v}(t, \tau)dX$$

其中

$$\bar{m}(t, \tau) = \bar{v}(t, \tau) \int_0^\tau \bar{v}(t, s) ds + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \tau}(t, \tau)$$

在实际应用中使用这种形式的风险中性远期利率定价会更容易。

37.10 多因子 HJM 模型

通常单因子模型无法捕捉收益率曲线的一些微妙变化，后者对一些衍生品来说是非常重要的。最明显的例子是价差期权，其回报与两个不同到期日的收益率之间的差异有关。这时我们需要一个多因子模型。多因子模型的理论跟单因子模型是类似的，我们下面将 HJM 模型拓展为多因子。

如果风险中性远期利率曲线满足 N 维随机微分方程

$$dF(t, T) = m(t, T)dt + \sum_{i=1}^N v_i(t, T)dX_i$$

其中 dX_i 之间是不相关的，那么

$$m(t, T) = \sum_{i=1}^N v_i(t, T) \int_t^T v_i(t, s) ds$$

因此

$$dF(t, T) = \left[\sum_{i=1}^N v_i(t, T) \int_t^T v_i(t, s) ds \right] dt + \sum_{i=1}^N v_i(t, T) dX_i \quad (37-6)$$

37.11 Excel 实现

HJM 模型很容易在 Excel 中实现。图 37-2 展示了两因子模型的模拟结果。

在本例中使用了 Musiela 参数化， \bar{v} 仅为 $\tau = T - t$ 的函数。这意味着波动率中的第 1 项 \bar{M} 只是剩余期限（图中第 9 行[⊖]）和远期曲线斜率（根据第 11 行往下的所有单元格中的数据计算得到）两者的函数。这里波动率因子有两个，一个为常数，另一个是 τ 的线性函数。

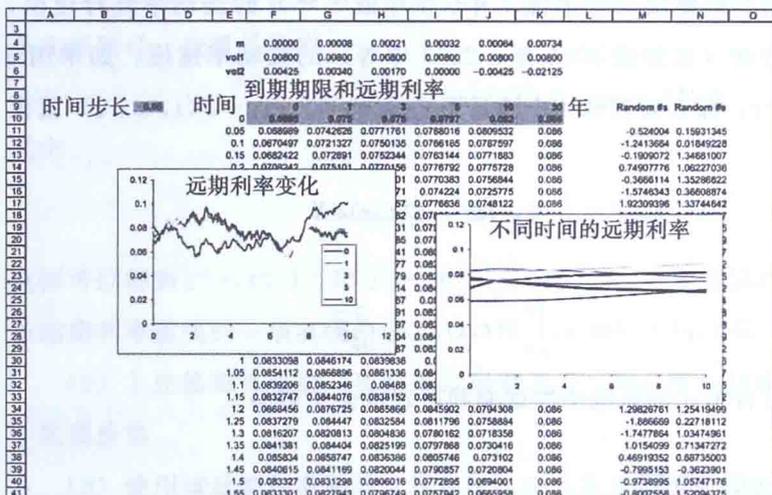


图 37-2 用数据表显示的两因子 HJM 模拟结果

37.12 一个简单的单因子示例：Ho & Lee 模型

在本节中我们来比较一下第 30 章的瞬时利率模型和 HJM 模型。HJM 方法的一个主要特点是收益率曲线是自然而然得到拟合的。拟合收益率曲线的瞬时利率模型中最简单的是 Ho & Lee 模型，我们将之与 HJM 模型进行一个比较。

在 Ho & Lee 模型中风险中性瞬时利率满足

$$dr = \eta(t)dt + cdX$$

其中 c 为常数。零息票债券的价格 $Z(r, t; T)$ 满足

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{1}{2}c^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} + \eta(t) \frac{\partial Z}{\partial r} - rZ = 0$$

其终值条件为

$$Z(r, T; T) = 1$$

其解为

⊖ 原文误为第 3 行。——译者注

$$Z(r, t; T) = \exp\left(\frac{1}{6}c^2(T-t)^3 - \int_t^T \eta(s)(T-t)ds - (T-t)r\right)$$

在 Ho & Lee 模型中会选择合适的 $\eta(t)$ 使得模型能拟合 t^* 时刻的收益率曲线。其含义用远期利率表示就是

$$F(t^*; T) = r(t^*) - \frac{1}{2}c^2(T-t^*)^2 + \int_{t^*}^T \eta(s)ds$$

所以

$$\eta(t) = \frac{\partial F(t^*; t)}{\partial t} + c^2(t-t^*)$$

对于 t^* 之后的任何时刻

$$F(t; T) = r(t) - \frac{1}{2}c^2(T-t)^2 + \int_t^T \eta(s)ds$$

由此可以得到

$$dF(t; T) = c^2(T-t)dt + cdX$$

根据之前的定义, $\sigma(t, T) = -c(T-t)$ 而 $v(t, T) = c$ 。上式为风险中性远期利率的演化方程。容易验证对该模型来说式 (37-4) 是成立的。所以这是 Ho & Lee 模型的 HJM 表达。绝大多数的常见模型都具有 HJM 表达。

37.13 主成分分析

HJM 有两种主要的使用方法。一种方法是选择合适的波动率结构 $v_i(t, T)$ 来构建一个具有马尔科夫性质的易处理的模型。这往往会让我们回到“经典”的常见瞬时利率模型。另一种方法是选择能拟合数据的波动率结构。这是我们在这里介绍主成分分析 (PCA) 的原因。

在分析远期利率曲线的波动率时通常假设波动率结构仅为到期期限的函数, 即

$$v = \bar{v}(T-t)$$

我将保留此假设, 并考察一个更广义的多因子模型

$$dF(t; T) = m(t, T)dt + \sum_{i=1}^N \bar{v}_i(T-t)dX_i$$

我们可以根据时间序列数据从实证角度来确定 \bar{v}_i ; 这就是主成分分析 (Principal Components Analysis, PCA)。下面我简单地介绍一下如何实施, 更多的细节将通过 Excel 表格展现。

如果我们有过去几年的远期利率的时间序列数据，就可以计算出不同期限的利率变化之间的方差和协方差。比如说假设远期利率的期限为1个月、3个月、6个月、1年、2年、3年、5年、7年、10年和30年，那方差协方差矩阵将是 10×10 的对称矩阵，对角线上是各利率变化的方差，对角线外是不同利率变化之间的协方差。

图 37-3 中的 Excel 表格展示了 1 个月、3 个月和 6 个月利率的日数据以及日间变化。利率变化的方差协方差矩阵如图右边所示。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	远期利率				利率变化						
2		1月	3月	6月	1月	3月	6月				
3	22-Sep-88	8.25000	8.31250	8.56250							
4	23-Sep-88	8.25000	8.31250	8.56250	0.00000	0.00000	0.00000				
5	26-Sep-88	8.31250	8.37500	8.62500	0.06250	0.06250	0.06250				
6	27-Sep-88	8.31250	8.43750	8.61000	0.00000	0.06250	0.06250				
7	28-Sep-88	8.42188	8.50000	8.81250	0.10938	0.06250	0.12500	1 month	0.007501		
8	29-Sep-88	8.37500	8.68750	8.81250	-0.04688	0.18750	0.00000	3 month	0.003831	0.004225	
9	30-Sep-88	8.31250	8.62500	8.75000	-0.06250	-0.06250	-0.06250	6 month	0.003628	0.004020	0.004997
10	3-Oct-88	8.31250	8.62500	8.68750	0.00000	0.00000	-0.06250				
11	4-Oct-88	8.31250	8.56250	8.68750	0.00000	-0.06250	0.00000	标准化后的方差协方差矩阵			
12	5-Oct-88	8.31250	8.56250	8.68750	0.00000	0.00000	0.00000		1月	3月	6月
13	6-Oct-88	8.31250	8.56250	8.68750	0.00000	0.00000	0.00000	1 month	0.000189		
14	7-Oct-88	8.31250	8.62500	8.75000	0.00000	0.06250	0.06250	3 month	0.000097	0.000106	
15	10-Oct-88	8.25000	8.56250	8.56250	-0.06250	-0.06250	-0.18750	6 month	0.000091	0.000101	0.000126
16	11-Oct-88	8.25000	8.56250	8.62500	0.00000	0.00000	0.06250				
17	12-Oct-88	8.31250	8.62500	8.68750	0.06250	0.06250	0.06250				
18	13-Oct-88	8.31250	8.64063	8.68750	0.00000	0.01563	0.00000				
19	14-Oct-88	8.31250	8.62500	8.62500	0.00000	-0.01563	-0.06250				
20	17-Oct-88	8.31250	8.62500	8.62500	0.00000	0.00000	0.00000				
21	18-Oct-88	8.31250	8.62500	8.62500	0.00000	0.00000	0.00000				
22	19-Oct-88	8.31250	8.62500	8.62500	0.00000	0.00000	0.00000				
23	20-Oct-88	8.37500	8.68750	8.68750	0.06250	0.06250	0.06250				
24	21-Oct-88	8.37500	8.68750	8.68750	0.00000	0.00000	0.00000				
25	24-Oct-88	8.37500	8.68750	8.75000	0.00000	0.00000	0.06250				
26	25-Oct-88	8.37500	8.68750	8.75000	0.00000	0.00000	0.00000				
27	26-Oct-88	8.37500	8.68750	8.75000	0.00000	0.00000	0.00000				
28	27-Oct-88	8.37500	8.68750	8.68750	0.00000	0.00000	-0.06250				

图 37-3 1 个月、3 个月和 6 个月期的利率及其变化

PCA 是用来寻找利率之间共同变动的技术，实际上是在寻找矩阵的特征值和特征向量。我们可能会发现引起远期利率曲线变化的最大成分是利率之间的共同变动；或者说利率的平行移动是曲线变化的最大主成分。下一个最重要的变动可能是曲线的倾斜，接下来是曲线的弯曲。

假设我们已经得到了前面提到的利率的变化的方差协方差矩阵 M 。该 10×10 矩阵的 10 个特征值 λ_i 和特征向量 v_i 满足

$$Mv_i = \lambda_i v_i$$

其中 v_i 为列向量。

与最大的特征值对应的特征向量就是第一主成分。它给出了远期利率变化的最主要部分。该向量的第 1 个元素代表 1 个月期利率的变动，第 2 个元素代表了 3 个月期利率的变动，依此类推。而特征值为这些变动的方差。从图 37-4 中可以看到第一主成分的各元素与相应期限的关系图。跟其他主成分比较，该折线相对较平。这说明收益率曲线的平行移动的确是引起变动的主要成分。注意特征向量之间是正交的，不同的主成分之间没有相关性。

图中还展示了接下来的两个主成分。可以看到一个给出了曲线的倾斜，另一个给出了曲线的弯曲。

主成分分析的结论是各波动率因子为

$$\bar{v}_i(\tau_j) = \sqrt{\lambda_i} (v_i)_j$$

其中 τ_j 为到期期限，即 1/12、1/4 等。 $(v_i)_j$ 是向量 v_i 的第 j 个元素。其他期限的波动率可以通过插值得到。

方差协方差矩阵的计算很简单，可参考第 11 章。特征值和特征向量的计算同样非常简单，只需使用后面介绍的方法。

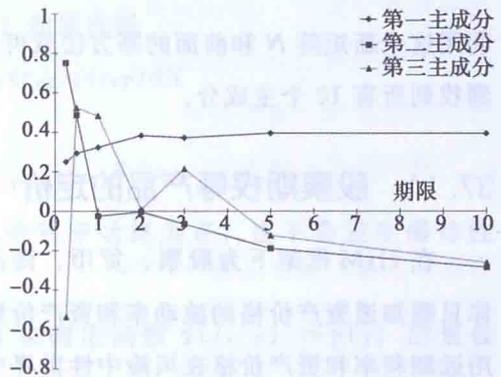


图 37-4 美国远期利率曲线的前三个主成分。数据从 1988~1996 年

幂方法

假设所有的特征值都不相等，因为方差协方差矩阵是从实证数据得到的，所以该假设还算合理。因为该矩阵是对称且正定的（方差协方差矩阵都是如此），所以已经具有了我们所需的所有良好的性质。通过下面的迭代过程可以很容易找到最大的特征值对应的特征向量。首先对该特征向量进行一个初始猜测，记为 x^0 。然后通过下式进行迭代

$$y^{k+1} = Mx^k$$

$k=0, \dots, \text{令}$



$\beta^{k+1} = \mathbf{y}^{k+1}$ 中模最大的那一项。

则接下来

$$\mathbf{x}^{i+1} = \frac{1}{\beta^{k+1}} \mathbf{y}^{k+1}$$

当 $k \rightarrow \infty$, \mathbf{x}^k 将趋向于特征向量, 而 β^k 将趋向于特征值 λ 。在实际应用中你会在达到某个预设的容忍度时停止迭代。这样就找到了第一主成分。通常都将向量规范化, 这样就得到了 \mathbf{v}_1 。

要找到下一个主成分, 先定义一个新矩阵

$$\mathbf{N} = \mathbf{M} - \lambda_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T$$

利用这个新矩阵 \mathbf{N} 和前面的幂方法就可以找到第二个主成分。可以重复该过程直到找到所有 10 个主成分。

37.14 股票期权等产品的定价

在 HJM 框架下为股票、货币、商品和指数等标的的期权定价是很直接的。你只需知道资产价格的波动率和资产价格跟远期利率因子的相关系数。接下来使用远期利率和资产价格在风险中性世界中的随机过程进行蒙特卡罗模拟, 注意零息债和资产的漂移率为 $r(t)$ 。当然还需要对红利、外国利率或持有成本等进行调整, 这些都会改变资产的漂移率。

唯一美中不足的是美式执行的产品难以在 HJM 框架下定价。

37.15 非无穷小瞬时利率

HJM 模型的一个问题是无法保证利率始终为正, 也无法保证货币市场账户保持有限值。这些问题的发生跟使用连续复利的远期利率有关; 所有其他的利率都是从该利率的演变中推导得到, 但该利率本身是不可观测的。使用有限计息周期的利率建模, 比如说 3 个月期 LIBOR, 有两个优点: 这些利率是可观测的, 而且正值性和有限性都可以得到保证。我们来看这是如何发生的。下面我们使用 Musiela 参数化的远期利率。

我说过 $\bar{F}(t, \tau)$ 满足

$$d\bar{F}(t, \tau) = \dots + \bar{v}(t, \tau) dX$$

一个合理的波动率结构选择为

$$\bar{v}(t, \tau) = \gamma(t, \tau) \bar{F}(t, \tau)$$

其中 $\gamma(t, \tau)$ 是有限和非零的。第一眼看来这是一个不错的波动率选择，因为对数正态是金融中常见的随机过程。但不幸的是该模型会导致爆炸性利率。但我们仍希望保留某种形式的对数正态性：在市场实践中几乎将所有东西都假设为对数正态。

我们可以通过定义一个计息频率为 m 的利率 $j(t, \tau)$ 来解决爆炸性利率问题。假设新利率 $j(t, \tau)$ 和原利率 $\bar{F}(t, \tau)$ 的关系为

$$\left(1 + \frac{j(t, \tau)}{m}\right)^m = e^{\bar{F}(t, \tau)}$$

现在再来使用对数正态模型会怎样呢？如果选择

$$dj(t, \tau) = \dots + \gamma(t, \tau) j(t, \tau) dX$$

则 $\bar{F}(t, \tau)$ 的随机微分方程的形式变为

$$d\bar{F}(t, \tau) = \dots - m\gamma(t, \tau) (1 - e^{\bar{F}(t, \tau)/m}) dX$$

该表达式中的波动率结构可以保证所有的利率始终为正，也不会发生爆炸性增长。

如果给定了 m 的值，可以通过 PCA 来确定函数 $\gamma(t, \tau) = \gamma(\tau)$ 的最佳形式。

37.16 Brace、Gatarek 和 Musiela 模型

Brace、Gatarek 和 Musiela 模型[⊖]建模的对象是固定收益世界中实际可交易、可观测的变量。可以将之视为 HJM 模型的离散版本。该方法相对来说比较直接，但如果你更熟悉微分方程而不是差分方程会觉得有点烦琐。该模型在实业界十分流行，因为它几乎可以为所有合约定价，只要合约的现金流可以分解成观察到的远期利率的函数。



现在我们建模的对象是可观测的、离散的远期利率，也就是市场上真实报价的利率，而不是非真实的连续远期曲线。假设在 T 时刻到期的零息债在 t 时刻的

⊖ 通常简称为 BGM 或 BGM/J 模型，J 代表 Jamshidian。

价格为 $Z(t; T)$ ，那么在 t 时刻的 T_i 到 T_{i+1} 的远期利率为

$$1 + \tau F(t; T_i, T_{i+1}) = 1 + \tau F(t; T_i, T_{i+\tau}) = 1 + \tau F_i(t) = \frac{Z(t; T_i)}{Z(t; T_{i+1})}$$

其中 τ 为 T_i 到 T_{i+1} 的时间间隔。这里用零息债价格来定义远期利率。为了表述简便我们后面都用 F_i 来表示 $F(t; T_i, T_{i+1})$ ，用 Z_i 来表示 $Z(t; T_i)$ 。这些当然都是随机变量，是随时间变化而变化的。

用远期利率表示的贴现率为

$$\frac{1}{1 + \tau F_i(t)}$$

这是用来计算 T_{i+1} 时刻的现金流在 T_i 时刻的现值的贴现率。

注意这里的利率是离散复利，跟第 13 章介绍的一样，而不是我们在股票世界中更常使用的连续复利。

假设每个远期利率 F_i 的动态过程为

$$dF_i = \mu_i F_i dt + \sigma_i F_i dX_i$$

看起来很像对数正态模型，但 μ 和 σ 中可能会存在 F 项，所以该过程比对数正态分布要广义得多。再假设零息债价格的动态过程为

$$dZ_i = rZ_i dt + Z_i \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} dX_j$$

其中

$$Z_i(t) = Z(t; T_i)$$

关于该表达式有几个需要注意的地方。首先，我们显然是处于风险中性世界中，因为可交易资产 Z 的漂移为无风险利率。如果一个债券不可交易则不能说该债券的漂移率为无风险利率。[⊖] 所以我们不能说 F_i 的漂移率为 r ，因为远期利率不是一个可交易资产。

实际上，稍后我们会看到 r 在推导过程中会被消掉，所以不必为 r 建模。跟前面一样，这看起来很像对数正态，但波动率 a 中可能藏有更多的 Z 。

最后，零息债价格的波动率仅由更短期限的远期利率的波动率决定。这是因为债券到期以后的波动不会影响其价格，这就是式 (37-7) 中不含有 a_{ii} 项的原因。

我们可以写出

⊖ 真实世界的漂移率当然是不等于 r 的。但定价过程中我们处于风险中性世界，该世界中所有可交易工具价格的增长率都为 r 。

$$Z_i = (1 + \tau F_i) Z_{i+1} \quad (37-7)$$

使用伊藤引理可以得到

$$dZ_i = (1 + \tau F_i) dZ_{i+1} + \tau Z_{i+1} dF_i + \varpi_i F_i Z_{i+1} \left[\sum_{j=1}^i a_{i+1,j} \rho_{ij} \right] dt \quad (37-8)$$

其中 ρ_{ij} 是 dX_i 和 dX_j 的相关系数。

式 (37-8) 含有 3 种类型的项: dX_i ; dX_j (当 $j=1, \dots, i-1$ 时) 和 dt 。

让式 (37-8) 中 dX_i 的系数相等可以得到

$$0 = (1 + \tau F_i) a_{i+1,i} Z_{i+1} + \tau Z_{i+1} \sigma_i F_i$$

(记住 $a_{ii}=0$), 即

$$a_{i+1,i} = -\frac{\sigma_i F_i \tau}{1 + \tau F_i}$$

让其他随机项 dX_j , $j=1, \dots, i-1$ 的系数相等, 可以得到

$$a_{ij} Z_i = (1 + \tau F_i) Z_{i+1} a_{i+1,j}$$

即

$$a_{i+1,j} = a_{ij} \text{ (当 } j < i \text{ 时)}$$

因此

$$a_{i+1,j} = -\frac{\sigma_j F_j \tau}{1 + \tau F_j} \text{ (当 } j < i \text{ 时)}$$

最后, 让 dt 项的系数相等, 可得

$$r Z_i = (1 + \tau F_i) r Z_{i+1} + \tau Z_{i+1} \mu_i F_i + \varpi_i F_i Z_{i+1} \sum_{j=1}^i a_{i+1,j} \rho_{ij}$$

根据 F_i 的定义, 含有 r 的项相互抵消, 可得

$$\mu_i = -\sigma_i \sum_{j=1}^i a_{i+1,j} \rho_{ij} = \sigma_i \sum_{j=1}^i \frac{\sigma_j F_j \tau \rho_{ij}}{1 + \tau F_j}$$

至此推导就完成了。

F_i 的随机微分方程可以写成

$$dF_i = \left(\sum_{j=1}^i \frac{\sigma_j F_j \tau \rho_{ij}}{1 + \tau F_j} \right) \sigma_i F_i dt + \sigma_i F_i dX_i \quad (37-9)$$

式 (37-9) 是 HJM 方程式 (37-6) 的离散 BGM 版本。^①

① 虽然使用的符号有细微差别, 在 HJM 中我们用不相关的 dX_i 来表示随机成分; 在这里对每个远期利率使用不同的 dX_i , 但它们之间是相关的。

假设我们可以测量远期利率的波动率 (σ_i) 和它们之间的相关系数 (ρ_{ij}), 那我们就找到了正确的风险中性漂移率。接下来都是我们熟悉的工作: 使用这些波动率、相关系数和漂移率进行蒙特卡罗模拟来为利率上限产品定价。在实践中, 可以从利率上限的市场价格中估计波动率函数。注意这是通过校准来确定时变函数, 而不是通过历史数据来估计参数。

37.17 模拟

我们可以将式 (37-9) 写成

$$d(\log(F_i)) = \left(\sigma_i \sum_{j=1}^i \frac{\sigma_j F_j \tau \rho_{ij}}{1 + \tau F_j} - \frac{1}{2} \sigma_i^2 \right) dt + \sigma_i dX$$

在进行模拟时我们通常将时间分成等长的小段, 然后假设所有的 F (以及 σ 和 ρ) 在每个时间段中是分段常数, 这样就可以求该表达式从一个时间段到下一个时间段之间的积分。剩下的模拟过程就很直接了。

目前尚未说明的是如何求现金流的现值。我们知道根据风险中性定价原理, 通过计算期望值来计算合约价值有两个要点, 即

- 模拟风险中性随机过程;
- 计算现金流的现值。

第 1 点我们已经完成了, 那第 2 点该如何进行?

37.18 为现金流贴现

在为现金流贴现前 (以及取平均和定价之前), 我们需要用模拟得到的变量即远期利率表示它们。该过程可能简单也可能很难。一些简单的金融工具本身就是用这些变量定义的。对更复杂的合约, 根据我们的奇异期权分类表, 其现金流可能具有更高的阶数。在 HJM 框架下, 我们用至该现金流到期为止的平均瞬时利率 r 来为其贴现。在 BGM 模型中我们是无法得到这种平均利率的。

在 BGM 模型中我们需要使用一个计息时间段到下一个计息时间段的贴现因子 (对每一条实现路径)。也就是说, 要将每个现金流贴现到今天需要通过至该现金流到期为止每一个计息时间段的贴现因子^①

① 注意这里指的是计息时间段而不是步长。步长指的是蒙特卡罗模拟的时间单位; 计息时间段指的是 T_{i-1} 和 T_i 之间的时间。

$$\frac{1}{1 + \tau F_i(T_i)}$$

一步一步完成。这是 HJM 中利用平均瞬时利率贴现的离散版本。事实上，如果对前面所有方程取极限 $\tau \rightarrow 0$ 就回到了 HJM 模型，例如其中的和式都会变成积分式。

37.19 总结

HJM 和 BGM 对整条远期利率曲线建模的方法非常强大。对于某些类型的合约来说，使用蒙特卡罗模拟的方法较容易。例如债券期权的定价就非常直接。另一方面，市场会自行决定债券期权等最基础的合约的价格，在第 32 章我们已经讨论过这点。只有更复杂的衍生品才需要模型。HJM/BGM 对它们是很有用的。

拓展阅读

- 使模型更严格的相关技术细节见 Heath, Jarrow 和 Morton (1992) 的论文。
- 对有限期限利率过程模型的更多细节见 Sandmann 和 Sondermann (1994), Brace, Gatarek 和 Musiela (1997) 以及 Jamshidian (1997)。



第 38 章

固定收益产品说明书

本章内容

- 选择区间债券
- 指数摊销利率互换

38.1 引言

下面我们将深入细致地考察两个特别有趣的固定收益合约。阅读了本书最后部分关于数值方法的章节后你就能完全看懂里面的 Visual Basic 程序了。

38.2 可选区间中期债券

图 38-1 是一份可选区间中期债券的说明书。普通的区间中期债券的回报取决于参考利率（通常是某个 LIBOR 利率）处于某事先指定的区间内的天数。在可选区间中期债券（Chooser Range Note, CRN）中，区间不是由合约事先规定的，而是由合约持有人在每一期开始自主选定。该说明书中的合约需要做 4 次选择，分别在每一期的开始。这些决定并不是那种简单的二选一（“我是否要执行”“我是否要付款”），比这要复杂得多。每期开始时持有者必须选择一个利率区间，以

区间的中点表示。因此有连续且无穷多的可能。

38.2.1 最优区间选择?

如果方法得当,最优区间的确定没有看上去那么复杂。为合约定价要从对冲者的角度出发,选择的区间应使合约价值尽可能大。要进行对冲的合约卖方面临风险中性利率和远期利率曲线的风险暴露;而合约买方会根据其对未来真实利率走向的判断来选择区间。因为远期利率包含“市场风险价格”的成分,而且真实利率很少出现跟远期利率曲线相同的斜率和曲度,所以合约买方选择的区间不大可能恰好就是使合约价值最大的区间。

与6个月期英镑LIBOR联接的2年期可选区间债券	
本债券的票息基于6个月期LIBOR落在某80基点区间内的天数。	
该区间在每一个计息期开始时由买方选择。	
发行日	2000年3月24日
到期日	2002年3月24日
发行价	100%
票息	$[6\text{个月期LIBOR} + 1.00\%] \times N/D$
N	6个月期LIBOR落在区间内的工作日天数
D	观察期的营业日天数
区间	在每个观察期开始前两天由买方确定
观察期	时段1: 2000年3月24日 ~ 2000年9月24日 时段2: 2000年9月24日 ~ 2001年3月24日 时段3: 2001年3月24日 ~ 2001年9月24日 时段4: 2001年9月24日 ~ 2002年3月24日
注: 该说明书既不代表购买或出售某证券或诸如期权、互换、远期合约和与场外衍生产品具有相似特征的结构票据等场外衍生产品的要约,也不是购买或出售证券或OTC衍生产品的宣传单。说明书中的内容不是特定交易条款的完整描述,其更改不受限制。	

图 38-1 可选区间中期债券说明书

38.2.2 定价

引入 M 作为所选区间的中点。要为合约定价,只需问合约价值是如何随 M 的改变而改变的。

因为回报主要取决于短期利率水平,所以或许可以采用单因子模型。这个合约有些特殊,它虽然内嵌了选择权,但还是既可以用偏微分方程/有限差分方法也可以用蒙特卡罗模拟定价。在第 24 章我们讨论过,当合约中包含选择权时通常都会选用前一种方法。因此我们既可以用瓦西塞克等经典的风险中性单因子模型,也可以用 HJM 或 BGM 方法。不管选择哪个模型,让我们先用 $V^f(r, M, t)$

表示 t 时刻开始的无选择区间中期债券的价值, r 为 t 时刻的瞬时利率, M 为区间的中点。[⊖]

我们先来为合约的第一阶段估值, 即 6 个月后会到期的部分。

选定 M 值并为具有相同特征的无选择的债券定价。然后改变 M 的取值 (并重复该过程)。最后得到的结果通常类似于图 38-2 所示。这就是函数 $V^f(r_0, M, t_0)$, 其中 r_0 是今天的瞬时利率, t_0 是今天的日期。

很明显, 有一个 M 的取值, 图中的 M^* , 让合约价值达到了最大值 V^* 。这就是合约第一阶段的合理售价。如果以低于该值的价格卖出, 那我们就面临着风险, 如果合约买方正好选择 M^* 作为区间中点, 我们就会遭受损失。然而, 按该值出售我们也只能在合约买方选择一个与 M^* 不同的值时才会盈利。记住, 因为会进行对冲, 所以我们是在风险中性世界里估值, 而持有人更关心真实利率的表现。

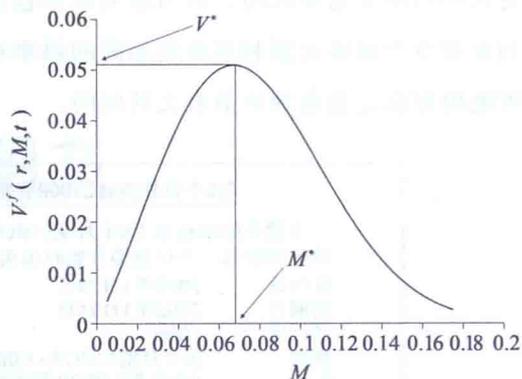


图 38-2 第一阶段的价值如何随着 M 取值的改变而改变

第二、第三和第四阶段的估值更复杂一些。我们可以为第一阶段定价是因为今天的 r 是已知的。要给后面的阶段估值, 我们必须想象在这些阶段开始时 would 面临不同的 r 水平。例如, 假如现在要为 6 个月后开始的第二阶段估值, 必须在不同的起始 r 值下为固定的区间债券定价, 就跟上一段引入中间值 M 的原理一样。这个 r 的函数就是微分方程或从现在到第二阶段开始这 6 个月的模拟的终值条件。

如果将后几个阶段开始的时间记为 t_1 、 t_2 和 t_3 , 则我们必须写出函数 $V^f(r, M, t_i)$ 。这就是无选择区间债券的价值。接下来我们取最大值

$$V(r, t_i) = \max_M (V^f(r, M, t_i))$$

并将其作为从 t_i 到当前时刻 t_0 的反推定价的终值条件。

38.2.3 买卖双方最优的差异

该合约要求持有人在存续期内做 4 次抉择。每一次抉择都涉及一个利率区间

[⊖] r 要么代表 HJM 中的短期利率, 要么代表 BGM 中的随机因子。

的中点的选择，备选可能为一个连续谱。

从第一幅图（见图 38-3）中，我们可以看到合约存续期开始时远期利率曲线的可能形状。这条曲线的形状通常是向上倾斜的，代表着对风险价格的调整。持有期越长则人们期望的回报就越高。

该图同样展示了短期利率一种可能的演变路径。该路径部分决定了最终回报。注意短期利率的路径并没有跟随远期利率曲线的脚步。显然它是随机的，但是通常它不会呈现出短端利率的快速增长。



第二幅图（见图 38-4）展示了价格最大化可能选择的区间。这些区间自然会依赖于远期利率曲线。（该图仅为示意。卖方“选择”的实际区间是由价格最大化得到的，还会依赖于利率的波动率。）

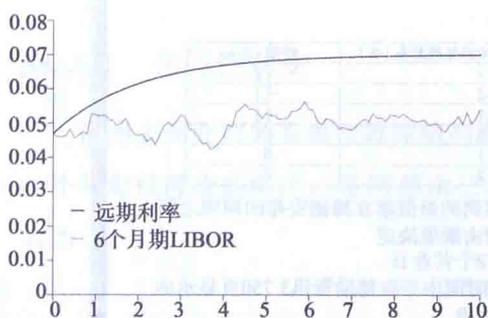


图 38-3 合约存续期开始时典型的远期利率曲线和存续期内典型的实际短期利率变化

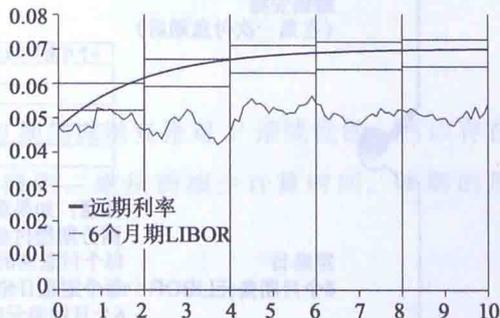


图 38-4 价格最大化选择的区间将取决于风险中性下的远期利率曲线（仅为示意图，选择还取决于曲线的波动率）

最后一幅图（见图 38-5）展示了由合约买方选择的区间。买方会在每一个阶段开始时做出一个决定。当然，他的选择将与当时的短期利率密切相关，并反映了他对未来的判断。

显然价格最大化选择和买方的最终选择之间会有显著的差别。我们的方法能很好地处理该问题，跟第 63 章中用于处理美式期权执行的效果一样好。当期权持有人的策略与价格最大化策略有

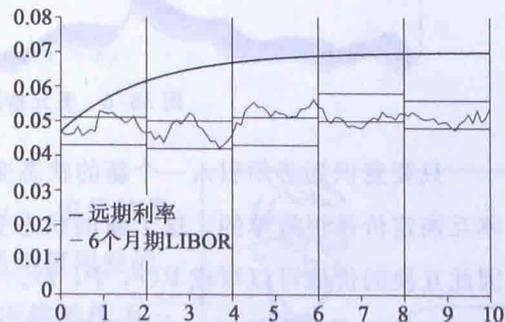


图 38-5 买方选择的区间更可能代表着对真实利率演化的猜测

差异时，期权卖方可以获得一笔意外之财。

38.3 指数摊销利率互换

图 38-6 是一份第 32 章讨论过的指数摊销利率互换的说明书。下面我们来看看该合约的数学推导和程序。

美元指数摊销互换															
对手方	× × × × 客户														
面值	5 000 万美元，可能随摊销安排而改变														
结算日	交易日后 2 天														
最大到期日	交易日后 5 年														
提前到期日	名义本金为 0 的任何定息日														
客户支付	6 个月期美元 LIBOR，半年支付一次，计息规则 A/360														
XXX 支付	每年 $x\%$ 美元，半年支付一次，计息规则 30/360														
指数利率	6 个月期美元 LIBOR														
基准利率	[]%														
摊销安排 (在第一次付息期后)	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>6 个月期美元 LIBOR 减基准利率 (%)</th> <th>摊销 (%)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>-3</td> <td>-[]</td> </tr> <tr> <td>-2</td> <td>-[]</td> </tr> <tr> <td>-1</td> <td>-[]</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>-[]</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>	6 个月期美元 LIBOR 减基准利率 (%)	摊销 (%)	-3	-[]	-2	-[]	-1	-[]	0	-[]	1	0	2	0
6 个月期美元 LIBOR 减基准利率 (%)	摊销 (%)														
-3	-[]														
-2	-[]														
-1	-[]														
0	-[]														
1	0														
2	0														
定息日	每个付息期的前 2 个营业日														
6 个月期美元 LIBOR	每个定息日伦敦时间中午在德励资讯 3 750 页显示的 6 个月期美元 LIBOR														
文本来源	ISDA														
适用法律	英国														
<p>注：该说明书既不代表购买或出售某证券或诸如期权、互换、远期合约和与场外衍生产品具有相似特征的结构票据等场外衍生品的要约，也不是购买或出售证券或 OTC 衍生产品的宣传单。说明书中的内容不是特定交易条款的完整描述，其更改不受限制。</p>															

图 38-6 美元指数摊销互换说明书

只要意识到必须引入一个新的状态变量，在之前建立的框架下为指数摊销利率互换定价是很简单的。这个新的状态变量就是本金的当前水平，用 P 来表示。因此互换的价值可以写成 $V(r, P, t)$ 。

变量 P 是非随机的：它是确定的并且在每一次重新设定后（在上面的例子中是每半年）跳跃到新的水平。因为 P 是分段常数，所以在单因子利率世界中互换

价值的控制偏微分方程就是

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\omega^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + (u - \lambda\omega) \frac{\partial V}{\partial r} - rV = 0$$

其中

$$dr = udt + \omega dX$$

而 λ 为利率风险的市场价格。当然，这里的 V 是三个变量 r 、 P 和 t 的函数。

在每一个重置日会同时发生两件事情：利息支付的交换和本金的摊销。如果我们用 t_i 表示重置日， r_f 表示固定利率，那么互换的价值会跳跃 $(r - r_f)P$ 。接下来，本金从 P 变成了 $g(r)P$ ，其中函数 $g(r)$ 代表摊销安排。因此我们有跳跃条件

$$V(r, P, t_i^-) = V(r, g(r)P, t_i^+) + (r - r_f)P$$

在合约到期时会有最后一次利息支付的交换，所以

$$V(r, P, T) = (r - r_f)P$$

38.3.1 相似性解法

因为上面介绍的简单指数摊销利率互换的摊销安排对 P 是线性的，所以存在一个相似性降维的解法，将问题由三维降到二维从而减少计算时间。该解的形式为

$$V(r, P, t) = PH(r, t)$$

函数 $H(r, t)$ 满足

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}\omega^2 \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + (u - \lambda\omega) \frac{\partial H}{\partial r} - rH = 0$$

$$H(r, t_i^-) = g(r)H(r, t_i^+) + r - r_f$$

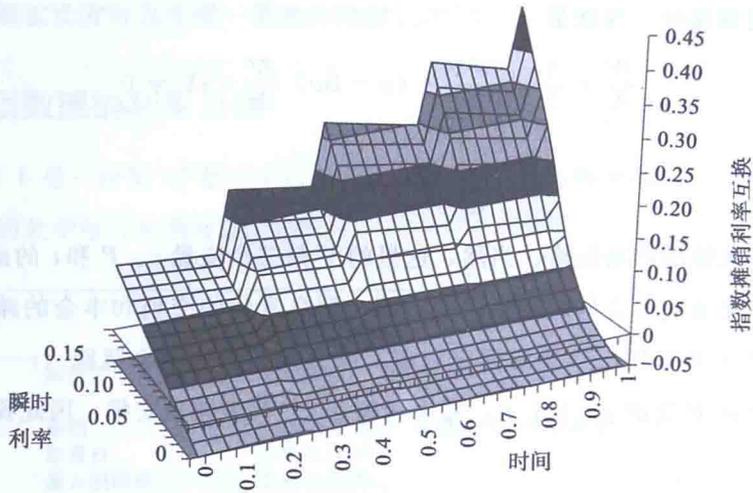
并且

$$H(r, T) = r - r_f$$

38.3.2 程序

下面的程序求出了相似性解 $H(r, t)$ 。定价结果展示在图 38-7 中。风险中性利率模型是均值回归的，且波动率为利率的线性函数。注意摊销安排被作为一个单独的函数写在了最后。



图 38-7 指数摊销利率互换的价值函数 $H(r, t)$

Function IARS3D(alpha, beta, vol, exproy, fixedrate, period, NRS, NTS)

ReDim r(0 To NRS) As Double

ReDim H(0 To NRS, 0 To NTS + 1) As Double

dt = exproy / NTS

dr = 3 * fixedrate / NRS

For i = 0 To NRS

r(i) = i * dr

H(i, 0) = r(i) - fixedrate

Next i

For k = 0 To NTS - 1

tim = k * dt

'引擎

For i = 1 To NRS - 1

Delta = (H(i + 1, k) - H(i - 1, k)) / 2 / dr

gamma = (H(i + 1, k) - 2 * H(i, k) + H(i - 1, k)) / dr / dr

Theta = -0.5 * vol * vol * r(i) * r(i) * gamma -
 (alpha - beta * r(i)) * Delta + r(i) * H(i, k) -

'债券定价方程

H(i, k + 1) = H(i, k) - dt * Theta

Next i

'边界条件

Slopey = (H(1, k) - H(0, k)) / dr

timederiv = -alpha * Slopey

H(0, k + 1) = H(0, k) - dt * timederiv

H(NRS, k + 1) = 2 * H(NRS - 1, k + 1) - H(NRS - 2, k + 1)

'跳跃条件

If Int(tim / period) < Int((tim + dt) / period) - 0.001 Then

For i = 0 To NRS

H(i, k + 1) = Amortizing_Schedule(r(i)) * H(i, k + 1) + r(i) -
 fixedrate

Next i

End If



```

Next k
IARS3D = H

End Function

Function Amortizing_Schedule(r)
Amortizing_Schedule = 1
If r < 0.1 Then Amortizing_Schedule = 10 * r
End Function

```

息支付额、利息、债券面值等。利率为固定，所有数据均来源于基金合同。在Excel中，我们使用Excel的“数据”菜单中的“数据”命令，进行Data操作，但不需要数据源。下一节我们介绍如何应用Excel，完成基金估值和基金净值的一个二维表格。下一节我们介绍如何应用Excel，完成基金估值和基金净值的一个二维表格。

第一套：信用基金产品的估值。信用基金产品属于固定收益类，但其估值相对复杂。信用基金产品的估值需要考虑信用风险、流动性风险等因素。信用基金产品的估值需要考虑信用风险、流动性风险等因素。信用基金产品的估值需要考虑信用风险、流动性风险等因素。

第二套：权益基金产品的估值。权益基金产品的估值需要考虑市场风险、流动性风险等因素。权益基金产品的估值需要考虑市场风险、流动性风险等因素。权益基金产品的估值需要考虑市场风险、流动性风险等因素。

第三套：货币市场基金的估值。货币市场基金的估值需要考虑流动性风险、信用风险等因素。货币市场基金的估值需要考虑流动性风险、信用风险等因素。货币市场基金的估值需要考虑流动性风险、信用风险等因素。

第四套：债券基金产品的估值。债券基金产品的估值需要考虑利率风险、信用风险等因素。债券基金产品的估值需要考虑利率风险、信用风险等因素。债券基金产品的估值需要考虑利率风险、信用风险等因素。

第五套：另类投资产品的估值。另类投资产品的估值需要考虑流动性风险、信用风险等因素。另类投资产品的估值需要考虑流动性风险、信用风险等因素。另类投资产品的估值需要考虑流动性风险、信用风险等因素。

第六套：衍生品产品的估值。衍生品产品的估值需要考虑流动性风险、信用风险等因素。衍生品产品的估值需要考虑流动性风险、信用风险等因素。衍生品产品的估值需要考虑流动性风险、信用风险等因素。

第四部分

信用风险

本部分解决风险、风险度量和风险管理问题。衍生品理论通常是基于布莱克-斯科尔斯世界，在该世界中，所有期权都可以进行 Delta 对冲，因而不再承担风险，所有这样的组合都赚取无风险利率。这只是更有趣的三维世界的一个二维横截面。我在这部分将阐述这个第三维度。

第 39 章：公司价值和违约风险 大多数企业都是为了扩张而借钱。但把钱借给他们是存在风险的。该企业有没有能力还钱？作为可违约合约理论的介绍，我们将考虑如何确定企业的价值。在这个过程中，我们将看到企业破产的可能性。

第 40 章：信用风险简介 当存在真实的违约风险时，对冲能起的作用很有限。当你怀疑发行人可能违约时，你应如何为债券定价？我将描述违约风险的常见模型，包括内生和外生违约以及信用评级的变化。信用风险这个主题非常重要，但从建模的角度看，它仍处于婴儿期。

第 41 章：信用衍生品 如果你持有可能会违约的债券，你可以购买保险以便在违约时得到赔付。这是最简单的信用衍生品。还有很多更复杂的结构，比如在信用评级改变时赔付。本章将讨论这些合约。

第 42 章：RiskMetrics 和 CreditMetrics 为了使风险度量更容易，并保证各银行之间的一致性，业界提出了很多方法。我在这里将介绍其中几种。一种是在正常市场条件下的风险度量以及企业价值的确定，另一种是在信用风险市场条件下的风险度量以及企业价值的确定。

第 43 章：CrashMetrics 本章介绍在市场崩盘的时候度量风险的方法。其中的思路 and 数学都很简单。

第 44 章：衍生品灾难案例 衍生品是天使还是魔鬼？如果用人不当……



第 39 章

公司价值和违约风险

本章内容

- 基于“公司价值”的违约模型
- 基于可测参数和变量的公司价值建模

39.1 引言

到目前为止，我们的研究都集中在现金流有保证的产品上。我们假设这些现金流、息票、回报以及赎回价值的来源或卖方具有完美的信用，因此这些收入是确定性的。通过交易所购买的期权通常被认为是没有违约风险的，因为交易所提供了担保，而且有保证金要求。

现实中，很多债券是没有这种保证的。也许它们是公司出于快速扩张的需求发行的。在这种情况下，发行公司可能在偿还完所有现金流之前就宣布破产了。或者，这些债券是由具有不按时偿还记录的政府发行的。场外市场交易的期权也可能具有很大的对手风险。正因为如此，在过去的十年内出现了大量的关于资本充足率（capital adequacy）要求的规定和规则，以确保银行在极端的市场状况下有所准备而不至于倒闭（见第 19 章关于风险价值（Value at Risk）的内容）。

在这一章中我们将讨论在有违约风险（risk of default）或信用风险（credit risk）

时的建模。对违约建模有两种主要的方法。一种对发行公司（国家）的价值建模。另一种对外生的违约风险建模。显然，第一种建模的方法更接近现实，所以更具有吸引力。这类模型的缺陷是参数难以度量，求解过程通常非常复杂。我将介绍这类模型中最常用的一个，然后介绍一个与之相似的，但是参数更容易度量的模型。

39.2 默顿模型：将股权看作公司资产的期权

默顿模型优美地展示了如何将公司股权看作标的为公司资产的看涨期权。他从假设公司资产 A 遵循的随机过程开始

$$dA = \mu A dt + \sigma A dX$$

显然，公司股权的价值等于资产减去负债

$$S = A - V$$

其中 S 代表股权价值（就是股票价格，为简单起见在这里我假设只有一股股票）， V 代表债务的价值。

在债务到期日

$$S(A, T) = \max(A - D, 0), \text{ 而 } V(A, T) = \min(D, A)$$

D 代表在到期日 T 所需支付的债务总额。

现在我们可以应用布莱克 - 斯科尔斯期权模型的思路，即 Delta 对冲和无套利。构建一个由公司债务和 Δ 份股票空头组成的组合

$$\Pi = V - \Delta S$$

我们用股票来对冲该债务。（不必担心如何买卖一股股票的一部分，在实际中发行的股票数量以百万计。）

组合价值的变动为

$$d\Pi = dV - \Delta dS$$

运用伊藤引理

$$\begin{aligned} d\Pi = & \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 A^2 \frac{\partial^2 V}{\partial A^2} - \Delta \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{1}{2} \Delta \sigma^2 A^2 \frac{\partial^2 S}{\partial A^2} \right) dt \\ & + \left(\frac{\partial V}{\partial A} - \Delta \frac{\partial S}{\partial A} \right) dA \end{aligned}$$

现在选择

$$\Delta = \frac{\partial V / \partial A}{\partial S / \partial A}$$

来消除风险，并令收益 $d\Pi$ 等于无风险收益 $r\Pi dt$ ……

对于当前债务的价值 V ，最后得到的方程为

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 A^2 \frac{\partial^2 V}{\partial A^2} + rA \frac{\partial V}{\partial A} - rA = 0$$

其终值条件为

$$V(A, T) = \min(D, A)$$

公司股权价值 S 的偏微分方程与之完全相同，但终值条件变为

$$S(A, T) = \max(A - D, 0)$$

明白了吗？这个关于 S 的问题正是一个看涨期权的问题，但现在求解的对象是 S 而不是期权价值，标的资产是公司资产 A ，执行价格是到期的债务总额 D 。股权价值的解恰好就是看涨期权价格的解。

39.2.1 到期前违约

如果在公司债权到期之前公司资产价值低于某临界水平，债务人有可能强制清算公司资产。该临界水平可能是时变的

$$A = K(t)$$

这会在 $A=K(t)$ 处引入一个边界条件，使该问题跟障碍期权的问题非常相似。在障碍点（可能是变化的），无论资产价值为多少，债务价值都等于资产价值

$$V(K(t), t) = \min(K(t), D)$$

39.2.2 违约概率

在到期前违约的概率 $P(A, t)$ 等于公司资产价值在到期前触及临界水平 $K(t)$ 的概率，它满足

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 A^2 \frac{\partial^2 P}{\partial A^2} + \mu A \frac{\partial P}{\partial A} = 0$$

其边界条件和终值条件分别为

$$P(K(t), t) = 1 \text{ 和 } P(A, T) = 0$$

39.2.3 随机利率

我们可以通过引入利率模型来使得模型更加现实。毕竟，如果没有信用风险，我们就回到了更简单的为无风险债券定价的世界。我不选择确定的利率模

型，只将其写成

$$dr = u(r, t)dt + w(r, t)dX_1$$

我们仍然假设

$$dA = \mu A dt + \sigma A dX_2$$

两个随机游走之间的相关系数为 ρ 。

现在债务的价值 V 是 3 个变量的函数；我们将其写成 $V(A, r, t)$ 。我们在前面的章节中介绍过在无违约风险时如何推导债券价值服从的方程。推导结果是一个关于 r 和 t 的扩散方程。 V 的方程与之相似，但 V 还依赖于 A ，所以要增加关于 A 的偏导。

为了找到 V 所遵循的方程，我们构建含有风险债券的组合，用股票和无风险零息债来进行对冲，零息债的价格为 $Z(r, t)$ 。该组合为

$$\Pi = V(A, r, t) - \Delta S - \Delta' Z(r, t)$$

由此出发，我们计算 $d\Pi$ 的表达式，选择合适的 Δ 和 Δ' 以消除风险，然后令组合的收益等于无风险收益。过程大家已经很熟悉了，所以我们直接给出结果

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \rho\sigma wA \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial A} + \frac{1}{2}\sigma^2 A^2 \frac{\partial^2 V}{\partial A^2} + (u - \lambda w) \frac{\partial V}{\partial r} + rA \frac{\partial V}{\partial A} - rV = 0$$

其中 λ 仍然表示利率风险价格。

方程的终值条件为

$$V(A, T) = \min(D, A)$$

代表了到期时的债务偿付。

对该模型最主要的批评是变量与参数难以度量。但仍然可以将它作为一个象征性模型来用，用来估计同一公司不同类型债务的相对价值，或相同信用等级的不同公司。

39.3 使用可测的参数和变量建模

本节我将介绍一个输入变量容易度量的模型。我们将焦点放在确定性利率下的债券定价；该模型很容易扩展为随机利率下的模型，但复杂程度和计算时间都会有所提高。

我们定价的债券来自一个商业模式简单的公司：该公司卖出产品，支付成本，并将所有



盈利都存入银行。我们建模的核心变量是公司的收入。可以将收入想象为公司卖出产品的毛收入。净收入或盈利将等于收入减去成本。假设公司年化的总收入 E 是随机的

$$dE = \mu E dt + \sigma E dX$$

(当然,我们不一定得选择对数正态模型,但是这是一个较为传统的起点。)

假设公司每年的固定成本为 E^* , 可变成本为 kE 。盈利 $E - E^* - kE = (1 - k)E - E^*$ 被存入银行赚取固定利率 r 。如果我们定义 C 为银行账户的资金额,那么其表达式为

$$C = \int_0^t ((1 - k)E(\tau) - E^*) e^{r(t-\tau)} d\tau$$

该式子代表收入和银行利息的积累。对其取微分就得到了 C 所遵循的随机微分方程

$$dC = ((1 - k)E - E^* + rC) dt$$

我之所以选择对公司的营业收入进行建模而不是对公司的价值,是因为前者的度量要容易得多,也许只需要查看一下公司的账目就可以了。我们将看到公司价值是如何成为模型的一个输出。

在任何时候,公司的命运都取决于营业收入和银行账户余额,也就是 E 和 C 。公司的所有者希望 $(1 - k)E > E^*$, 但是即使该条件不满足(例如在公司刚开始运作时),营业收入的增长也会让公司慢慢进入盈利。

假设公司的债务为 D , 需要在 T 时刻偿还。我们做一个简单的假设,如果在 T 时刻公司的银行账户余额超过 D , 公司会足额偿还债务; 如果银行账户余额小于 D , 将用所有余额进行偿付; 如果银行账户余额为负, 偿付为 0。也就是说债务偿付为

$$\max(\min(C, D), 0)$$

如果引入部分偿付和再融资, 该表达式会变得更加复杂。

债务的价值将是 E 、 C 和 t 的函数。引入表达式 $V(E, C, t)$ 作为式 (39-1) 的期望值的现值。该函数满足偏微分方程

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 E^2 \frac{\partial^2 V}{\partial E^2} + \mu E \frac{\partial V}{\partial E} + ((1 - k)E - E^* + rC) \frac{\partial V}{\partial C} - rV = 0$$

其终值条件为

$$V(E, C, T) = \max(\min(C, D), 0)$$

在图 39-1 中我们可以看到根据模型计算的债务价值的图形，这里假设公司在 2 年后需要偿还 10 万美元的债务，无风险利率为 5%。公司每年需要花费 3 万美元的固定成本和 7% 的可变成本。营业收入的漂移率为 10%，波动率为 25%。可以看到，当 C 和 E 都很大时，债务的价值趋向于无风险零息债的价值。图 39-2 显示了该债务的等价收益率，其定义为

$$-\frac{1}{2} \log \left(\frac{V}{100\,000} \right)$$

前面有系数 $1/2$ 是因为这是一个两年期的贷款。从中减去无风险利率 5%，你就可以得到信用利差。

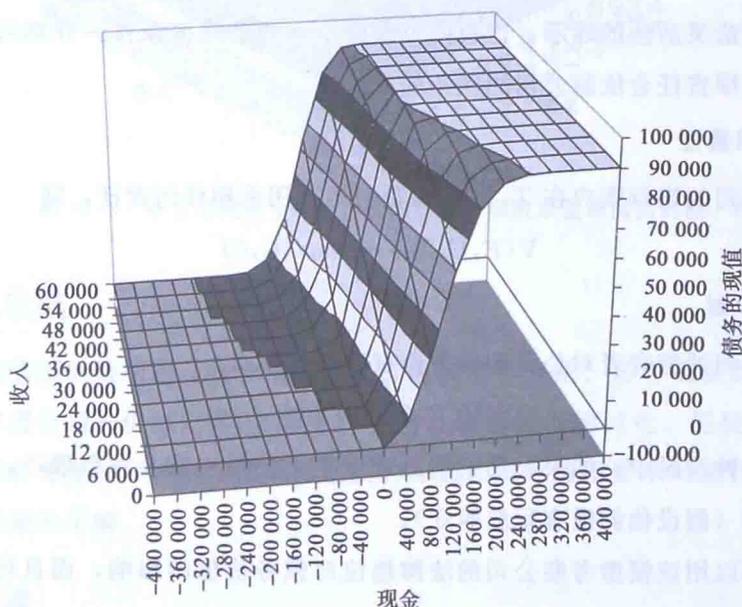


图 39-1 有限责任公司债务价值跟年收入和银行账户余额的函数关系

从这个例子来看该模型在为有信用风险的债券定价时非常有用：债券价值 $V(E, C, t)$ 就是由今天的 E 、 C 和 t 的值决定的。而且，对模型稍做调整就可以用于营业流程更复杂的公司。一个可能是假设当公司出现亏空时会马上倒闭。要对此建模，只要引入一个边界条件即可

$$V(E, 0, t) = 0$$

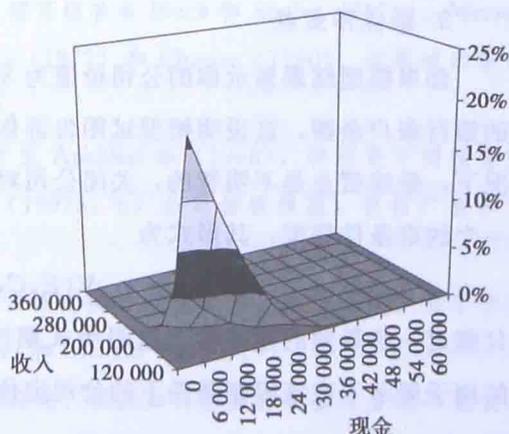


图 39-2 有效收益率

39.4 计算公司价值

通过改变终值条件和边界条件，很容易使用上述模型来计算公司价值或考察不同的经营策略对公司价值产生的影响。举例来说，假设公司价值为未来某个时间点 T_0 公司银行账户的期望余额的现值。如果我们要估计无穷多个现金流加总的现值，而现金流的增长速度超过了利率，通常会做这样的有限时间范围假设。在这种情况下，公司价值 $V(E, C, t)$ 满足

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 E^2 \frac{\partial^2 V}{\partial E^2} + \mu E \frac{\partial V}{\partial E} + ((1-K)E - E^* + rC) \frac{\partial V}{\partial C} - rV = 0$$

作为对该方法灵活性的展示，让我们考虑两个不同的终值条件，分别用于有限责任公司和无限责任合伙制公司的债务的定价。

1. 有限责任

如果公司的银行账户在 T_0 时刻为负时也不用承担任何责任，则

$$V(E, C, T_0) = \max(C, 0)$$

2. 合伙制

如果公司的拥有者对公司的债务负有责任，那么

$$V(E, C, T_0) = C$$

在前一种情况中，如果公司到期出现亏空，公司主管会宣布破产，并且不用对债务负责（假设他们没有玩忽职守）。

不仅可以用该模型考察公司的法律地位对债务价值的影响，而且可以考察不同营业流程的影响。

3. 最佳停业点

如果模型结果显示你的公司价值为 300 万美元，但是现在你拥有 500 万美元的银行账户余额，这说明模型试图告诉你一些事情：萧条就在转角处。在这种情况下，继续营业是不明智的，关闭公司对你更有好处。停业决策最优化可以通过一个约束条件完成，其形式为

$$V(E, C, t) \geq C$$

且满足一阶导数的连续性。这跟美式期权问题一样，原理是类似的。图 39-3 中的例子展示了在该限制条件下的公司定价问题。

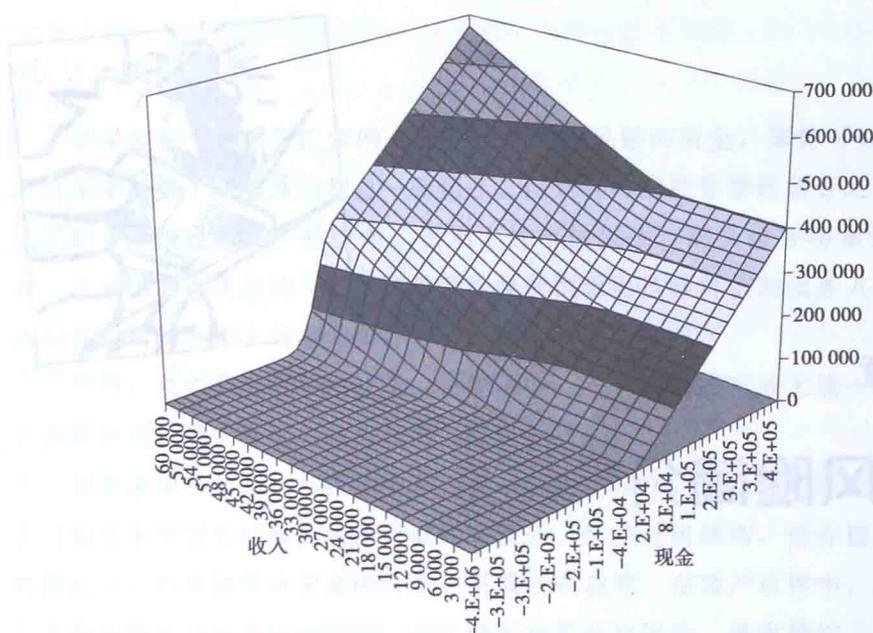


图 39-3 存在最优停业的公司价值计算。参数取值和前面的图一样

39.5 总结

通过信用风险问题，我介绍了公司价值的估计方法。还有很多其他的原因让我们想知道公司的价值，第 73 章中将会对此做更深入的讨论。但接下来在第 40 章，我们将考察另一种对信用风险建模的方法，该方法不要求对发行债券的公司有任何详细的了解。

拓展阅读

- 将公司负债视为公司资产的期权的处理可以参考 Black 和 Sholes (1973)、Merton (1974)、Black 和 Cox (1976)、Geske (1977) 和 Chance (1990)。该领域的最新成果见 Longstaff 和 Schwartz (1994)。
- 关于公司和债务估值模型的更多细节见 Apabhai 等 (1998)，特别是不同经营策略下的终值和边界条件。Epstein 等 (1997a, b) 公司估值模型，包括广告和市场调查的影响。
- Dixit 和 Pindyck (1994) 是关于公司价值建模的经典之作，值得一读。关于非技术性观点，可以参考 Copeland, Koller 和 Murrin (1990)。
- 对公司估值模型在公司并购问题上的应用，以及如何用其分析公司重组和税收状态的相关建议见 Kim (1995)。



第 40 章

信用风险简介

本章内容

- 瞬时和外生违约风险模型
- 随机违约风险和隐含违约风险
- 信用评级
- 如何对信用等级的变化建模
- 如何对可转债的违约风险建模

40.1 引言

在上一章中我介绍了一些通过对债券发行公司的信用状况建模来考察违约的方法。如果你可以获得所有的数据，这些方法是非常好的。一个更近出现的方法是将违约当成一个完全外生的事件来建模，比如说令之取决于投硬币的结果或者是轮盘赌中会否出现零，而跟公司或者国家的表现完全没有关系。典型的做法是从风险债券的价格中推断市场对于违约概率的看法。我不太热衷于该方法，但是它非常流行。

本章稍后我将介绍标普和穆迪等机构提供的信用评级服务。这些评级提供了一个对公司相对信用度的公开的估计。

40.2 风险债券

如果你有一个想要扩张的企业，但是缺乏足够的资金，那你可以借入资金，并在未来的某个时刻连同利息一起偿还。但是有可能在你偿还债务之前公司就陷入了财务困难或者破产的境地。如果上述事件发生，那么债务将永远不会被偿还。正是因为存在违约风险，跟借款给像美国政府这样可信的债务人相比，债权人对你要求的利率会高出许多。

当然，真实情况会更加复杂。在实际中，不只存在或有或无这一种情况。我们需要面对的是债券优先结构和部分偿还等概念。

通常来说，公司发行的债券都具有一个法定排序，用以决定在公司破产或者无力偿还事件发生时哪些债券会被优先偿还。优先等级越高，债券被偿还的可能性就越大，债券就具有更高的价值和更低的收益率。在破产事件中，对于哪些债权人应该得到偿还往往会进行一场长期而艰苦的拉锯战。通常债权人会收回他们应得款项的一部分，即使是在几年以后。那么问题就变成了还多少和等多久。另外，用其他的风险债券来还债也是有可能的；就像是债务的重新融资。比如说在无法按原定时间还债时，债务人可能会发行新的债券，赋予原债券持有人在更远的未来得到偿付的权利。

图 40-1 显示了一些风险债券的收益率和久期之间的关系，久期由第 13 章的方法计算得到。图中的债券按照预估的风险程度排序。我们将在后面讨论这些债券等级符号的具体含义，在这里你只需要知道 Ba3 被认为比 Caa1 风险更小，这表现在前者的收益率和无风险收益率曲线之差更小。

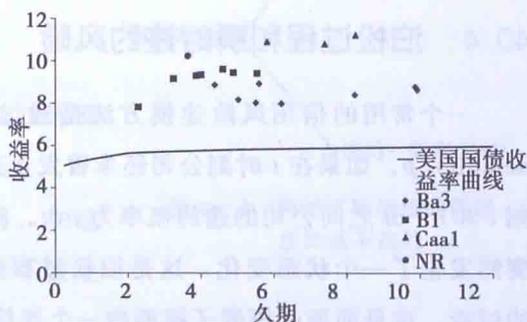


图 40-1 一些风险债券的收益率和久期的关系

本章中我们要考察的问题是如何

对违约风险进行建模，并依此计算风险债券的公允价值。反过来，如果我们知道风险债券的价值，能从中解读出违约概率的有关信息吗？

40.3 对违约风险进行建模

我们已经介绍或者将要介绍的模型可以分为两类，一类认为违约概率取决于

发行公司的表现，另一类认为违约概率是外生的。前一种更有吸引力，因为它显然更接近现实。不好的一面是这类模型更难求解，模型的参数也难以测量。

瞬时违约风险模型使用起来很简单，因此成为最流行的一类信用风险模型。在最简单的形式中，违约发生的时间是完全外生的。比如说我们每月掷一次骰子，如



果掷出 1 点企业就会违约。这个例子阐明了违约的外生性以及随机性。我们通常会选择泊松过程来描述违约时间。稍后可以看到，当泊松过程的强度是常数时（就像掷骰子的例子），风险债券的定价结果相当于在债券收益率上增加一个固定的溢价。我们还将介绍强度本身是随机变量的模型。

在进一步建模中我们还会考虑债券的重新评级。标普、穆迪等机构会根据它们对债券违约风险的估计来对债券进行分级。一个债券可能在刚发行时具有很高的评级，但由于发行公司的表现不佳而被重新评级。这样的重新评级对于隐含违约风险和债券价格具有重要的影响。我会介绍一个简单的风险债券重新评级模型。



40.4 泊松过程和瞬时违约风险

一个常用的信用风险建模方法是通过瞬时违约风险（instantaneous risk of default） p 。如果在 t 时刻公司还未曾发生违约，而瞬时违约风险为 p ，那么在时刻 t 和 $t+dt$ 之间公司的违约概率为 pdt 。在一段时间内没有任何事情发生，然后突然发生了一个状态变化，这是泊松过程的一个例子。第 57 章将对此进行详细的讨论。这是前面的掷骰子模型的一个连续时间版本。

我们先来看看最简单的 p 为常数的例子。在这种情况下，我们可以很容易地得到时刻 T 之前的违约风险。具体过程如下。

令 $P(t; T)$ 表示公司在到 t 时刻为止还未曾发生违约的条件下，在 T 时刻之前也不会违约的概率。公司在稍后的 t' 时刻和 $t'+dt$ 时刻之间发生违约的概率等于 pdt 乘以公司到 t' 为止都没有发生违约的概率。即

$$P(t' + dt', T) - P(t', T) = pdtP(t', T)$$

将上式展开，用于考察极小时间步长的结果，可以得到一个常微分方程。该

方程代表了所求概率的变化率

$$\frac{\partial P}{\partial t'} = pP(t'; T)$$

如果公司一开始没有处于违约状态, 那么 $P(T; T) = 1$ 。该微分方程问题的解为

$$e^{-p(T-t)}$$

因此, 在 T 时刻支付 1 美元的零息票债券的价值可以用期望现金流的现值来建模。其结果为

$$e^{-p(T-t)} Z \quad (40-1)$$

其中 Z 是和风险债券具有相同到期期限的无风险零息债券的价值。需要注意的是这里没有考虑承担风险的价值。该债券的到期收益率由下式给出

$$-\frac{\log(e^{-p(T-t)} Z)}{T-t} = -\frac{\log Z}{T-t} + p$$

因此, 违约风险对收益率的影响就是增加了一个大小为 p 的利差。在这个简单的模型中, 此利差在所有的到期日都是常数。

现在我们将这些应用到包括风险债券在内的衍生品上。假设瞬时利率是随机的。简单起见, 假设瞬时利率和泊松过程的扩散变化之间没有相关性。

构建一个“对冲”组合

$$\Pi = V(r, p, t) - \Delta Z(r, t)$$

考虑在单位时间步长下其价值会如何变化。图 40-2 展示了下面要进行的分析。

有 $(1 - p dt)$ 的概率债券不违约。在这种情况下, 组合价值在单位时间步长下发生的变化为

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \omega^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right) dt + \frac{\partial V}{\partial r} dr - \Delta \left(\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \omega^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} \right) dt + \frac{\partial Z}{\partial r} dr \right) \quad (40-2)$$

选择合适的 Δ 来消除有风险的 dr 项。

另一方面, 如果债券违约 (概率为 $p dt$), 此时组合价值的变化为

$$d\Pi = -V + O(dt^{1/2}) \quad (40-3)$$

这是由于风险债券导致的突然损失; 其他项与之相比都非常小。

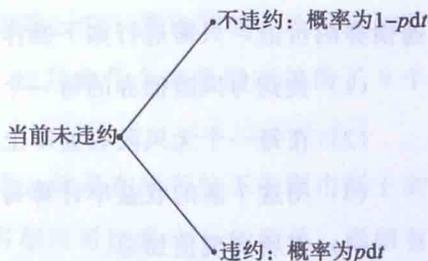


图 40-2 两种可能情形的图解: 违约或不违约

求期望并运用无风险债券的债券定价公式，可以发现风险债券的价值满足

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\omega^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + (u - \lambda\omega) \frac{\partial V}{\partial r} - (r + p)V = 0 \quad (40-4)$$

可以看到利差被添加到了贴现项中。

组合只对冲了利率的变动（在假设风险市场价格已知的情况下，这是一个很严格的假设），而没有对冲违约事件。稍后我们再来分析这个问题。



这个模型是瞬时违约风险最基础的模型。它给出了无风险债券和风险债券的一个简单的关系。该模型中只有 p 这一个需要估计的新参数。

为了考察该模型是否能捕捉现实的市场预期，我们来看一看布雷迪债券的估值。我们来考察拉丁美洲平价债券的市场价格，对该类债券的完整描述见本章后面的内容。在这里我们只需要知道这些债券的利息支付和最后的本金返还都是以美元计价的。如果上述将 p 设为常数的模型是可以描述市场预期的好模型，那我们应该会发现美国利率和布雷迪债券价值之间存在非常简单的关系。要得到布雷迪债券的价值，只需进行如下操作：

- (1) 找到与风险债券的每一个现金流的期限对应的无风险收益率；
- (2) 在每一个无风险收益率上都加一个常数利差 p ；
- (3) 用这个新的收益率计算每一个现金流的现值；
- (4) 将所有现值加总。

反过来，可以用相同的过程从布雷迪债券的市场价格中提取 p 的值。该值被称为**隐含违约风险** (implied risk of default)。图 40-3 显示了在 p 为常数的假设下利用上述过程得到的阿根廷、巴西、墨西哥、委内瑞拉平价债券的隐含违约风险。

在这个简单的模型中我们假设瞬时违约风险在时间上是常数（每个国家有所不同）。但是从图 40-3 中可以看到，如果我们相信布雷迪债券的市场价格，那么该假设是错误的：市场价格不支持 p 为常数的假设。这就是稍后要介绍的随机违约风险模型的动机。但如果假设图形在某种意义上代表了市场的一些观点（实际中也会使用常数 p 模型），那么在进一步分析前我们可以从图中得出一些结论。



图 40-3 在 p 为常数的假设下，阿根廷、巴西、墨西哥、委内瑞拉平价债券的隐含违约风险

图中第一点需要注意的是委内瑞拉的隐含风险，它一直比其他 3 个国家的更高。委内瑞拉的风险在 1994 年 7 月达到峰值，比其他几个南美国家提前了 9 个月，但对其他的国家没什么影响。

接下来需要注意的一点，也是最重要的一点，就是在所有拉丁美洲市场上的“龙舌兰效应”。龙舌兰危机开始于 1994 年 12 月墨西哥比索 50% 的贬值。紧跟着各国市场相继暴跌。可以看到在 1994 年 12 月之前墨西哥和阿根廷的违约风险的差额基本保持不变，而巴西和阿根廷之间的差额在不断缩小。在 1995 年第 1 季度，龙舌兰危机的后果表现了出来，在南美各国产生了连锁反应。到 1995 年 4 月，除委内瑞拉以外所有国家的违约风险都达到了峰值；但是到 1996 年年末，4 个国家的违约风险几乎都回到了龙舌兰危机前的水平。此时委内瑞拉的违约风险已经下降到跟其他国家相当的水平。

关于对冲的一个注解

在上面我们没有对违约事件进行对冲。有时候这是可以做到的（从某种程度上说），如果可以用在相同时间违约的另一个债券来对冲。可以预期这样做会引

入一个违约风险的市场价格项，这在后面我们会看到。但通常来说风险债券的数量太少，要对冲违约风险是做不到的。在这种情况下，考察期望回报并对残留的风险进行某种衡量可能是更好的选择，正如我们将在第 59 章所做的那样。因为知道在违约风险世界中完美对冲基本无法做到，所以目前我们还是用在现实中求期望的方式定价。



40.5 时变强度和违约的期限结构

假设一家公司发行不同到期日的风险债券。我们可以从这些债券的市场价格中推断出市场对违约风险将如何随时间变化的观点。为了使问题尽可能简单，让我们假设公司只发行零息票债券。当其中一个债券发生违约时，其他所有未偿付的债券都将违约，而且回收率为零。

如果违约风险 $p(t)$ 是时变的，而且跟即期利率不相关，那么在 T 时刻支付 1 美元的风险债券的真实期望价值为

$$Ze^{-\int_t^T p(\tau) d(\tau)}$$

如果风险债券的市场价值是 Z^* ，那么我们可以写出

$$\int_t^T p(\tau) d(\tau) = \log\left(\frac{Z}{Z^*}\right)$$

上式对 T 求导，就可以得到在当前时刻 t ，市场对 T 时刻的违约强度 (hazard rate) 或违约风险的看法。一个可能的违约强度结构如图 40-4 所示。图中显示在一开始违约的可能性很小，接下来上升到一个最高点然后下降。公司被预计至少有一小段时期会麻烦缠身，从长期来看要么熬不过去倒闭了，要么会变得非常成功。如果曲线下面的区域面积有限，那么该公司有一个有限的概率永远不会破产。

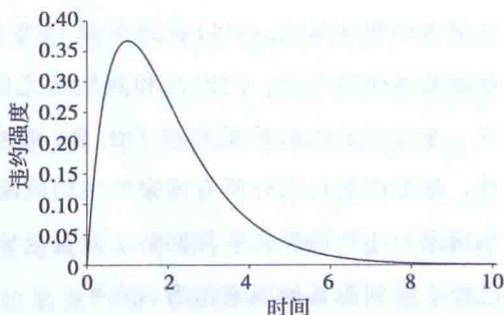


图 40-4 时变违约强度的一个可能结构

40.6 随机违约风险

为了“改进”模型，使其与市场价格一致，我们现在介绍瞬时违约概率本身也随机的模型。假设其随机过程为

$$dp = \gamma(r, p, t)dt + \delta(r, p, t)dX_1$$

利率过程仍然为

$$dr = u(r, t)dt + w(r, t)dX_2$$

认为违约风险有一定的利率依赖性合理的，但反过来就不合理。

为了给有风险零息债券定价，我们用一份价值为 $V(r, p, t)$ （待定价）的风险债券多头和 Δ 份价格为 $Z(r, t)$ （满足前面的债券定价公式）的无风险债券空头构成一个组合

$$\Pi = V(r, p, t) - \Delta Z(r, t)$$

在接下来的一个时间步长中债券要么违约要么不违约。违约的概率为 pdt 。我们必须讨论这两种情况：在下一个时间步长中违约和不违约。就像前面的两个模型一样，我们通过求期望来得到风险债券价值的方程。

首先，假设债券没有违约，其概率为 $(1 - pdt)$ 。在这种情况下，在一个时间步长中的组合价值变化为

$$\begin{aligned} d\Pi = & \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \rho w \delta \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial p} + \frac{1}{2}\delta^2 \frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right) dt + \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial p} dp \\ & - \Delta \left(\left(\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} \right) dt + \frac{\partial Z}{\partial r} dr \right) \end{aligned}$$

其中 ρ 代表 dX_1 和 dX_2 之间的相关系数。选择 Δ 去消除风险项 dr 。

另一方面，假设债券违约，其概率为 pdt 。此时组合价值的变动为

$$d\Pi = -V + O(dt^{1/2})$$

这是风险债券的突然损失造成的；其他项与之相比都很小。我们可以在这里引入回收率，下一节将对此进行讨论。在这里违约意味着没有任何回报。

接下来求期望并利用无风险债券的定价方程，可以发现风险债券的价值满足

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \rho w \delta \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial p} + \frac{1}{2}\delta^2 \frac{\partial^2 V}{\partial p^2} + (u - \lambda w) \frac{\partial V}{\partial r} \\ & + \gamma \frac{\partial V}{\partial p} - (r + p)V = 0 \end{aligned} \quad (40-5)$$

如果该债券为本金为 1 美元的零息债券，则方程的终值条件为

$$V(r, p, T) = 1$$

式(40-5)再次展现了即期利率 r 和违约强度 p 之间的相似性。方程对这两个变量是高度对称的, 唯一的不同是两个变量各自模型的选择。特别是最后一项, 既包含了用 r 的贴现, 也包含了用 p 的贴现。这两个变量在信用风险方程中扮演了类似的角色。

作为对结果的检查, 我们重新回到 p 为常数的简单情形。该情形相当于新的框架下 $\gamma = \delta = 0$ 的情况。很容易看出此时式(40-5)的解为

$$e^{-p(T-t)} Z(r, t)$$

跟前面得到的解一样。

如果 γ 和 δ 都独立于 r , 并且相关系数 ρ 为零, 那么我们可以推导出

$$V(r, p, t) = Z(r, t) H(p, t)$$

其中 H 满足

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2} \delta^2 \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} + \gamma \frac{\partial H}{\partial p} - p H = 0$$

以及

$$H(p, T) = 1$$

在这个特殊但重要的情形下, 可以将违约风险从债券定价中分离出来。

40.7 正的回收率

在违约发生时通常能得到部分的偿付, 不会损失全部的钱。表 40-1 是穆迪公司根据历史数据制作的, 显示了不同优先级债券的回收率的均值和标准差。这些数字凸显了一个事实: 回收率本身是非常不确定的。如何对正的回收率建模呢?

假设在违约发生时能得到数额为 Q 的偿付。这会改变偏微分方程。为了看清楚这点, 让我们重新回到式(40-4)的推导。如果没有违约, 我们得到的仍然是式(40-2)。但如果发生违约, 式(40-3)就变成了

$$d\Pi = -V + Q + O(dt^{1/2})$$

我们失去了债券但是得到了 Q 。求期望的结果为

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \omega^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \rho \omega \delta \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial p} + \frac{1}{2} \delta^2 \frac{\partial^2 V}{\partial p^2} + (u - \lambda \omega) \frac{\partial V}{\partial r} + \gamma \frac{\partial V}{\partial p} - (r + p)V + pQ = 0$$

现在你面临着一个非常艰难的任务: 估计 Q 或者将它作为另一个随机变量建模。

它甚至可以被设定为 V 的一定比例。最后这种方法可能是最明智的。

表 40-1 回收率

等 级	平 均 值	标 准 差
优先有担保	53.80	26.86
优先无担保	51.13	25.45
优先次级	38.52	23.81
次级	32.74	20.18
初级次级	17.09	10.90

资料来源：穆迪公司。

40.8 特例和收益率曲线拟合

在第 30 章中我们看到，在某些瞬时利率模型下，可以得到债券价格的解析解，比如瓦西塞克模型、CIR 模型和具有 4 个时变参数的一般仿射模型。如果仔细选择 $u-\lambda w$ 、 w 、 γ 、 δ 和 ρ 的函数形式，可以找到比前面的两因子扩散方程更简单的风险债券定价方程。从第 30 章的分析中可以知道，必须选择 $u-\lambda w$ 和 w^2 作为 r 的线性函数。同样地，要将 γ 和 δ^2 分别设定为 r 和 ρ 的线性函数才能得到式 (40-5) 的简化版。相关系数的形式选择要复杂得多，所以我们令它等于零。

这样设定两个随机微分方程中的函数后，可以发现式 (40-5) 在终值条件为 $V(r, \rho, T)=1$ 时的解为

$$V = \exp(A(t; T) - B(t; T)r - C(t; T)\rho)$$

其中 A 、 B 、 C 都满足非线性一阶常微分方程。我将其推导过程作为练习留给读者。这些方程在有些情况下能得出解析解，通常是在特定的函数形式下，其他时候需要用数值方法求解。当然其求解要比前面的两因子扩散方程更快。

在第 31 章中我们详细讨论过，只要允许瞬时利率模型具有某些简单的时间依赖，就有一些自由度来拟合收益率曲线。其原理在这里同样适用。在实际应用中这可能意味着我们会使用瞬时利率波动率为常数的扩展瓦西塞克模型。相似地，如果违约强度模型也具有时变性质，并且模型形式比较容易处理，就可以拟合出违约强度的期限结构。

40.9 案例分析：阿根廷平价债券

美国前财政部长尼古拉斯·布雷迪 (Nicholas Brady) 在 1989 年提出了布雷迪计划。该计划打算将商业银行贷款重组为可交易的固定收益证券。债权银行需

要降低该债务的利率或减少本金，作为交换，债务国承诺将做出宏观经济调整。大部分布雷迪债券都是以美元计价的 10 年期以上的固息债或浮息债。在本书写作时很多国家已经开始买回布雷迪债券了。想得到更实时的信息，可以查阅 www.brady.net 网站。

以美元计价的阿根廷平价债券的说明书如图 40-5 所示。

阿根廷共和国平价债券	
息票递增，2023年3月31日到期	
债务人	阿根廷共和国
担保人	无
形式	注册债券
发行量	127亿美元
面额	25万美元
货币	美元，德国马克
发行日	1993年3月31日
到期日	2003年3月31日
息票率	半年支付一次，日期计算规则30/360
	第1年：4%
	第2年：4.25%
	第3年：5%
	第4年：5.25%
	第5年：5.5%
	第6年：5.75%
	第7~30年：6%
	德国马克债券：5.87%
本金分摊	一次性偿还
选择权	在息票日可以以平价赎回
信用增强	以美国财政部发行的零息债券作为本金和12个月滚动息票的担保

图 40-5 阿根廷平价债券的说明书

利用风险债券市场价格的时间序列数据和合适的模型（比如说前面介绍的模型），可以通过使模型计算的理论价值等于债券市场价值来计算每一个数据点上的瞬时违约风险。这就是隐含随机违约风险，它在违约风险分析中的作用与隐含波动率在期权分析中的作用类似：可以作为交易指标或用来衡量相对价值。

在阿根廷平价债券的分析中，我们假定瞬时违约风险满足

$$dp = (f - hp)dt + jp^{1/2}dX_2 \quad (40-6)$$

而且跟瞬时利率不相关。在这个模型中，违约风险是均值回复的。我没有加入利率依赖性，因为只要 $f > j^2/2$ ，就可以排除违约风险为负的可能。该模型下的收

益率曲线拟合也很简单，因为每一个现金流的现值都可以分解成无风险债券价值和一个只含 p 、 t 的函数的乘积。换句话说，只要给出了无风险收益率曲线，就不需要引入利率模型了。 h 决定了均值回复的速度。参数值选择为 $h = 0.5$, $f = 0.045$, $j = 0.03$ 。这些参数的选择部分是为了使 p 的隐含值的时间序列具有正确的理论特征（根据式 (40-6) 得到的），部分是根据常识。

最后，为了使债券的市场价格和理论价格一致，我们选择 p 价值的时间窗口为天。

样本期是一段特别值得研究的时期（1993年12月底至1996年9月底），因为“龙舌兰效应”就发生在这段时间。容易判断市场条件（以及模型参数）发生过剧烈的变化。但是，在整段时期中我都使用了相同的参数，因此龙舌兰效应将在违约风险中表现出来，在选择参数时需要考虑这一点。

龙舌兰危机发生在1994年12月，但其后果持续更久，在某些国家长达3~4个月。以阿根廷的情况为例，我们可以在图40-6中看到，平价债券最低价出现在1995年3月底，跌到了35美元以下。之后进入一个稳定的恢复期。

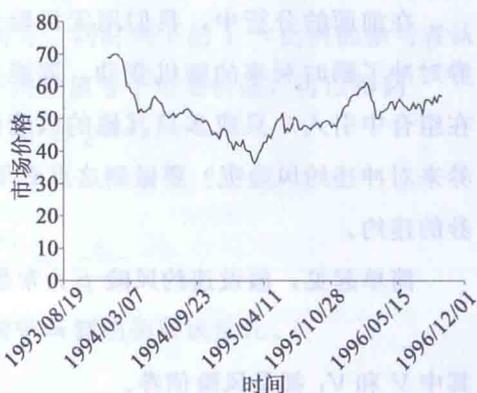


图 40-6 阿根廷平价债券的市场价格
(1993年12月底至1996年9月底)

在图40-7中我们可以看到龙舌兰效应期间伴随着美国长期利率大幅上涨，这进一步打击了布雷迪债券的价格。在这段时间内，长期利率最高达到过8%，发生在1995年3月。

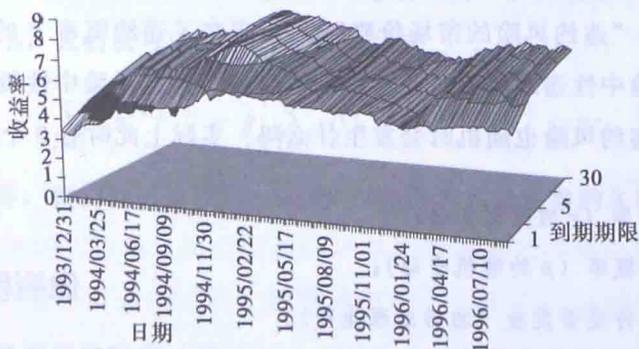


图 40-7 美国收益率曲线 (1993年12月底至1996年9月底)

图 40-8 显示了阿根廷平价债券中隐含的瞬时违约风险，时间从 1993 年 12 月底至 1996 年 9 月底。正如预期的那样，最高的违约概率出现在 1995 年 3 月底，这正是龙舌兰危机最严重的时候。这个模型显示从那以后隐含违约风险有一个稳定但显然非单调的下降。

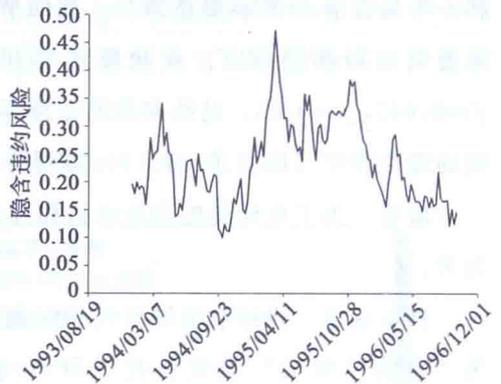


图 40-8 阿根廷平价债券的隐含违约风险，参见书中关于随机模型描述的内容

40.10 对冲违约风险

在前面的分析中，我们用无风险债券对冲了瞬时利率的随机变动。那能否在组合中引入一只或多只其他的风险债券来对冲违约风险呢？要做到这点必须假设一只债券的违约自动意味着另一只债券的违约。

简单起见，假设违约风险 p 为常数，考虑组合

$$\Pi = V - \Delta Z - \Delta_1 V_1$$

其中 V 和 V_1 都是风险债券。

选择

$$\Delta_1 = \frac{V}{V_1} \text{ 和 } \Delta = \frac{V_1 \frac{\partial V}{\partial r} - V \frac{\partial V_1}{\partial r}}{V_1 \frac{\partial Z}{\partial r}}$$

可以消除违约风险和瞬时利率风险。推导出的定价方程为

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \omega^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + (u - \lambda \omega) \frac{\partial V}{\partial r} - (r + \lambda_1(r, t)p)V = 0$$

可以看到，“违约风险的市场价格” λ_1 出现在了违约概率 p 的前面，因此我们得到的是风险中性违约概率。此方程是式 (40-4) 的风险中性版本。

你能想出违约风险也随机时会发生什么吗？实际上此时有 3 个随机源：

- 瞬时利率 (r 的随机变动)；
- 违约的概率 (p 的随机变动)；
- 违约事件是否发生 (泊松过程生效)。

这意味着我们需要使用 3 只债券来对冲，两只其他风险债券和一只无风险债

券。那么风险的市场价格会出现在哪里？可以得到式（40-5）的风险中性版本吗？

40.11 市场价格中包含信息了吗

一只名义本金为 100 的债券，一天之后就要到期了。但该债券在市场上的价值为 96。这意味着什么？债券隐含的违约概率 p 高达 1 000%。结论：部分市场参与者知道一些内幕。违约是必然发生的。

假设有一定比例的市场参与者“知道”公司处于混乱之中。假设该比例为 ϵ 。再假设这部分市场参与者认为债券的价值为零，同时剩下的 $1-\epsilon$ 比例的参与者认为债券的价值等于无风险债券的价值。令平均值等于市场价值，可以得到

$$\epsilon \times 0 + (1 - \epsilon) \times e^{-r(T-t)} = e^{-(r+p)(T-t)}$$

由此可得当 ϵ 很小时

$$p = -\frac{\log(1-\epsilon)}{T-t} \approx \frac{\epsilon}{T-t}$$

不必担心其详细含义，只需要注意到 p 的增长与到期期限成反比。

隐含违约强度和久期

付息债隐含的违约强度和久期之间存在一个非常有意思的关系。

仍旧假设有比例为 ϵ 的市场参与者是“熟悉内情的”，令平均值和违约强度为常数的模型下的市场价值相等

$$\epsilon \times 0 + (1 - \epsilon) \times \sum_{i=1}^N c_i e^{-r(t_i-t)} = \sum_{i=1}^N c_i e^{-(r+p)(t_i-t)}$$

（符号的含义是显而易见的，这里将本金当作另一次的息票。）

如果 p 很小，我们就可以将右边的式子写成

$$\sum_{i=1}^N c_i e^{-r(t_i-t)} - p \left(\sum_{i=1}^N c_i (t_i - t) e^{-r(t_i-t)} \right) + \dots$$

让两边相等，我们就可以发现 p 就等于 ϵ 除以无风险债券的久期。

40.12 信用评级

市场上有很多信用评级机构（Credit Rating Agencies），它们汇总各个公司和国家的数据，估计其违约的可能性。最著名的是标普公司（Standard & Poor's）

和穆迪公司 (Moody's)。这些机构给公司赋予一定的信用等级 (credit rating) 或级别 (grade), 以此作为对公司信用状况的评估。标普公司评定的等级分为 AAA、AA、A、BBB、BB、B、CCC 和已违约。而穆迪则使用 Aaa、Aa、A、Baa、Ba、B、Caa、Ca 和 C。两家公司都对每一个主要级别进行了更详细的分级。表 40-2 描述了穆迪的分级。

表 40-2 穆迪评定的等级的含义

Aaa	最优质的债券。风险程度最低。利息支付有足量稳定的安全边界保护
Aa	高质量。用于保护的边界低于 Aaa
A	具备许多优秀的投资属性。本金和利息有足够的安全未来存在遭受损失的可能
Baa	安全性不高也不低。在目前有足够的保证没有杰出的投资特性。具有投机性
Ba	投机性。未来表现缺乏保证
B	缺乏可靠的投资特性
Caa	摇摇欲坠。可能本金或利息支付已经处于违约和危险边缘
Ca	高度投机性。通常已处于违约中
C	最低的等级。基本没有恢复投资价值的可能性

图 40-9 显示了穆迪评定的不同信用等级过去 8 年时间中的违约百分比。

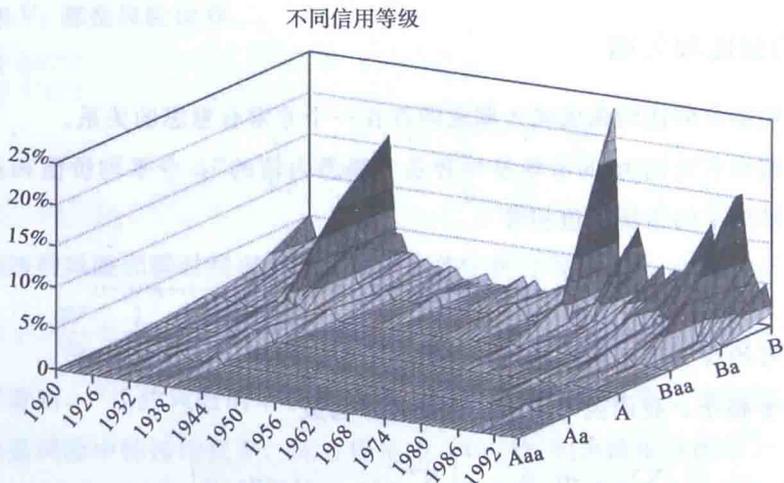


图 40-9 不同信用等级的违约百分比

资料来源：穆迪公司。此图的使用已得到了穆迪投资者服务公司的允许。

信用评级机构会持续地搜集各目标公司的数据, 然后以收集到的信息为基础, 根据特定标准来为公司定级或重新定级。评级的改变被称为转移 (migration), 它对公司发行的债券的价格有着重大的影响。转移至更高的级别会增加债券的价值, 降低其收益率, 因为这意味着债券违约的可能性降低了。

该表的解读方法如下。假设今天公司的评级为 A。在 1 年的时间中，它变成另外一个级别的概率可以从 A 所在的那一行中读到。因此，该公司级别变为 AAA 的概率是 0.092%，变为 AA 的概率为 2.42%，变为 A 的概率为 91.305%，依此类推。不发生级别转移的可能性是最大的。从上往下看



各行，这张表可以解读为所有公司在不同等级间转移的概率，也可以解读为公司 XYZ 在不同于 A 的起始等级下发生转移的概率。无论现在处于什么级别，在 1 年以后公司都会有一个特定的评级，即便该级别是违约级。因此，每一行的概率总和都必须等于 1。而且，一旦公司处于违约状态，就不可能离开该状态。因此最后一行除了代表从违约到违约的最后一个元素为 1 外，其他所有元素都为零。

这个表格或者说矩阵代表了有限时间段内的概率。但是在这段时间中，债券的等级可能发生了 A 到 BBB 再到 BB 的连续转变；怎样对这种序贯转移建模？引入一个无穷小时间内的转移矩阵，就能做到这点。我们可以通过马尔科夫链 (Markov chains) 对连续时间转移建模。

我们将对 t 到 $t + dt$ 这一极短时间内的转移进行建模。因为时间非常短，所以发生转移的可能性也非常小。最有可能的事件是没有转移。我会令状态变换的概率与时间步长 dt 成比例。定义比例的方式都会导致一个无意义或者退化的模型。如果单位时间步长内的转移矩阵为 P_{dt} ，我们总可以找到某个矩阵 Q ，使得

$$P_{dt} = I + dtQ$$

其中 I 是单位矩阵。 Q 中每一行元素之和必然为零；而且最后一行必然只有零，因为违约是一个吸收态。我用 $P(t, t')$ 表示从 t 到 t' 这段有限时间间隔内的转移矩阵。

40.13.1 前向方程

考虑时间步长 dt 中公司如何从一个状态变到另一个状态以及相应的概率，可以发现 $P(t, t')$ 和 P_{dt} 之间的关系为

$$P(t, t' + dt) = P(t, t')P_{dt}$$

写成 Q 的方程为

$$P(t, t' + dt) = P(t, t')(I + dtQ)$$

两边同时减去 $P(t, t')$, 并除以 dt , 可以得到

$$\frac{\partial P(t, t')}{\partial t'} = P(t, t')Q$$

该常微分方程是前向方程 (forward equation), 求解的边界条件为

$$P(t, t) = I$$

Q 为常数时, 该矩阵方程的解为

$$P(t, t') = e^{(t'-t)Q} \quad (40-7)$$

矩阵指数可以定义为无限项求和, 因此

$$e^{(t'-t)Q} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (t'-t)^i Q^i$$

式 (40-7) 有好几种使用方法。首先, 假设时刻 $t=0$ 时公司 XYZ 的评级为 A, 我们已经知道了 Q , 如何求该公司在未来时刻 T 处于某状态的概率? 这很简单。我们只需找到矩阵 $P(0, T)$ 的第 3 行。定义 e_i 为除第 i 列外所有元素都是零的行向量, 其中 i 对应着初始状态。在本例中 $i=3$ 。则问题的答案为

$$e_i P(0, T) = e_i e^{TQ}$$

该前向方程的解的另一种用法是根据有限时间段的转换矩阵来推导矩阵 Q 。换句话说, 我们要通过方程

$$e^{TQ} = P(0, T)$$

来解出 Q 。为什么我们想要这么做? 一个可能的原因是一些评级机构和其他公司公开的是时间为 1 年的转移矩阵, 例如表 40-3。如果你想要知道更短时间内会发生什么 (并且你相信这个 1 年的矩阵是正确的), 那么你就需要找到 Q 。

假设我们可以将矩阵 Q 对角化

$$Q = MDM^{-1}$$

在这里 D 是一个对角矩阵。如果可以这么做, 那么 D 对角线上的元素就是 Q 的特征值。接下来我们可以做以下变换

$$\begin{aligned} P(0, T) &= e^{TQ} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} T^i Q^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (MDM^{-1})^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} T^i \underbrace{(MDM^{-1}) \cdots (MDM^{-1})}_i \end{aligned}$$

$$= M \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} T^i D^i M^{-1}$$

因为 D 是对角矩阵, 所以其 i 次方的结果是另一个对角矩阵, 后者的每一个对角元素是 D 的对角元素的 i 次方, 即

$$D^i = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_5 \end{pmatrix}^i = \begin{pmatrix} d_1^i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_5^i \end{pmatrix}$$

由此可以得到

$$P(0, T) = M e^{TD} M^{-1}$$

其中 e^{TD} 是对角元素为 $e^{T d_i}$ 的对角矩阵。矩阵 $P(0, T)$ 和 Q 的特征值是密切相关的。求解 Q 的策略可以分为两步, 首先将 $P(0, T)$ 对角化以得到 $M e^{TD}$, 由此出发可以很容易得到矩阵 Q 。

40.13.2 后向方程

后向方程 (backward forward) 的推导方法跟前向方程相似, 其含义跟扩散问题的后向方程类似。该方程为

$$\frac{\partial P(t, t')}{\partial t} = -Q P(t, t') \quad (40-8)$$

40.14 定价方程

在建立了评级转移的模型后, 我们来考察怎样为风险债券定价。我们将重点放在零息票债券上。在前一节我们已经得到了转移矩阵的前向和后向方程。在布朗运动世界中后向方程和合约价格的关系在马尔科夫链世界中仍然成立, 所以我将跳过大部分细节。

40.14.1 常利率

风险债券的价格依赖于公司的信用等级。因此我们需要对每一个等级定义一个价值。令列向量 V 的每一个元素代表一个信用等级的公司债券的价值。现在先

假设利率是常数，所以该向量仅为 t 的函数。就像期权价值与转移密度函数的后向方程有关一样，现在我们可以推导出债券价值的方程

$$\frac{dV}{dt} + (Q - rI)V = 0$$

就是在后向方程式 (40-8) 上增加了一个额外的贴现项。方程的终值条件为

$$V(T) = I$$

其中 I 是一个列向量，其除了最后一个元素以外的其他元素都是 1，而最后一个元素是 0。

如果违约时有回收，该方程将如何变化？

如果你可以对评级的改变进行对冲，那么风险的市场价格会出现在哪里？

40.14.2 随机利率

模型可以很直接地扩展到随机利率的情形。此时的控制方程为

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\beta^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + (\alpha - \lambda\beta) \frac{\partial V}{\partial r} + (Q - rI)V = 0$$

40.15 可转债的违约风险

违约风险对可转债来说非常重要。我们在第 33 章对可转债做了详细的讨论，但是基本没有涉及信用问题。可转债在存续期内支付息票，在到期日偿还本金，在这个意义上说它很像债券。但是，可转债的持有者还可以在特定的时点将其转换为一定数量的标的股票。这个特征又使得可转债像期权。关于下面推导中所有的细节和符号读者可以参考第 33 章。

我们将本章中的思路与第 33 章的相结合来推导考虑违约风险的可转债定价模型。我会介绍两种可能的方法。

40.15.1 当股价达到一个临界点就破产

我们可以这样来对违约建模：如果公司股价达到某个水平 S_b ，公司就会违约。这个模型的思想跟 39.2 节中的模型相似。唯一要做的改动就是在我们选定的（无信用风险的）可转债模型中增加一个边界条件

$$V(S_b, t) = 0$$

40.15.2 将瞬时违约风险纳入模型

另外一种可能的思路跟前面提到的瞬时违约风险模型一致，就是像 40.4 节一样引入一个由泊松过程触发的外生违约。在两因子 CB 模型下，我们可以得到

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\sigma Sw \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial r} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + (r+p)S \frac{\partial V}{\partial S} + (u-\lambda w) \frac{\partial V}{\partial r} - (r+p)V = 0$$

在这个模型中 r 和 S 都是随机的。 p 可以是常数、时间的已知常数或者是 r 和 S 的已知函数。

这个方法的优点在于当没有股票依赖时会退化为普通债券的市场定价过程。这使得我们可以在一个一致的框架下为各种金融工具定价。

当股票价格很小的时候，上述模型得到的可转债价格跟不可转换债券的价格接近。但市场经验告诉我们，当这种情况发生时，可转换债券的价格会急剧下跌。市场将低的股票价格看作公司病入膏肓的信号。引入依赖股票价格的瞬时违约风险 $p(S)$ 就可以对这种情况进行建模。只要在 S 趋于零时， p 会以足够快的速度趋向于无穷，那可转债的价值就会趋向于零。注意这样做并没有增加求解时的计算负担，因为我们本来就是将可转债价格作为 S 的函数来求解的。图 40-11 展示了考虑与不考虑信用风险时的可转债价值，所用的模型是单因子、确定性利率的。

图 40-12 显示了两因子模型下考虑违约风险的可转债定价结果。利率模型是瓦西塞克模型，使用了 7% 的水平形状的收益率曲线进行拟合。

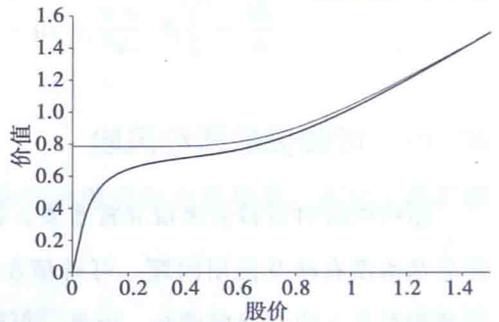


图 40-11 有(无)违约风险下可转债价值与标的股价的关系(下线为有违约的, 上线为无违约的)

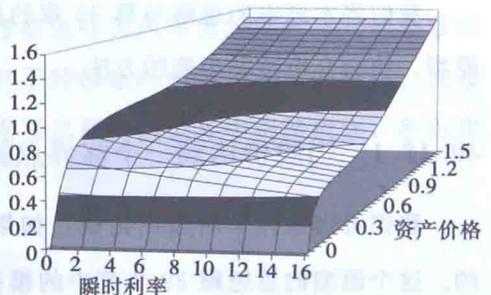


图 40-12 考虑违约风险的可转债价值和标的价格、即期利率的关系

40.16 为流动性风险建模

流动性风险通过收益率价差影响债券的价格。收益率价差是买入价和卖出价之差占平均价的百分比。比如，如果买入价是0.97美元，卖出价是1.03美元，则中间价就是1美元，那么收益率价差就是6%。用百分比形式而不是美元形式来衡量收益率价差，是为了保证不同价格债券之间的可比性。

债券的交易量很大，则流动性就较好。有很多的买方和卖方，所以经纪商能很容易地匹配交易对手。经纪商在匹配买卖方的过程中面临的不确定很小，所以买卖价差相对较小。

缺乏流动性的债券交易量很小，因此市场中的买家和/或卖家数量较少。在这种情况下经纪商在匹配买卖双方时面临着巨大的不确定性。为了补偿这部分风险，低流动性债券的价差会相对较大。

债券的流动性可能会随着时间的推移而发生变化。一个在平时流动性较好的债券可能会遭遇短暂的低流动性时期。

在低流动性时期，收益率价差会变大，导致买或卖债券都会变得更贵。导致低流动性的可能原因有：

- 发行公司的信用评级变化导致债券吸引力下降；
- 其他公司层面的因素，比如公司财报宣布利润下降；
- 接近到期日时债券的流动性会趋于枯竭；
- 超级大单的出现；
- 宏观因素引起的对特定企业、行业或整个债券市场的看多或看空观点。比如说，股票市场的牛市会使资金从债券市场中抽离。

低流动性时期也许只会持续极短的时间，也许也会一直持续到到期日。如果其原因是某个债券持有者决定出售数量巨大的债券，那么低流动性时期也许只会持续一两天到该次出售完成为止。在信用等级降低的情况下，流动性会变差到信用评级重新回到原水平为止，这可能在到期之前都不会发生。因此，由信用评级改变造成的低流动性有可能持续无限久。

只有当投资者要在流动性匮乏时期交易债券才会要承受低流动性带来的成本。打算持有债券至到期的投资者不会面对低流动性的成本，因此无须关注流动

性风险。打算在二级市场上进行债券交易的投资者面临着潜在的流动性风险。为了估计低流动性的成本，这些投资者需要去考虑：

- 低流动性时期出现的可能性；
- 低流动性时期买卖价差的变化量；
- 在低流动性时期需要交易的概率。

为了简单起见，我们只关注由信用评级改变所引起的流动性变动。如果一家公司的信用等级被降级了，该公司的公司债券的买卖差价会变大。表 40-4 中，韩国发展银行评级变化之后公司债买卖差价的变动突出地表现了这一点。

我们对价差 s 建模如下

$$ds = a_i(s)dt + b_i(s)dX + \sum_{j=1}^8 c_{i,j}(s)dq_{i,j} \quad (40-9)$$

其中 i 代表信用等级，1 代表最高的等级，8 代表违约。

表 40-4 韩国发展银行的信用等级和价差的变化

信用等级变化的日期	升级或降级	变化前的信用等级	变化后的信用等级	买卖价差变化的百分比
1997/10/24	升级	AA-	A+	10.02
1997/11/25	升级	A+	A-	NA
1997/12/11	升级	A-	BBB-	45.46
1997/12/22	升级	BBB-	B+	12.20
1998/02/18	降级	B+	BB+	-3.88
1999/01/25	降级	BB+	BBB-	-5.41

$a_i(s)$ 项表示当债券等级为 i 时价差的漂移项。一个合理的函数形式设定是均值回归型的

$$a_i(s) = \alpha_i(e_i - s)$$

其中 e_i 是债券等级为 i 时的均衡或平均价差。

b 代表了价差的波动率。一个合理的形式设定是

$$b_i(s) = \beta_i s^{1/2}$$

泊松项 $dq_{i,j}$ 表示从等级 i 到等级 j 的跳跃。这些跳跃过程的密度由前面的矩阵 Q 决定。跳跃幅度 $c_{i,j}(s)$ 的最简单形式可以是

$$c_{i,j}(s) = e_j - e_i$$

也就是说跳跃幅度等于两个信用等级下的均衡价差之差。

式 (40-9) 这样的模型可以用来为未来任何时刻的预期价差建模。

40.17 总结

从本章可以看出，信用风险建模是一个很大的课题。我介绍了一些常用的建模方法，但这些绝不是唯一的选择。为了帮助衡量信用风险，摩根大通公司创造了 CreditMetrics 方法，用来估算违约事件对资产组合的影响。我们将在第 42 章中介绍这个方法。

我们来对本章内容做最后一点思考，假设公司只发行了一种风险债券，所以没有办法对违约进行对冲。如果你确信市场因为高估了违约风险而低估了债券价值，那你可能会决定买入该债券。如果你打算持有至到期，那除非你又改变了主意，否则未来市场价格的变化是无关紧要的。但是你的确会关心违约的可能性，会对公司的相关新闻保持密切关注。另一方面，如果你购买债券只是想持有一段很短的时间，那么你主要关注的是市场是如何反应的，真正的违约风险反而无所谓。你可能仍旧会关注公司的相关新闻，但焦点会放在市场如何对消息做出反应，而不是消息本身。

拓展阅读

- 在瞬时违约模型领域比较重要的文献有 Jarrow 和 Turnbull (1990, 1995)、Litterman 和 Iben (1991)、Madan 和 Unal (1994)、Lando (1994a)、Duffie 和 Singleton (1994a, b) 和 Schonbucher (1996)。
- 瞬时违约风险的模型及其在拉美布雷迪债券上的应用见 Blauer 和 Wilmott (1998)。
- 另一项关于瞬时违约概率实际估计的研究见 Duffie (1995)。
- 对信用评级变化的原创性研究来自 Lando (1994b)，Jarrow、Lando 和 Turnbull (1997) 以及 Das 和 Tufano (1994)。Cox 和 Miller (1965) 用通俗易懂的方式介绍了马尔科夫链。
- Ahn, Khadem 和 Wilmott (1998) 在信用风险建模中巧妙地应用了效用理论。
- 在 www.bradynet.com 上可以找到目前布雷迪债券的市场状况和价格。
- 在 www.engmkt.com 上可以看到新兴市场的金融信息。
- Clark (2002) 使用隐含波动率来衡量国家风险。



第41章

信用衍生品

本章内容

- 信用衍生品的定义和应用
- 由违约触发的信用衍生品
- 收益率价差衍生品
- 评级变化引发的支付
- 信用衍生品示例，包括条款说明书
- 使用不同模型为信用衍生品定价

41.1 引言

在本章中我将继续介绍风险合同约定价问题。这里“风险”指的是对违约的风险暴露。信用衍生品明确承认存在违约风险，多数情况下其持有者将从违约事件中获益。因此，可以将信用衍生品看作另一个风险合约（比如某个简单债券）的保险；后者的持有人通常会在违约事件中遭受损失。

信用衍生品种类繁多，其市场正处在飞速发展之中。我们将只讨论合同约定价中的主要问题，并在篇幅允许的前提下提供尽可能多的例子。

41.2 什么是信用衍生品

信用衍生品是关于两个主体之间现金流/回报关系的合约，其中的现金流/回报跟某个第三方的信用特征有关。

可能使用的特征包括：

- 回报由违约事件引发；
- 回报跟特定债券的市场收益率有关；
- 回报跟独立方的做出信用评级有关。

几乎可以肯定地说，信用衍生品仍然具有市场风险（market risk），即标的资产的市场价格发生不利变动的风险。但它们同时还具有信用风险（credit risk），比如某个对手方不能支付的风险、其他人不能支付引发的回报，或其他人的违约风险估计值发生变化的风险。

图 41-1 显示了一个债券的细节，在“信用事件”发生时该债券将具有可赎回性。在此例中，信用事件（credit event）的定义是下面事件中的一个或多个：

- 无法在约定时间完成支付；
- 支付计划重新安排失败；
- 破产和债务重组。

SECURITY INFORMATION		ISSUER INFORMATION	
CPN FREQ	SEMI-AN	SERIES: EMTN	NAME ANGUS LIMITED
CPN TYPE	FLOATING	NOT SEASONED	TYPE SPECIAL PURPOSE
MTY/REFUND TYP	NORMAL	IDENTIFICATION #'s REDEMPTION INFO	
CALC TYP (198)	NO CALC-FLOATERS	ISIN	XS0089628639
DAY COUNT(2)	ACT/360	MLNUM	99999
MARKET ISS	EURO MTN	COMMON	008962863
COUNTRY/CURR	KY /USD	ISSUANCE INFO	
COLLATERAL TYP	UNSUBORDINATED	ANNOUNCE DT	8/17/98
AMT ISSUED	30,000(M)	1ST SETTLE DT	8/17/98
AMT OUTSTAND	30,000(M)	1ST CPN DT	2/17/99
MIN PC/INC	1,000,000/ 1,000,000	INT ACCRUE DT	8/17/98
PAR AMT	1,000,000.00	PRICE @ ISSUE	100
LEADMGR/WURTR		RATINGS	
LISTED	LUXEMBOURG	MOODY	NA
		S & P	NA
		COMP	NR
		DCR	NA
		FI	NA

Enter 11 <GO> for Involved Parties
SECURITY DISPLAY PAGE 1/4
 ANGUS LIMITED ANGUSFloat 08/00 NOT PRICED

DL18 Corp ODES

Hit 1 <GO> to See Other Avail Info
 NOTES: NO PROSPECTUS, TAX CHANGES CALL
 CPN RATE=6MO US\$LIBOR +265BP. MOD FOLLOW BUS DAY CNVTN:IT, EN BUS. SEC'D BY SWAP
 AGRMT. CALL IF CRED EVENT ON UNDERLYING OCCURS.UNSUB.UNSEC'D.SERIES 4B, TRANCHE 1

Copyright 1999 BLOOMBERG L.P. Frankfurt: 69-320410 Hong Kong: 2-2277-6000 London: 171-3307-5000 New York: 212-318-2000
 Price Line (en) 609-275-3000 Singapore: 228-9300 Sydney: 2-977-8166 Tokyo: 3-201-8900 Sao Paulo: 11-3048-4000
 Fax: 1-800-419-5194

图 41-1 信用事件发生时可赎回的债券

资料来源：彭博资讯。

信用衍生品可为下列信用风险提供保护：

- 违约风险；
- 信用价差风险；
- 降级风险。

信用衍生品可以用于获取某种信用风险的暴露：

- 增强收益；
- 获取特定风险暴露。

信用衍生品提供了一种从其他风险中“分离”信用风险的方法，它可以将信用风险从市场风险、利率风险等其他风险中剥离出来。以前无论你想不想要，都必须将这些风险作为整体进行买卖，一个典型的例子是可转债。信用衍生品是场外市场（OTC）产品。

闲话：在考虑信用风险工具定价问题时，不要忘了卖给你“保护”的人其自身也存在信用风险。

41.2.1 信用衍生品使用者：银行

银行是信用衍生品市场的主要参与者。它们对此类工具感兴趣的理由包括：

- 对冲特定的违约风险；
- 分散贷款组合的信用风险；
- 对冲地区、行业等风险；
- 释放信贷额度；
- 调整风险暴露；
- 消除来自特定参与者的风险；
- 管理资本。

41.2.2 信用衍生品使用者：投资者

包括对冲基金在内的投资者购买信用衍生品的目的包括：

- 参与新的资产种类的投资；

- 参与外国和新兴市场的银行贷款；
- 创造合成高收益债；
- 对错误定价进行套利；
- 分离信用风险和市场风险；
- 提供杠杆交易的可能性；
- 利用投资者的判断。

41.2.3 信用衍生品使用者：企业

当然在实业界（一个面临日益增强的威胁的少数群体）也存在对这些产品感兴趣的人：

- 对冲债权人、消费者/供应商的风险；
- 对冲项目风险（例如主权风险）。

41.3 常见的信用衍生品

信用衍生品家族正处于急速扩大之中。下面列出了一些常见合约的名称，稍后我们将对它们进行简要的介绍。

- 资产互换；
- 信用违约互换；
- 总收益互换；
- 违约触发的衍生品；
- 有限资源票据；
- 信用价差衍生品；
- 违约看涨期权和违约看跌期权；
- 交换期权；
- 信用价差期权；
- 评级变化引发的支付。

41.3.1 资产互换

资产互换是结构性信用产品的一种基础构建单元。交易方 A 持有风险债券，但是想要将其中的信用风险交换出去。他将该债券交给交易方 B 以换取 LIBOR 加某固

定利差的利息支付。B 必须持续支付利息到风险债券存续期结束，即使在债券违约之后仍需支付。这样违约风险就从 A 传递到了 B。这就是**资产互换** (asset swap)。通过引进看涨期权或看跌期权条款可以使该合约更加复杂。

1. 资产互换的工作原理

可以购买一份固定利率资产 (见图 41-2)，同时签订一份固定利率资产与浮动利率资产的互换合约 (见图 41-3)。

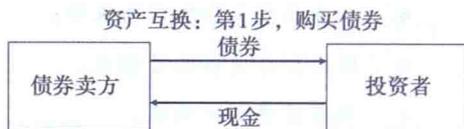


图 41-2 购买固定利率资产

2. 细节

- 互换的期限跟债券的到期期限要匹配。
- 如果债券中包含期权 (比如内嵌的看涨期权)，则互换中也可以包含该期权。
- 可以添加一个看涨期权空头，在利率低于特定值时有权终止合约。

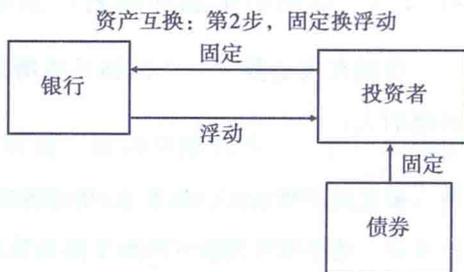


图 41-3 进入互换

3. 优点

- 简单、透明、灵活。
- 轻易地隔离了信用风险。

4. 缺点

- 很多投资者无法参与衍生品交易 (受监管、会计或投资政策限制)。
- 如果标的债券违约，投资者将仍然持有互换头寸 (投资者可以继续支付或以市场利率结束该头寸)。
- 投资者暴露在互换对手的信用风险中。

5. 资产互换的互换/转换

资产互换的互换是用一个资产互换交换另一个资产互换。通常两个资产是不相关的，而转换是由一个或两个资产互换的信用价差触发的。

41.3.2 总收益互换或总收益率互换

总收益互换是最早的信用衍生品之一。它们比违约互换出现得更早，但现在却不如违约互换常见。总收益互换和违约互换之间的区别在于后者只转移了指定资产的信用风险，而前者将转移持有指定资产的所有风险。

1. 总收益互换的工作原理

这是一种表外交易，交易双方具体如下。

- **总收益支付者 (total return payer)**: 支付参考资产的现金流和价值正向变化之和给另一方，包括利息、增值、息票等。
- **总收益接收方 (total return receiver)**: 支付 LIBOR 加上利差或固定收益率，再加上资产价值的负向变化。按特定的时间间隔进行结算，比如说 3 个月一次。

互换期限通常小于标的工具的期限。

因此，总收益互换提供了一种将参考债务涉及的所有风险打包转移的方法，其中也包括信用风险（见图 41-4）。

支付方不需要将资产卖掉就剥离了所有的市场和信用风险暴露。作为回报，它将收到 LIBOR + 利差。而接收方获得了

相关的风险头寸，但无须购买该资产。（可以想象成租借了另一家公司资产负债表的一部分。）

可以将之跟固定换浮动的普通利率互换做比较。在普通利率互换中现金流会相互抵扣，即使名义本金很大，支付的净现金流也可能不大。在总收益互换中接收方可能需要双倍的支出，即 LIBOR + 利差 + 资本增值（如果为负）。当然这里存在接收方违约的风险。

2. 为何要进入总收益互换

- 与交易标的资产比较，使用总收益互换会更灵活。例如，通过改变互换合约的期限可以创设出市场上没有的合成资产。
- 卖空经常难以实施，但是通过总收益互换就可以实现。
- 互换接收方不必支出购买债券的花费。即使需要缴纳抵押和较高的保证金，最终的杠杆 (leverage) 和监管资本的增强收益率 (enhanced return on regulatory capital) 仍然很高。这是总收益互换流行的最重要的原因。

41.4 由违约触发的衍生品

信用衍生品最基本的形式是在发行公司或国家违约时发生支付。从技术上



图 41-4 总收益互换

说，违约的定义是任何不符合合约条款规定的事件，因此息票支付仅晚一天也可以当作违约事件。此类产品的例子包括：

- 信用违约互换；
- 有限资源票据；
- 第一违约；
- 第 n 违约。

41.4.1 基本概念

- 信用事件 (credit event)：未能履行支付义务，以及……
- 参考主体/信用方 (reference entity/credit)：约定的主体（国家、金融机构、公司或一篮子主体中的一个）。
- 参考证券/资产 (reference security/asset)：由参考主体发行的证券。
- 保护买方 (protection buyer)：也称“买方”，定期支付费用以换取参考主体违约后另一方的或有支付。
- 保护卖方 (protection seller)：也称“卖方”，定期收取费用，作为交换将支付或有款项。

41.4.2 如何定义“违约事件”

信用违约指的是现金支付方任何违背合约条款规定的行为，因此息票支付推迟 1 天都可以算作违约事件。通常发行/参考公司申明破产也属此类。此时可能会存在“宽限期”或对欠债总额的限制。

信用事件也包括参考主体被接管、破产、倒闭或停业清算等事件。其他一些会影响合约的事件，比如战争或革命，也可以作为特定的违约情形写入合约。银行暂停提款也可作为违约事件写入条款。

违约的定义也包括一些“实质性”条款。这一定会伴随着参考债券价值的显著变动。换句话说，市场相信违约事件是“真的”，而不只是在支付中出现的错误。因此对违约事件既有法律检验法又有市场检验法。

41.4.3 信用违约互换

- 在信用违约互换 (credit default swap) 中，交易方 A 定期支付利息给交易方

B, 直到标的工具违约。当违约发生时, B 需要支付本金给 A。

这是信用衍生品最简单的例子, 可以看作 A 方向 B 方购买了标的工具的保险 (见图 41-5)。

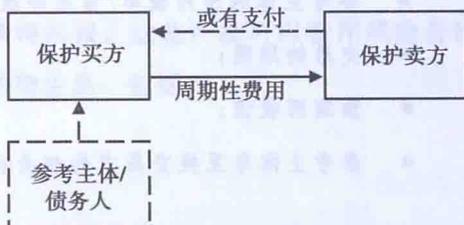


图 41-5 信用违约互换的结构

1. 例 1

付息债的普通信用违约互换。如果债券发行者无法支付息票, 信用保护的买方就可以从卖方那里得到事先约定的支付。

2. 例 2

跟上面的例子类似, A 方支付 LIBOR 加固定的费用直到标的工具违约; B 方在标的工具有效期内支付 LIBOR。本例中没有本金交换, 但其本质仍是 A 方购买了对违约的保险。

3. CDS 的一些细节

CDS 是结构性信用产品市场中占主导地位信用衍生品。其费用通常是定期支付的 (报价方式为每单位本金多少基点)。对于期限较短的保护, 费用是预先支付的。

信用事件发生时, 结算方式可以是交割参考资产以交换或有支付, 或采用现金结算 (金额为标的工具违约前的价值减去违约后的回收价值)。

CDS 的市价依赖于信用价差的变化。所以可以用之获取或对冲信用价差变化的风险头寸。

如果一个大的公司或国家违约 (或者看起来在违约), 那么 (同一部门的) 所有公司或国家的信用违约互换都将大受欢迎。因此, 不同工具之间存在着很大的相关性。

4. 用途

CDS 被用来对某些信用风险的过度暴露进行保险, 也可以用来获取或对冲在市场上无法获得的风险暴露。有时违约风险的来源方甚至都不必知晓以其为标的的衍生品的存在。

当信用价差变小时 CDS 的多头很难获利。违约风险也许没有发生变化, 但是市场对风险的感知或供需的变化都会影响价差。

5. 影响价格的因素

- 参考主体的违约概率/信用评级；
- 交易的期限；
- 预期回收值；
- 参考主体与互换交易方的相关性。[⊖]

41.4.4 有限资源票据

与前面的合约相比，有限资源票据（limited recourse note）的违约暴露较小。该产品通常与两个标的工具有关。在两个标的都未发生违约时，合约以利率 r_1 支付利息；当其中一个标的发生违约，利率就降到 r_2 ；第二个工具再发生违约，利率就降到 r_3 。

41.4.5 第一违约

这些都属于篮子信用衍生品中最简单的形式。篮子通常由 10 个左右的标的组成。

- 结构与 CDS 类似；
- 但有多个参考主体；
- 第一个主体违约就会引发支付；
- 结算过程跟普通的 CDS 一样。

41.4.6 第 n 违约

跟上一个合约类似，但该合约的购买者得到了篮子中第 n 个债券违约的保护。

合约持有者要持续支付费用，可能还有预先支付。费用支付持续到合约到期或者篮子中第 n 个公司发生违约。当第 n 个公司发生违约时，合约持有人将得到相当于违约所造成损失的回报。

⊖ 举个例子，不要从日本银行买入对另一家日本银行的违约保护。（我们怎么知道是否存在相关性？无法得知互换对手的风险暴露情况，因为这些都是表外业务。）在定价时，你需要知道联合违约概率。

41.5 收益率价差的衍生品

其他一些衍生品不需要发生违约就能获得回报。这些产品可以看作风险合约收益率和相应无风险合约收益率之间利差的衍生品。包括：

- 违约看涨期权和违约看跌期权；
- 交换期权；
- 信用价差期权。

41.5.1 违约看涨期权和违约看跌期权

标的为风险债券或贷款等信用产品的价格的期权。

- 违约看涨期权 (default call) 和违约看跌期权 (default put) 分别代表购买和出售有风险的标的工具的权利。

显然布莱克 - 斯科尔斯理论的大部分内容仍然适用，但重要的是必须以某种方式将违约风险纳入模型。

41.5.2 交换期权

跟基础违约期权类似的是赋予其持有人用一个债券交换另一个债券权利的期权。例如一个允许你用风险债券交换数量更少的无风险债券的期权。无风险债券和风险债券的比例在合约开始时设定。

下面带 * 号的代表风险债券。

交换期权的回报形式为

$$\max(qZ - Z^*, 0)$$

其中 q 是事先决定的比率。

41.5.3 信用价差期权

先计算一个风险债券的到期收益率，记为 Y^* ；再计算等价的无风险债券的到期收益率，记为 Y 。两个收益率之差 $Y^* - Y$ 被称为利差。

- 信用利差期权是一种回报取决于利差的合约。

回报也可以取决于两个风险债券的利差。两个债券可以来自同一个发行者，也可以来自不同的发行者。在这种情况下利差有可能改变符号。常见的回报形式为

$$\max(Y_1^* - Y_2^*, 0)$$

41.6 基于信用评级变化的回报

最后要介绍的一种违约衍生品依赖于发行方的信用评级。发行方有一个初始信用等级，在合约持续期内其评级会发生变化，这可能会引发对衍生品合约持有者的支付。

1. 例子：韩国发展银行票据

图 41-7 是韩国发展银行在 1997 年 6 月发行的可回售浮动利率票据的合约设定。这是一个以美元计价的票据，每季度支付 3 个月期美元 LIBOR 加 18.75 个基点。合约在 2002 年到期。在 LIBOR 上增加的 18.75 个基点是对违约风险的补偿。当银行的信用评级下降到 A-（标普等级）或 A3（穆迪等级）时，票据持有人有权以面值将之回售给韩国发展银行。

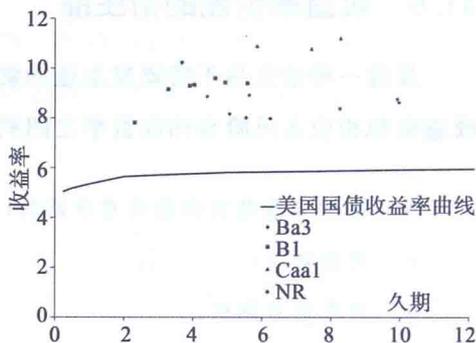


图 41-6 一些风险债券的收益率和久期的关系

韩国发展银行票据	
付息频率	每季度支付一次
息票类型	浮动
MTY	看涨期权/看跌期权
日期计算惯例	实际/360
国家/货币	韩国/美元
<p>息票率=3个月美元LIBOR+18.75基点。当标普评级下降到A-以下或穆迪评级下降到A3以下时，只要提前10个营业日通知，可以按面值回售</p>	
评级：	
穆迪	Baa2
标普	A-

图 41-7 韩国发展银行票据

2. 接下来发生了什么

可以从 1997 年 12 月 11 日的彭博客户端（见图 41-8）中看到，在 1997 年 12 月 11 日该合约的穆迪评级从 A3 下降到了 Baa2。同时其标普评级也从 A-

下跌到了 BBB-。这触发了回售条款，事实上大多数债券都被以面值回售，让韩国发展银行付出了 3 亿美元的代价。虽然这让当时正处于严重流动性危机中的韩国政府承受了更大的压力，但最终该银行没有发生违约。后来韩国发展银行的评级进一步下降，其债权进入了垃圾债券（junk bond）等级，即 BB/Ba 或更低。

还有很多其他与发行者信用评级有关的衍生品类型。可能它们的回报或某种新特性在重新评级发生时会被触发，就跟上面的例子一样。也可能回报只依赖于特定时点的信用等级，因此先降级再升回原来的等级不会引发行动。还可以想象更微妙的路径依赖，比如说只有不经过中间等级直接下降两个等级时才有回报的合约。一个例子是不经历评级改变就直接违约才能获得回报的合约。

SECURITY INFORMATION		ISSUER INFORMATION	
CPN FREQ	QUARTLY	SERIES: EMTN	NAME KOREA DEVELOPMENT BANK
CPN TYPE	FLOATING	NOT SEASONED	TYPE BANK
MTY/REFUND TYP	CALL/PUT	IDENTIFICATION #1:	REDEMPTION INFO
CALC TYP (?)	FLOAT RATE NOTE	ISIN XS0077584307	MATURITY DT 6/30/2
DAY COUNT (?)	ACT/360	MLNUM FDL9	REFUNDING DT 6/30/0
MARKET ISS	EURO MTN	COMMON 007758430	NEXT CALL DT 6/30/2
COUNTRY/CURR	S.K./USD		WORKOUT DT 6/30/0
COLLATERAL TYP	SR UNSUB		RISK FACTOR
AMT ISSUED	300,000 (M)	ISSUANCE INFO	
AMT OUTSTAND	300,000 (M)	ANNOUNCE DT 6/16/97	
MIN PC/INC	10,000/ 10,000	1ST SETTLE DT 6/30/97	
PAR AMT	10,000.00	1ST CPN DT 9/30/97	
LEADMGR/UWRTR	GS INTL	INT ACCRUE DT 6/30/97	
LISTED	LONDON	PRICE @ ISSUE 99.95	
			RATINGS
			MOODY Baa2/*-
			S & P A- /*-
			COMP BBB1
			DCR NA
			FITCH NA
			IBCA NA
NOTES [NO PROSPECTUS]			
CPN RATE=3MO USSLIBOR + 18.75BP. UNSEC'D. PUT W/10 BUS DAYS NOTICE IF S&P RATING FALLS BELOW A- OR MOODY'S RATING FALLS BELOW A3.			
Bloomberg-all rights reserved Frankfurt:609-920410 Hong Kong:3-521-3000 London:171-330-750 New York:212-318-2000 Princeton:609-279-3000 Singapore:226-3000 Sydney:2-8777-8600 Tokyo:3-3261-8900 Sao Paulo:11-3048-4500 G194-79-13 12-Dec-97 8:53:41			

图 41-8 韩国发展银行可回售浮动利率票据的合约设定

资料来源：彭博资讯。

41.7 利用违约互换进行可转债套利

可转债的风险暴露包括：

- 股票价格；
- 利率；
- 信用风险。

其中第 1 个和第 3 个是最重要的。可转债套利需要利用参与人对波动率的预期和/或对信用的判断。要利用对波动率的判断可以通过 Delta 对冲或使用交易所

交易的期权进行对冲（见图 41-9）。

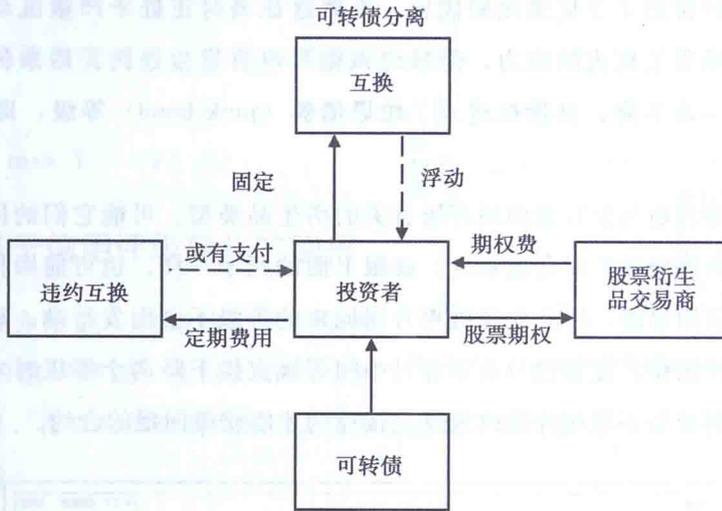


图 41-9 用信用产品工具来进行可转债套利

利用你对信用风险的判断

1. 第一步：股票风险

使用 Delta 对冲消除股票风险的暴露头寸。

2. 第二步：决策

你的判断是针对绝对还是相对违约风险？换句话说说是真实违约还是市场对信用风险的看法？

- 绝对还是相对：你的判断跟市场对公司信用风险的估计有关，还是跟该公司与其他（类似的）公司的相对风险程度有关？
- 你是预计该公司会违约还是预计风险的市场估值会改变（信用价差改变）？

3. 第三步：买/卖保护

第二步的答案将决定持有头寸的方向，以及要进行哪（几）种合约的买卖。

41.8 条款说明书

下面和更多的条款说明书可以在内尔肯的优秀著作（Nelken, 1999）中找到。

41.8.1 XYZ 债券信用利差的看跌期权

利差看跌期权买方	德意志银行
利差看跌期权卖方	投资者
名义本金	2 000万美元
执行日期	1年
标的指数	到期日为d'd'm'm'/yyyy的XYZ债券
参考美国国债	美国财政部发行的、息票率为5.25%的、 d'd'm'm'/yyyy到期的债券的卖价收益率
指数信用价差	标的买价的到期收益率减去参考美国国债 的收益率，时间为执行日两天前的东部标 准时间下午12:00
当前价差	1.85%
价差看跌期权执行价	2.1%
看跌期权的回报	名义本金 \times MAX(久期 \times (指数信用价差 - 价差 看跌期权执行价), 0)
久期	8
期权费	名义本金的1.2%

注释

- (1) 银行购买了 XYZ 债券和美国国库券间信用利差的期权。
- (2) 期限尽可能匹配。
- (3) 虽然回报看起来像看涨期权，但 XYZ 债券的价格和利差是负相关的。
- (4) 久期代表了利率变化与价格变化的关系；但只是近似。
- (5) 条款说明书指定了使用买价还是卖价。

41.8.2 二元回报债券

发行方	AAA等级的SPV
标的资产	XYZ公司d'd'm'm'/yyyy到期的息票率 7.25%的债券
名义本金	1 000万美元
到期日	d'd'm'm'/yyyy
价格	平价
息票率	9%
息票支付日	……
本金赎回价	平价，除非违约条款被触发
违约条款	票据存续期内任何时候若XYZ无法对标的 资产支付，本票据将停止付息并以零 价格赎回

注释

- (1) 本合约适合那些相信不会发生违约并打算持有债券至到期的投资者。
- (2) 与 CDS 不同的是它没有回收值。

41.8.3 数字利差期权，委内瑞拉平价债券 1 年期票据

发行方	AA或更高等级
名义本金	7 500万美元
结算日	两周后
到期日	结算日后1年
价格	平价
标的指数	2023年6月到期的委内瑞拉布雷迪债券
参考美国国债	美国财政部发行的、息票率为7.125%的、2023年2月到期的债券
指数信用价差	用平价的买价（扣除应计利息）计算的到期收益率减去参考美债卖价的收益率，时间为到期前两日的下午12:00
息票率	0
本金赎回价	若指数信用价差在4%到6%之间，则为本金的111%；否则为本金的102%
当前指数价差	平价

注释

“数字”这个定语通常表示回报不连续。

41.8.4 篮子信用票据

发行方	AAA等级的SPV
本金	2 500万美元
到期日	dd/mm/yyyy
价格	平价
息票率	6个月LIBOR+1.5%
息票支付日	……（6个月一次）
本金赎回价	平价，除非触发违约条款
违约条款	在票据存续期内若篮子中的任何债券违约，投资者将收到该债券面值的80%或篮子中的另一只债券。发行方不承担任何后续义务
篮子组成	ABC DEF GHI …

注释

- (1) 投资者可以在违约时得到一些东西，还可享受更高的息票。
- (2) 违约发生时，投资者可以得到违约债券面值的80%，当然此时该债券的市场价值是远远小于面值的。
- (3) 相关性和多样化起了什么作用？此时投资者希望资产是相关的。我们

可以简单地计算出：无任何违约发生的概率是多少？当债券是完全相关时，计算也很简单：一只违约意味着全部违约。

41.8.5 资产互换看跌期权

互换的细节：	
标的	ABC公司发行的、息票率6.65%、到期日为2006年10月的债券
名义本金	2 000万美元
资产互换结算日	1年后
资产互换到期日	债券到期日
资产互换价格	100美元
资产互换息票率	3个月LIBOR+0.6%每季度，实际天数360
当前资产互换利率	3个月LIBOR+0.55%
信用互换期权细节：	
看跌期权买方	银行
看跌期权卖方	投资者
看跌信用价差期权	银行有权（非义务）在决定日将资产互换卖给投资者
银行的期权支付	名义本金的0.4%
决定日	或有资产互换结算日5天前
现金结算条款	投资者可以选择在结算日以资产互换息票率和当时标的资产交易价之差的现值进行现金结算

注释

(1) 银行支付为 $0.4\% \times 2\,000$ 万美元 = 8（万美元）。

(2) 1年之后银行可以执行这个期权从而进入一个资产互换。如果银行选择执行期权，那么

- 银行将按面值将资产出售给投资者；
- 投资者将支付给银行6.65%的息票；
- 银行将支付给投资者 $\text{LIBOR} + 0.6\%$ 。

41.9 信用衍生品定价

我们将详细地考察两个信用衍生品，并以此观察建模的可能方法。第一个例子是用1份风险债券交换一定量的等价值无风险债券的期权。我们将使用随机违约强度模型来为该合约建模。第二个例子是一个由评级改变引发回报的合约；对

该合约显然需要使用可以明确捕捉评级变化的模型。

41.10 交换期权

用一份有风险零息债交换 q 份无风险债券的期权的回报为：

$$\max(qZ - Z^*, 0)$$

其中 q 是固定的常数。

给该合约定价可以在几个不同层次的复杂度进行。

第一个层次是假设无风险利率和违约强度都是确定性的。此时无风险债券和风险债券的价格都是完全确定性的。这样的模型不能令人满意，因为在为回报非线性的合约定价时随机性是非常重要的。

第二个层次是假设利率和违约风险中有且只有一个是随机的。比如，假设利率是随机的但是违约风险是常数。这是一个常见的方法，其结果通常为风险债券的收益率会增加一个固定的利差，就像第 40 章中介绍的那样。我们来看看如何在交换期权上使用该方法。（注意：该方法也不能得出有用的结果，但是分析过程仍然具有一定的指导意义。）

第一步是为无风险债券定价。如果到期日是 T_B ，本金为 1 美元，则债券价格满足方程

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{1}{2}\omega^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} + (u - \lambda\omega) \frac{\partial Z}{\partial r} - rZ = 0$$

其边界条件为

$$Z(r, T_B) = 1$$

其中， $u - \lambda\omega$ 和 ω 分别是瞬时利率的风险调整漂移率和波动率。

而风险债券的价格满足：

$$\frac{\partial Z^*}{\partial t} + \frac{1}{2}\omega^2 \frac{\partial^2 Z^*}{\partial r^2} + (u - \lambda\omega) \frac{\partial Z^*}{\partial r} - (r + p)Z^* = 0$$

其边界条件为

$$Z^*(r, T_B) = 1$$

方程的解为

$$Z^*(r, t) = e^{-p(T_B-t)} Z(r, t)$$

两个债券价格的关系是完全确定的，这是违约强度为常数的假定导致的。显然这将使得交换期权的定价无法进行。此合约定价的微妙之处来自违约风险的随机

性。像这个例子一样，通常在为信用衍生品定价时假设违约强度为常数是合适的。

继续第二个层次的分析，一个更好的假设是利率由远期利率给定，而违约强度 p 满足一个随机微分方程。对我们的合约来说，这比上一个方法更有意义。

假设

$$dp = \gamma dt + \delta dX$$

简单起见，假设利率是常数，可以得到

$$Z = e^{-r(T_B-t)}$$

及

$$\frac{\partial Z^*}{\partial t} + \frac{1}{2}\delta^2 \frac{\partial^2 Z^*}{\partial p^2} + \gamma \frac{\partial Z^*}{\partial p} - (r+p)Z^* = 0 \quad (41-1)$$

边界条件为

$$Z^*(p, T_B) = 1$$

求解 $Z^*(p, t)$ 的问题从数学上来看和前面在随机利率但是固定违约概率下求解 $Z^*(r, t)$ 是一样的。我们又一次看到了违约风险和利率之间的相似性。但现在定价的对象是价值为 $V(p, t)$ 的交换期权，其回报为

$$\max(qe^{-r(T_B-T)} - Z^*(p, T), 0)$$

括号内的第一项是一个常数，所以该问题看起来完全就是一个零息票债券的看跌期权定价问题，后者我们在第32章中已经讨论过了。我们甚至可以进一步将因子 $e^{-r(T_B-t)}$ 从括号中提取出来，再改写式(41-1)使其完全不再出现。如果这样做唯一的不同点将是 p 取代了之前偏微分方程中经常出现的 r 。当然这里我们仍旧需要选择方程中的 γ 和 δ ，但在实际中，只要选择合适的形式使我们能够得到解析解就可以了；于是我们又回到了第30章中已经熟悉的领域。

下一个复杂的层次是令利率和违约强度都是随机的。 Z 和 Z^* 都满足方程

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \rho w \delta \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial p} + \frac{1}{2}\delta^2 \frac{\partial^2 V}{\partial p^2} + (u - \lambda w) \frac{\partial V}{\partial r} + \gamma \frac{\partial V}{\partial p} - (r+p)V = 0 \quad (41-2)$$

但无风险债券独立于违约风险，所以 $Z(r, t)$ 当中不含 p 。风险债券依赖于违约风险，因此其价格是3个变量的函数 $Z^*(r, p, t)$ 。

首先我们要根据

$$Z(r, T_B) = Z^*(r, p, T_B) = 1$$

来求解标的债券价格。然后再求解交换期权价格 $V(r, p, t)$ ，它仍旧满足式 (41-2)，但边界条件变为

$$V(r, p, T) = \max(qZ(r, T) - Z^*(r, p, T), 0)$$

因为交换期权是二阶合约，其价格可能会对模型相当敏感。

41.11 违约只发生在需要支付的时点

现在我们来简单看一下如果公司只在逼不得已时才会违约会怎么样。这个模型来源于一个重要的观察，即在息票支付日还没到的时候违约是完全没有意义的。没有绝对必要的话什么公司会宣布违约呢？毕竟公司还可能有机会恢复生机。因此，也许使用违约强度的模型都没有捕捉到真实的情况。[⊖]

41.11.1 市场对违约风险的估计

我们从可违约的零息债开始。假设在利率 r 为常数的世界中，该债券的市场价格是 Z^* 。根据

$$p = \frac{\log\left(\frac{Z}{Z^*}\right)}{T-t}$$

可以建立风险债券的市场价格和违约风险的市场估计之间（在某种意义上）的联系。符号的含义跟以前一样。我使用“某种意义上”是因为该结论来自于违约强度模型，而我刚刚说过违约强度模型难以捕捉真实情形。这没关系，因为在这里我只是将 p 当作债券的市场价格的一个代理变量。这样做只是因为作为变量，它比 Z^* 更容易处理。

我们暂时不必担心该估计值与其真实值之间是否有关。无论如何我们至少可以计算出 p 并估计其随机过程。使用合适的方法，我们可以得到

$$dp = \mu dt + \sigma dX$$

如果需要的话可以将里面的系数设定为依赖于 p 和 t 的。

41.11.2 对冲

现在让我们用此债券来对冲信用衍生品：

[⊖] 好吧，这说的也许有点过了。

$$\Pi = V - \Delta Z^*$$

这可以做到吗？当然可以，因为 Z^* 是可交易的，而且模型不允许出现到期之前违约的情况。在本模型中完美对冲总是可能的。

组合价值的变化为……要消除风险需要：

$$\Delta = - \frac{\frac{\partial V}{\partial p}}{(T-t)e^{-(r+p)(T-t)}}$$

……令其收益率等于无风险利率……最后可以得到[⊖]

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial p^2} + \left(\frac{p}{T-t} + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right) \frac{\partial V}{\partial p} - rV = 0 \quad (41-3)$$

再写出边界条件和终值条件就完成了所有工作。

41.12 基于评级改变的回报

比违约就支付的回报更微妙的是由评级改变引发的回报，比如说前面提到的韩国发展银行票据。下面我将介绍这类合约中两种不同类型产品的定价。在第 1 个例子中只有当到期目标的资产的评级为特定值时合约才有回报。在第 2 个例子中只要在到期前任意时刻标的资产曾经到达过特定等级，合约就有回报。

假设发行者现在的评级为 AAA 级；一个合约规定如果在某个特定的日期该发行者的评级只有 AA，那么合约的持有者就能得到一个固定数额的回报。显然，要为此合约定价需要一个明确允许评级变化的模型。让我们使用第 40 章中的马尔科夫链模型，并假设利率是常数。需要求解的方程为

$$\frac{dV}{dt} + (Q - rI)V = 0$$

合约规定等级为 AA 就有回报，这必须在终值条件中体现出来。因为除非发行者等级为 AA，否则合约没有支付，所以终值条件为

$$V(T) = e_{AA}$$

其中 e_{AA} 是一个列向量，除了跟等级 AA 对应的那一行的元素是 1 外，其他所有行的元素都是零。

在任何时候等级下降到 AA 就有回报的合约更有吸引力，而其定价并没有变

⊖ “……” 表示跳过了常见步骤。

得困难太多。将该合约想象成一个“敲入”障碍期权可以帮助你更好地理解。在障碍期权中，回报由标的价格触及给定的水平而引发。当前的信用衍生品情况与之类似，在这里信用评级扮演着障碍期权中标的价格的角色。

跟前面一样，我们需要求解

$$\frac{dV}{dt} + (Q - rI)V = 0$$

终值条件为

$$V(T) = e_{AA}$$

但现在有一个额外的边界条件，它相当于敲入期权的障碍边界条件

$$V_{AA} = 1 \quad (\text{对所有 } t < T)$$

其中 V_{AA} 是向量 V 中与 AA 等级相对应的元素。换句话说，一旦等级 AA 被触碰，我们立刻可以得到大小为 1 的支付。在此类合约中允许触发生效的时间段通常是有限制的。跟 V_{AA} 有关的边界条件只有在允许触发的时段才生效。

让我们再来看看韩国发展银行票据。这跟上一个问题非常相似。不同的地方在于票据的持有人可以将票据回售给发行者，而不是在发生降级的时候获得固定金额。所以边界条件变为

$$V_i \geq 1 \quad (\text{对所有 } i \leq i^*)$$

其中 i^* 表示触发看跌期权的信用等级。（跟美式期权的情况类似，如果利率是非扩散的，期权价格一阶导数的连续性不再是必要条件。）

最后一个例子，**评级保护票据**（rating protected note）定期支付息票，但息票数额取决于当时的信用等级。通常来说等级越低息票越高。在为其定价时需要跳跃条件

$$V(t_i^-) = V(t_i^+) + c$$

c 中的元素为每个信用等级下需要支付的息票数额。

41.13 多因子衍生品

图 41-10 显示了在信用事件中变得可赎回的债券的细节。其到期回报跟 JP 摩根 EMBI+ 指数的增长相关。要给该债券定价，我们必须对发行公司发生信用事件的可能性和相关指数的行为建模。

SECURITY INFORMATION		IDENTIFICATION #'s		ISSUER INFORMATION	
COUPON FREQ	ANNUAL	ISIN	XS0086414470	BETA FINANCE CORP LTD	
COUPON TYPE	FIXED	MLNUM	99999	FINANCIAL	
MTY/REFUND TYP	CALLABLE	COMMON	008641447	REDEMPTION INFO	
CALC TYP(751)	ACCRUED ONLY			MATURITY	05/08/01
DAY COUNT(20)	ISMA-30/360			NEXT CALL	
COUNTRY/CURR	KY /USD			WORKOUT	05/08/01
AMT ISSUED(M)	35,000	ISSUANCE INFO		RATINGS INFO	
AMT OUTSTAND(M)	35,000	ANNOUNCE	05/06/98	MOODY	Aaa
MIN PC/INC	1,000,000/ 1,000,000	1st SETTLE	05/08/98	S & P	AAA
PAR AMOUNT	1,000,000.00	1st COUPON	05/08/99	COMP	AAA
LEADNGR/UWRTR	JPM-sole	INT ACCRUAL	05/08/98	DCR	NA
EXCHANGE	LONDON	PRICE @ ISS	100.0000	FI	NA
MARKET ISSUE	EURO MTN				
COLLATERAL TYP	SECURED				

DL18 Corp ODES
Enter 11 <GO> for Involved Parties
Enter 1 <GO> To See Other Available Info
STRUCTURED NOTE DESCRIPTION Page 1 of 3
BETA FINANCE CRP BETA 0 '2 05/01 NOT PRICED

SERIES EMTN

NOTES: HAVE PROSPECTUS, TAX CHANGES CALL
RDMPTN LINKED TO THE JP MORGAN EMBI+ COMPOSITE NON-LATIN INDEX. SEC'D BY ASSETS.
CALL IF CREDIT EVENT ON UNDERLYING OCCURS, SERIES 615.

Copyright 1999 BLOOMBERG L.P. Frankfurt 1-69-220410 Hong Kong 2-2977-6000 London 171-238-7500 New York 212-318-2000
Printed on 609-279-3000 Singapore 422-2300 Sydney 2-2777-8996 Tokyo 3-201-8900 Sao Paulo 11-2048-4300
1741-53-0 08-Sep-99 19:22:46

Bloomberg

图 41-10 回报依赖于指数的债券

资料来源：彭博资讯。

41.14 连接函数：为多标的信用衍生产品定价

虽然在前面只做了简单的介绍，但具有多个标的的信用衍生品最近非常流行。作为天生的怀疑论者，在这些建模方法广泛地应用于金融领域之际，我不得不说部分此类金融工具以及使用的一些模型令我非常担心全球金融市场的未来。至于其中的人就更不必提了。不过没关系，也许仅仅只是我一个人在杞人忧天。现在，我们来看一下其中的想法和工具中最重要的部分。

41.14.1 连接函数

现在在多标的信用衍生产品定价中最常用的技术是连接函数（copula）。连接函数^①以一种相对透明的方式简化了多种标的之间的违约依赖结构。其诀窍在于将各资产个体的违约分布跟这些资产之间的违约依存分离开来。这样你在校准的时候可以一个一个资产进行分析，然后再将它们组合到一个多元分布中去。从数学上来讲，用连接函数来表示依存关系（每一个资产有一个边际分布，再加上一个依存结构）跟使用多元密度函数没有任何区别。但连接函数可以简化分析。

① 来源于拉丁文“join”。

实际上, 连接函数方法使得我们可以几乎无缝地从单资产违约世界进入多资产违约世界。而且通过选择依存的性质或者说连接函数, 我们可以探索复杂程度远高于之前见过的多元高斯世界的“相关性”模型。比如说, 考虑市场大幅变动时相关性更高这一显而易见的事实模型。

41.14.2 数学定义

取 N 个同分布的随机变量 U_1, U_2, \dots, U_N , 每一个的定义域都是 $[0, 1]$ 。连接函数 (见 Li, 2000) 的定义为

$$C(u_1, u_2, \dots, u_N) = \text{Prob}(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2, \dots, U_N \leq u_N)$$

显然有

$$C(u_1, u_2, \dots, 0, \dots, u_N) = 0$$

和

$$C(1, 1, \dots, u_i, \dots, 1) = u_i$$

这就是连接函数。下面我们介绍它如何连接多个单变量分布和一个多元分布。

令随机变量 x_1, x_2, \dots, x_N 的累积分布函数为 (也叫边缘 (marginal) 分布) 为 $F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_N(x_N)$ 。用连接函数将这些 F 联合起来

$$C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_N(x_N)) = F(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

易知函数 $F(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 跟下式是一样的

$$\text{Prob}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_N \leq x_N)$$

该主题的一个常见参考文献是 Sklar(1959), 他证明了任何多元分布都可以写成连接函数的形式, 即上述过程的逆过程。

在使用连接函数的方法来为篮子信用衍生品定价时, 我们将模拟篮子中每个成分资产的违约时间。然后我们进行多次的模拟, 以分析相关现金流现值的均值、标准差、分布等统计性质。

41.14.3 连接函数的例子

下面是一些二元连接函数的例子, 它们可以很容易地扩展到多元情形。

1. 二元正态

$$C(u, v) = N_2(N_1^{-1}(u), N_1^{-1}(v), \rho) \quad (-1 \leq \rho \leq 1)$$

其中 N_2 是二元正态累积分布函数, 而 N_1^{-1} 是二元正态累积分布函数的反函数。

2. Frank

$$C(u, v) = \frac{1}{\alpha} \log \left(1 + \frac{(e^{\alpha u} - 1)(e^{\alpha v} - 1)}{e^{\alpha} - 1} \right) \quad (-\infty < \alpha < \infty)$$

3. Fréchet-Hoeffding 上界

$$C(u, v) = \min(u, v)$$

4. Gumbel-Hougaard

$$C(u, v) = \exp(-((- \log u)^\theta + (- \log v)^\theta)^{1/\theta}) \quad (1 \leq \theta < \infty)$$

此连接函数是极值分布的典型代表。

5. 乘积式

$$C(u, v) = uv$$

其他的连接函数还有 Archimedean, Clayton 和 Student。更完整的列表可以参阅 Cherubini, Luciano 和 Vecchiato (2004)。

有一个用于考察连接函数的简单性质,也许可以帮助你决定哪个才是最能达到目的的连接函数,它就是尾部指数 (tail index)。考察

$$\lambda(u) = \frac{C(u, u)}{u}$$

这是在第二个变量发生了一个概率小于 u 的事件的同时,第一个变量也发生一个概率小于 u 的事件的概率。现在让我们来考察 $u \rightarrow 0$ 时的极限

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{C(u, u)}{u}$$

该尾部指数告诉我们两个极端事件同时发生的概率。

41.15 抵押债务凭证

前面介绍的大部分信用工具都只有一个标的资产,但是抵押债务凭证 (collateralized debt obligation) 或者说 CDO 是一个为组合保险而设计的工具,组合中一般包含数以百计的公司。和其他信用衍生品一样,参与者也分为保护权的买方和卖方。

CDO 不针对整个组合提供保护,而是针对组合的一些部分,即层级 (tranches)。首先将组合的总损失定义为违约造成的所有损失之和。当越来越多的公司违约,那么总损失也将越来越大。接下来设定总损失的百分比作为栅栏以定义层级。比如,可以有 0~3% 的层级、3%~7% 的层级等。当总损失越来越大

并超越了3%、7%等栅栏后，对应层级的持有者就开始得到补偿，补偿增加的速度跟损失增加的速度一样。只有当损失到达你的层级起点（attachment point）时你才开始得到补偿，而损失到达层级终点（detachment point）后你将不再得到额外的补偿。

因此，此工具有两种类型的现金流。

- 保险费：保护权买方定期付给卖方保险费，以基差的形式报价。可能还有前端保费。
- “补偿”：工具持有者即保护权买方可以得到自己层级对应的损失额。

说得更明白一些，损失一开始分配给第一层级，直到到达阈值；接下来分配给第二层级，直到到达其层级终点，依此类推。表41-1给出了一个例子。

表 41-1 一个典型的 CDO 及其层级

层 级	前端保险费 (%)	持续保险费 (基点)
0~3%	42	500
3%~7%	0	331
7%~10%	0	126
10%~15%	0	54
15%~30%	0	16

资料来源：St Pierre (2004)。

显然，要为这些工具定价必须考虑各资产的违约概率以及它们之间的相关性结构。在实践中经常使用的一个模型是高斯连接函数法。到目前为止，其效果都是不错的。因为标的和参数数量很多，为了使问题更容易处理，往往会假设相关性结构仅由一个随机因子描述。每一个资产都有专属于自己的随机源，但是所有的资产间存在着一个共同因子。为了进一步简化问题，通常假设可以用一个数值代表所有的相关性。或者说只有一个相关性参数。也许（至少）这简化得有点过了。做出这些假设的一个原因是之前一直在使用的，那就是要得到一个简单的定价公式。

在单参数框架下如何使用该参数？假设我们要为一个新的 CDO 定价，而我们已经有有一个跟它没有太大差别的可交易 CDO 的价格。我们可以从价格已知的 CDO 中提取隐含系数（implied correlation）或复合相关系数（compound correlation），并将之代入另一个 CDO 的定价模型中。显然，这是我们在股票、外汇或固定收益等有波动率的资产的衍生品市场中经常做的一项工作。这只是校准的另外一

种形式而已。

这里有一个重要的问题。跟非信用衍生品世界中发生过的事情一样，我们发现对每个层级需要不同的隐含相关系数。作为一个典型的例子，你可能会观察到隐含相关系数从第一级到第二级是下降的，但是到了第三级和后面的层级，隐含相关系数又会上升（Finger, 2004）。这跟我们在前面见过的隐含波动率微笑和偏度的情况类似。这意味着市场允许跟单相关系数假设不一致的情形出现。这值得注意，但不是什么大麻烦。真正需要担心的问题是你也可能会发现存在着两个可能的隐含相关系数，或者隐含相关系数不存在。这意味着市场价格要么跟两个可能的常相关系数一致，要么不存在同时符合理论和市场价格的常相关系数。一般而言，如果我们画出层级对隐含相关系数的图形，会发现这是一条非单调的曲线。为何这值得忧虑？回想一下我们在隐含波动率中见过的例子，特别是详细介绍过的向上敲出看涨期权的例子（见第7章和第23章）。在这里我们遇到了同样的问题。在花费一整段的篇幅来对此进行扩展之前，让我们先来看一下CDO定价的一个最终方法。

使用表中的例子，你可以将3%~7%的层级看作0~7%层级多头加上0~3%层级空头的组合。因此可以很容易为根本不存在的0~7%层级定价。可以从0~3%层级的市场数据中倒推出第一个层级的隐含相关系数。接下来可以倒推创造出来的0~7%层级的隐含相关系数。这被称为**基层相关系数**（base correlation）。现在可以用这些基层相关系数来为拥有0~ x %层级的其他CDO定价，然后依此构建 y %~ x %等层级。

了解了这些之后，让我们回到之前的问题。你还记得向上敲出看涨期权的隐含波动率非唯一意味着什么吗？这是由价格对隐含波动率的图形非单调造成的。该图形先上升到一个高点然后下降。如果在CDO中也发生这种情况，那就必须要敲响警钟了。在敲出期权的例子中，非单调性是由于持续存在着两种相互竞争的效应。如果期权处于虚值状态，我们希望波动率高一点让我们有机会进入实值状态并得到回报。但一旦期权进入实值，我们又会期望出现低的波动率，以保证不会被敲出而失去期权。因此，波动有时候对我们有利，有时候反而不利。在第52章中我们会看到如何将这与Gamma的符号相联系，以及如何考察简单的常数波动率之外的更多场景。我们会发现真正坏（和真正好）的情景跟更丰富的波动率结构有关，而不是取决于波动率的简单平行移动。比如说偏度可能对障碍期

权的价值起到非常非常重要的影响。现在我们来考虑比障碍期权更一般化的例子：两个相互竞争的效应，一个有利，一个有害。在 CDO 中一定存在某种类似的東西。有时候相关性是有好处的，有时候相关性是有害的。如果好事没有发生，只有坏事留下来，会怎么样呢？这跟我们考察障碍期权时发生的事情一样。我们当时说过，如果在虚值情况下作为利好的波动率增大没有发生，而在实值状态下波动率却上升了，这显然将使我们遭受损失。最终的结果使得障碍期权的价值比波动率一致增加的情况要低很多。在 CDO 中发生了完全一样的事情。如果有利的相关性没出现，而不利的相关性却提高了会怎样？嗯，价格会比你期望的要低很多。

因为标的数以百计，潜在的变量和参数会非常多，所以要考察更多有意思的情况会困难很多。但假设标的资产之间的相关性至少有两个随机源，就是在正确的方向上迈出了一步。也可以假设相关系数随总损失变化而变化。

41.16 总结

在我看来，目前违约风险建模的状况还远未达到令人满意的程度。建模和参数估计中的问题非常多。在后面的章节中我们将看到如何绕开期权世界的参数不确定性。这些精致的模型，例如最坏情景分析，在这里没有太大的用处，因为这里最坏情形的性质太过极端。未来进一步研究的一个可能方向是把个人对违约风险的估计和定价跟市场的估值和定价分开。

要衡量违约风险是很难的，不管是通过分析时间序列数据还是进行基本面分析。甚至有可能你努力的结果跟定价问题没有任何关系。举个例子，假设你购买一个风险债券，打算持有 1 年的时间，而且你认为在这 1 年中没有违约的风险。在你想要卖掉它的时候（你希望在考虑了所有现金流后是盈利的），那到时该债券会值多少钱？答案是这取决于市场对违约可能性及违约时间的主观判断，而跟任何客观的违约风险无关。另一方面，如果你购买一个债券是想要持有至到期，那么违约风险将是最重要的；谁还关心市场怎么看？这个例子表明区分市场所用的“模型”和你自己所用的关于真实情况模型是非常重要的。在第 59 章中会讨论这个问题造成的一些后果。

拓展阅读

- 关于信用衍生品的定价和对冲见 Das (1995)、Schonbucher (1996, 1997a, b,

1998), Schönbucher 和 Schlögl (1996) 等论文。

- 关于信用衍生品定价与对冲中的技术性方面最好的书籍是 Schönbucher (2003)。
- 关于第一违约互换的分析见 Penaud 和 Selfe (2003)。
- 对 CDO 定价问题的一个全面完整的研究见 Finger (2004)。
- Li (2000) 有对连接函数方法的一个清楚的介绍。
- 对连接函数更详细的技术性解释可以参考 Nelsen (1999) 和 Cherubini, Luciano 和 Vecchiato (2004) 等书籍。



“信用”的合理度量是信用利差。在 20 世纪 90 年代，信用利差是衡量信用风险的主要指标。然而，随着信用衍生品的出现，信用利差不再是一个单一的指标，而是变成了一个复杂的、多维度的概念。信用利差的度量需要考虑许多因素，包括违约风险、回收率、相关性等。此外，信用利差的度量还受到市场流动性、信息不对称等因素的影响。因此，信用利差的度量是一个复杂的问题，需要综合考虑多种因素。

在信用衍生品定价中，信用利差是一个重要的输入参数。信用利差的度量直接影响到信用衍生品的定价。因此，如何准确地度量信用利差是信用衍生品定价中的一个关键问题。目前，市场上已经出现了一些度量信用利差的模型和方法，但这些模型和方法仍然存在许多不足之处。因此，如何改进现有的信用利差度量模型和方法，提高其准确性和可靠性，是信用衍生品定价领域的一个研究方向。



第 42 章

RiskMetrics 和 CreditMetrics

本章内容

- 衡量在险价值的方法——RiskMetrics
- 衡量投资组合违约暴露的方法——CreditMetrics

42.1 引言

在第 19 章中我介绍过投资组合的“风险价值” (VaR) 这个概念。这里再复习一下 VaR 的定义: VaR 是“在给置信度下, 某一投资组合在给定时间内的最大可能损失的一个估计值”。在那一章中, 我介绍了计算 VaR 的一些方法 (以及这些计算方法的一些缺陷)。一般来说, 计算 VaR 需要的数据包括“标的资产”的参数以及投资组合对这些标的的风险暴露。其中参数包括资产的波动率和相关系数, 投资期限较长时还要加上漂移率。投资组合的风险暴露用 Delta 来衡量, 如果必要还要加上投资组合的 Gamma (包括交叉导数) 和 Theta。很明显, 投资组合的敏感性最好是由投资组合的所有者——银行来计算。然而, 资产的参数任何拥有相关数据的人都可以进行估计。1994 年 10 月, 美国的银行 JP 摩根推出了一项估计 VaR 参数的服务——**RiskMetrics** 系统。



JP 摩根还提出了一种用于估计违约风险的类似方法和数据服务，那就是 CreditMetrics。推出 CreditMetrics 出于好几个目的，其中的两个是建立一个衡量信用风险的基准和增加市场的流动性。如果成功达到第一个目的，那系统地衡量不同金融工具的违约风险就成为可能，至少可以判断它们的相对价值。由此就自然地达成了第二个目的。因为一旦各种金融工具尤其是其中涉及的风险被更好地理解，它们看起来就不会那么令投资者恐惧，流动性自然会得到增强。

42.2 RiskMetrics 数据集

RiskMetrics 数据集有很高的广泛性和综合性。其中包括 3 种类型的数据：第 1 种数据用于估计期限为 1 天的风险，第 2 种数据用于估计期限为 1 个月的风险，而第 3 种数据用于满足国际清算银行关于使用内部模型估计市场风险的要求。这些数据集包括将近 400 种金融工具的波动率和相关系数的估计，涵盖了外汇、债券、互换、商品和股票指数。在数据集中可以找到多种货币的期限结构信息。

42.3 RiskMetrics 的参数计算方法

在 JP 摩根的网站上可以找到其估计金融参数方法的详细技术文档。在这里我简单地介绍一些要点。

42.3.1 波动率估计

资产的波动率用收益率的年化标准差来衡量。实际的计算方法有很多。最简单的方法是往前取一段特定的时间长度，比如 3 个月，计算每一天（或你进行再次对冲的常用时间长度）的收益率，然后计算这些数据的样本标准差。这样可以得到 3 个月期波动率的时间序列。[⊖]该方法对过去 3 个月的所有观测点赋予了相等的权重。第 i 天的波动率估计结果为

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{\delta t (M-1)} \sum_{j=i-M+1}^i (R_j - \bar{R})^2}$$

其中 δt 为时间步长（通常是 1 天）， M 是估计期的总天数（3 个月的话将近 63

[⊖] 该波动率跟 3 个月的隐含波动率未必一致。

天), R_j 是第 j 天的收益率, \bar{R} 是过去 M 天的平均收益率。当 δt 很小时在实际操作中可以忽略 \bar{R} 。

这种波动率衡量方式有两个主要的缺点。第一, 我们并不知道应该使用多少天的数据; 3 个月前发生的事可能和现在不相关。但如果过去的时段中波动率的确没有发生变化, 那么使用的数据越多抽样误差就越小。第二, 一个大的正或负的收益率将会影响下面 3 个月的历史波动率。这段时期结束时, 波动率会突然下降, 但市场状况并没有发生显著变动; 波动率的下降完全是虚假的。因此, 用这种方法得到的波动率将出现“高原”。图 42-1 是典型的具有高原的 30 天的波动率序列。

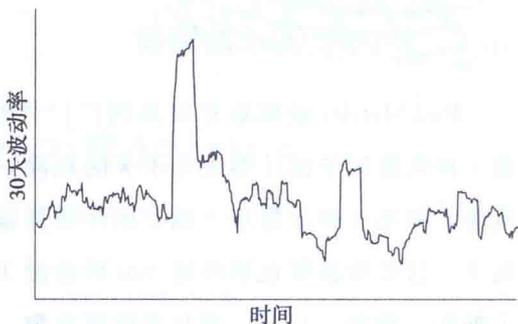


图 42-1 30 天波动率

在 RiskMetrics 中, 波动率的估计值为收益率平方的指数加权移动平均的平方根。这就确保了单个收益率对波动率的影响是随着时间递减的, 而且也不会出现高原。波动率计算公式为

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1-\lambda}{\delta t} \sum_{j=-\infty}^i \lambda^{i-j} R_j^2}$$

其中, λ 表示过去的波动率对当前收益率的权重 (在这里假设时间间隔足够小, 因而忽略了 R 的均值)。如果把上面的公式写成下面的形式, 权重造成的差异就显而易见了。

$$\sigma_i^2 = \lambda \sigma_{i-1}^2 + (1-\lambda) \frac{R_i^2}{\delta t}$$

JP 摩根选择的参数 λ 为日数据 0.94 和月数据 0.97。另一种选择 λ 的方法是通过最小化历史波动率平方和隐含波动率平方之差。

图 42-2 的电子表格展现了如何计算这种指数加权的波动率。从当中的图形可以看出, 指数加权波动率比等权重波动率的表现“更合理”。

42.3.2 相关系数

相关系数的估计与波动率的估计类似。我们既可以对过去 M 天的收益率取等权重来计算资产 1 和资产 2 的协方差

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	初始波动率	0.3		日期	股票价格	收益率	波动率平方	波动率
2	Lambda	0.97		1-Jan-85	218.32		0.09	0.3
3				2-Jan-85	217.16	-0.005313	0.087513	0.295827
4		= (E3-E2)/E2		3-Jan-85	215.24	-0.008841	0.085479	0.292368
5				4-Jan-85	215.24	0.000000	0.082915	0.287949
6		= B1*B1		7-Jan-85	217.16	0.008920	0.081029	0.284655
7				8-Jan-85	220.25	0.014229	0.080129	0.28307
8		= \$B\$2*G7 + (1-\$B\$2)*F8*F8*252		Jan-85	224.87	0.020976	0.0761051	0.284695
9				10-Jan-85	224.87	0.000000	0.07862	0.280392
10				11-Jan-85	224.1	-0.003424	0.07635	0.276314
11		= SQRT(G11)		14-Jan-85	219.09	-0.022356	0.077899	0.278994
12				15-Jan-86	219.09	0.000000	0.075502	0.274777
13				16-Jan-85	222.17	0.014058	0.074731	0.273371
14				17-Jan-85	226.02	0.017329	0.07476	0.273422
15				18-Jan-85	226.02	0.000000	0.072517	0.26929
16				21-Jan-85	226.79	0.003407	0.070429	0.265385
17				22-Jan-85	224.49	0.033952	0.077031	0.277545
18				25-Jan-85	224.49	-0.008188	0.075227	0.274275
19				25-Jan-85	225.55	0.013243	0.074296	0.272573
20				27-Jan-85	227.5	0.019605	0.074973	0.273812
21				28-Jan-85	227.5	-0.003205	0.072802	0.269818
22				29-Jan-85	227.72	-0.024134	0.075021	0.273899
23				30-Jan-85	228.35	0.041203	0.085605	0.292583
24				31-Jan-85	228.35	0.003164	0.083112	0.288292
25				1-Feb-85	230.04	0.007865	0.081086	0.284757
26				2-Feb-85	230.04	0.000000	0.078654	0.280453
27				3-Feb-85	231.89	0.015648	0.078145	0.279545
28				4-Feb-85	231.89	-0.007683	0.076247	0.276129
29				7-Feb-85	231.97	0.000000	0.07396	0.271956
30				8-Feb-85	249.12	0.004638	0.071904	0.268149
31				11-Feb-85	243.35	-0.023162	0.073802	0.271666
32				12-Feb-85	238.34	-0.020588	0.074792	0.273482
33				13-Feb-85	239.5	0.004867	0.072728	0.269681
34				14-Feb-85	238.34	-0.004843	0.070723	0.265938
35				15-Feb-85	235.65	-0.011286	0.069565	0.263751
36				18-Feb-85	232.57	-0.013070	0.068769	0.262239
37				19-Feb-85	234.49	0.008256	0.067221	0.259271
38				20-Feb-85	235.65	0.004947	0.06539	0.255714
39				21-Feb-85	236.42	0.003268	0.063509	0.252009
40				22-Feb-85	235.65	-0.003257	0.061684	0.248362
41				25-Feb-85	234.49	-0.004923	0.060016	0.244982
42				26-Feb-85	235.65	0.004947	0.058401	0.241663
43				27/02/85	232.57	-0.013070	0.05794	0.240708

图 42-2 计算指数加权波动率的电子表格

$$\sigma_{12} = \sqrt{\frac{1}{\delta t (M-1)} \sum_{j=i-M+1}^i (R_{1j} - \bar{R}_1)(R_{2j} - \bar{R}_2)}$$

因为所有收益率等权重，这种方法还是会出现虚假的上升和下降。

或者我们可以选择指数加权法

$$\sigma_{12}^2 = \lambda \sigma_{12, i-1}^2 + (1-\lambda) \frac{R_{1i} R_{2i}}{\delta t}$$

协方差的估计可能存在资产价格变动和度量的同步性问题。可能两个资产是

完全相关的，但是由于度量的时间不同，从估计结果看来可能它们完全不相关。当使用处于不同时区的市场数据时需要注意这个问题。此外，指数加权不能保证方差协方差矩阵的正定性。

42.4 CreditMetrics 数据集

从网站 www.jpmorgan.com 上可以获得 CreditMetrics 数据集。该网站上还有对 CreditMetrics 编制方法的详细介绍。数据集中包括 4 种类型的数据：收益率曲线、利差、转移矩阵和相关系数。在阅读下面章节前，读者应熟悉信用评级的概念（见第 40 章）。

42.4.1 收益率曲线

CreditMetrics 中的收益率曲线数据涵盖了各种主要货币的无风险到期收益率。图 42-3 是无风险收益率的一个例子。数据包括的收益率期限有 1 年、2 年、3 年、5 年、7 年、10 年和 30 年。从收益率曲线数据中我们可以得到诸如剩余期限为 3 年的美元债券的收益率为 6.12% 这样的信息。

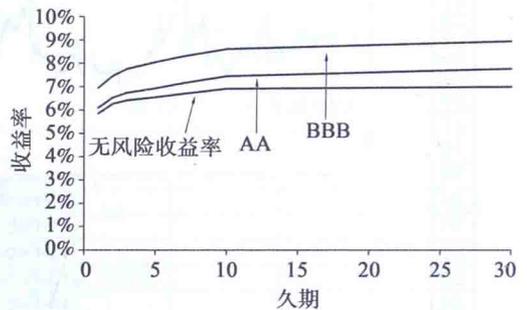


图 42-3 无风险和 2 个有风险的收益率曲线

42.4.2 利差

对每一个信用级别，CreditMetrics 数据集给出了该级别债券不同期限的收益率和相应无风险收益率之间的利差。图 42-3 展示了典型的美国的无风险收益率曲线，以及 AA 级和 BBB 级债券的收益率曲线。例如数据集可能会告诉我们剩余期限为 3 年的 AA 级债券收益率和无风险利率之间的利差为 0.54%。从图中可以看出，风险越高的债券收益率越高；任一剩余期限的 BBB 级债券收益率都在相应的 AA 级债券收益率之上，AA 级债券的收益率则在无风险收益率之上。风险债券具有更高的收益率是针对未来不能按时收到息票或本金的可能性做出的补偿。

42.4.3 转移矩阵

第40章已经介绍过转移矩阵的概念。在 CreditMetrics 框架中，转移矩阵中的元素表示在给定时间期限后债券信用评级发生变动的概率，例如从 AA 级上升到 AAA 级的概率可能是 5.5%。CreditMetrics 的转移矩阵对应的时间期限是 1 年。除非时间很长，可能性最大的是保持债券原有评级不变；比如在这个例子中 AA 级别的债券保持在该级别的概率为 87%。

42.4.4 相关系数

在无风险收益率曲线、利差和转移矩阵中包含了足够多的信息，让我们可以使用 CreditMetrics 方法来推导单个债券未来可能价值的分布。下一节中我们会介绍如何推导。但在分析风险债券组合表现时，我们必须考虑一个债券的评级变动或违约跟其他债券的评级变动或违约之间的关系。换句话说，不同的公司或政府发行的债券是否具有相关性？这是编制 CreditMetrics 相关系数数据集的原因。该数据集给出了多个国家主要指数之间的相关性。

对每个发行债券的公司，其股票的收益率可以分解为两部分：一部分与这些指数相关，另一部分是公司特有的。通过将所有债券的发行者跟这些指数联系起来，我们可以估计投资组合中各公司之间的相关性。本章后面的部分会介绍实际操作中如何使用该方法。

42.5 CreditMetrics 方法

CreditMetrics 方法介绍了如何估计未来一段时间风险组合的可能价值及相应的概率。让我们考虑一只当前信用评级为 AA 级的风险债券。假设该债券是零息债，剩余期限为 3 年，而我们想知道 1 年后这笔投资的可能状态。该债券的到期收益率可能是无风险收益率 6.12% 加 3 年期 AA 级债券的利差 0.54%，总收益率为 6.66%，价格为 0.819。

未来 1 年中债券价值出现波动的原因有三个：时间流逝、利率变动和债券评级变化。我们依次讨论这三点。

首先由于时间流逝，1 年后该 3 年期债券的剩余期限只剩 2 年。而 1 年后的 2 年期债券的收益率会是多少？这是第二点的内容。CreditMetrics 的假设是当前时

刻到投资期结束之间的远期利率保持不变（“沿收益率曲线滚动”）。根据今天的收益率曲线我们可以计算当前时刻到未来1年、1~2年、2~3年等远期利率。第13章中介绍过远期利率的计算方法。我们可以据此计算1年以后的债券价值，假设结果为0.882。但1年后债券的评级还会是AA级吗？这是第三点。根据转移矩阵，我们可以发现该债券保持在AA级的概率为87%。因此，该债券的价值有87%的概率为0.882。同理，使用相应的远期利率和利差，我们可以得到评级变为AAA、A、BBB等情况下该债券的价值。在转移矩阵中都有相应的概率。图42-4是该债券未来可能价值的概率分布。

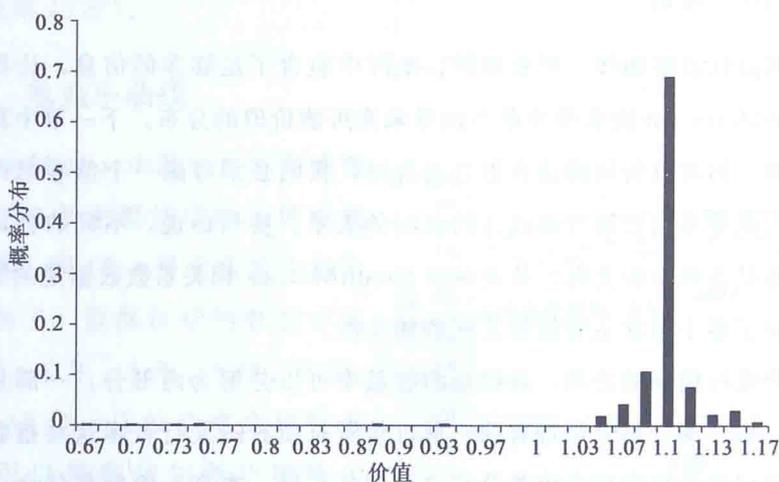


图 42-4 1年后债券价值的概率分布

这是一个偏度很高的分布，从该分布中我们可以知道估计该债券风险所需要的信息。例如，我们可以估计该债券价格的预期值。

42.6 风险债券组合

我们已经了解如何将 CreditMetrics 方法应用到单个风险债券，但要应用到风险债券组合会困难很多。因为我们还需要知道不同债券之间的关系。最简单的度量方法是使用相关系数。

假设我们拥有由两只债券构成的投资组合，其中一只由 ABC 公司发行，当前的评级为 AA 级；另一只 XYZ 公司发行，评级为 BBB 级。使用前面介绍的方法，我们可以计算投资期限内每只债券在每种可能评级状态下的价格。如果假设每只债券有 8 种状态（AAA，AA，…，CCC，违约），那么总共有 $8^2 = 64$ 个联

合状态。为了计算投资组合的预期值和标准差，我们需要知道每一种联合状态发生的概率。这就是相关性发生作用的地方。

估计未来某个联合状态发生的概率分两个步骤进行：

- (1) 计算债券之间的相关系数；
- (2) 计算联合状态的概率。

完成步骤 1 的方法是将每个发行公司的股票收益率分解成跟各主要指数相关的成分。

42.7 CreditMetrics 模型的输出

CreditMetrics 归根结底是一种衡量违约风险的方法。根据 CreditMetrics 方法可以计算出用标准差衡量的特定投资期内某风险资产组合的风险。如图 42-4 所示，由于违约风险的存在，投资组合的收益分布是高度有偏的。收益的分布远非正态分布。因此，使用简单的投资组合理论要非常小心。虽然标准差可能不能很好地度量传统意义上的风险，但它是衡量金融工具或投资组合之间相对风险的很好的指标。

42.8 总结

本章简要介绍了一些扩展和补充在险价值的方法。跟在险价值本身一样重要的是通过比较所有可能的 VaR 估计来清楚地了解投资组合的潜在风险。下一章我们将探讨如何衡量和减少股票市场暴跌风险。

拓展阅读

- Alexander (1996a) 批判了 RiskMetrics 作为风险度量工具的缺陷。
- Shore (1997) 介绍并实施了 CreditMetrics 方法。



第 43 章

CrashMetrics

本章内容

- 衡量投资组合对突发、不可对冲的市场变动的风险暴露的方法——CrashMetrics
- 白金对冲
- 崩盘系数
- 保证金对冲
- 对手方风险
- 衡量崩盘程度的 CrashMetrics 指数



43.1 引言

CrashMetrics 是估计投资组合风险的最后一块拼图。在险价值是正常市场条件下的风险衡量指标，而 **CrashMetrics** 则属于硬币的另一面：它关心的是“甩卖”状况或不正常市场条件下资产的无序变现。**CreditMetrics** 是估计投资组合对极端市场变动或者崩盘的暴露的数据集和方法。该方法假设崩盘是不可对冲的，然后计算最坏情形下投资组合的价值。该方法还告诉我们如何用最优的方式买卖衍生品以缓解崩盘的影响，即所谓的白金对冲 (Platinum Hedging)。衍生品有时被认为是投资组合里的危险成分，但是在 **CreditMetrics** 方法中被当作一剂良方使用。

43.2 为何银行会破产

银行陷入严重麻烦的原因主要有两个。第一个原因是交易员缺少合理或充分的监控。交易员可能由于运气差、不小心或不诚实等原因建立了巨大而难以管理的头寸。其结果要么是交易员成为英雄、银行发大财，要么是银行遭受巨大损失、交易员跑路而银行破产。两者发生的概率是一半对一半。第二个原因是市场崩盘，即股票市场极端、不可预期和难以对冲的变动。

43.3 市场崩盘

在正常的市场条件下，投资组合的价值会频繁波动，但幅度不会太大。换句话说，投资组合的价值可能每一分钟或者每一天都有变动，但不会发生崩盘。但有那么一些时刻，比如说平均一年一次，投资组合会发生非常剧烈的波动，而且通常都是向下的波动。这就是极端市场变动或市场崩盘。VaR 不能告诉我们任何有关这些变动的信息，因此，有必要对此进行单独分析。

崩盘有什么特殊之处？容易想到的有两点。显然，崩盘的时候市场价格会发生突然而迅速的下降而影响到投资组合的变现能力。但是，崩盘并不仅仅是波动率的上升。资产之间关系的变化也是特征之一。崩盘的时候，所有资产的价格会一起下跌。不会发生一半股票的价格下跌而其他股票价格水平不变的崩盘。从技术上说这意味着所有的资产会变得完全相关。正常市场条件下，股票特别是同一行业的股票之间可能存在一定的相关性，但这种联系并没有那么强。事实上，正是因为相关性较弱才使得分散化成为可能。因为可以在多人之间分散风险，小型保险公司才愿意接受你的汽车保险。但地震险就是另外一回事了。较高的相关性使得风险无法分散化。传统的 VaR 在最需要它的时候难以发挥作用。图 43-1 展示了 1987 年股票市场崩盘时一些标准普尔 500 指数成分股之间的相关系数的变化过程。

但并不是毫无办法。VaR 是一个比较新的概念，出现于 20 世纪 90 年代并迅速成为市场标准，但众所周知它存在一些缺陷，因此很多大学和银行的研究人员把视线转向市场崩盘风险的分析 and 防范。其中有些是物理学家，他们考察了收益率分布的尾部；崩盘发生的可能性是否比传统理论的预测更大？答案当然是肯定的。

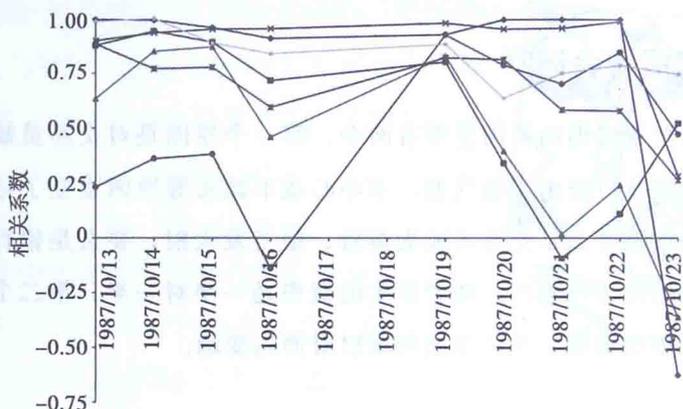


图 43-1 1987 年市场崩盘前后一些资产的相关系数。当相关系数趋于 1 的时候，所有资产同方向变动

我个人偏爱不对崩盘的可能性做任何假设的模型。一种思路是考虑“最坏情景”。既然崩盘可能让你的投资组合血本无归，那你想知道可能发生的最差情况是怎样的吗，还是你觉得知道了平均损失就够了呢。CrashMetrics 可以用于分析最差情况，从而为如何对冲和投保崩盘风险提供建议。

43.4 CrashMetrics 介绍

CrashMetrics 是一种衡量投资组合在金融市场发生极端变动时的表现的方法。它不是 JP 摩根众多组合表现衡量方法中的一种。在第 58 章将全面介绍其最复杂形式的相关概念和数学推导。到时候我们会看到在不对市场变动的时机和幅度做太多假设的条件下，如何计算最差情景下的金融工具组合价值。唯一的假设是市场变动或者说“崩盘”的幅度和次数在某种意义上是有限的。对于崩盘幅度的概率分布和发生的时机没有做任何假设。

更简单的方法是关注我们无法观测或无法对冲的极端市场变动，这也是用于日间组合保护的方法。这就是市场甩卖条件。本章后续部分将详细介绍这种方法。该方法有很多优点，比如简单、容易一般化，而且它并不显性依赖于波动率和相关系数等令人头疼的参数。

43.5 个股的 CrashMetrics 方法

要熟悉相关的思想，我们先来看一个单标的资产的期权组合。但我们暂且以股票类产品为例，虽然相同的思路也适用于外汇、商品或者利率类产品。

如果股票大幅度变动 δS ，那么以该股票为标的的期权组合会如何变化？组合价值变动 $\delta \Pi$ 和 δS 将满足以下关系

$$\delta \Pi = F(\delta S)$$

函数 $F(\cdot)$ 表示组合中单个合约的公式、表达式、数值解等的简单加和。这里可以把它看作很多不同执行价格、剩余期限或者回报形式的布莱克-斯科尔斯公式的加和。如果标的资产价格没有变化，那么组合的价值也不会发生变化，因此 $F(0) = 0$ 。（会有很小时间衰减，后面再做讨论。）

图 43-2 展示的是标的资产价格变动时组合价值变动的一种可能情况。

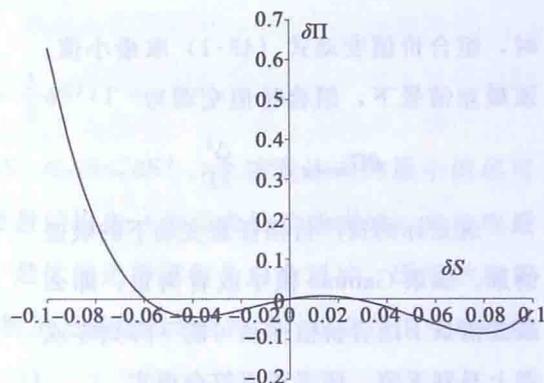


图 43-2 组合价值相对于标的资产价格的变动

如果我们比较幸运，标的资产价格没有太接近期权执行价格，期权也不是临近到期，那可以用泰勒级数来近似标的资产变动引起的组合价值变动：

$$\delta \Pi = \Delta \delta S + \frac{1}{2} \Gamma \delta S^2 + \dots \quad (43-1)$$

事实上，这种近似的效果不会非常好。想象一下，如果组合中有一些敲出障碍期权，那么我们就不得不使用相关公式或数值方法来捕捉这些期权价值在障碍水平附近的突然下跌。简单的 Delta-Gamma 近似将失效。

但从数学的角度出发，我还是会同时介绍一般的 CrashMetrics 方法和简单的泰勒级数版本。

现在请问，在一夜的时间中组合可能发生的最差情况是什么？我们想要找到 $F(\delta S)$ 的最小值。

在实际应用中我们可能只需要考虑标的资产价格暴涨或者暴跌某一确定幅度的结果。因此，我们用下面的式子来限制标的资产的价格变动

$$-\delta S^- < \delta S < \delta S^+$$

如果不能用希腊字母来近似（泰勒级数），那我们可以搜寻

$$\min_{-\delta S^- < \delta S < \delta S^+} F(\delta S)$$

图 43-2 所示的例子存在一个局部最小值，同时也是全局最小值；这就是我们想

得到的全局最小值。

图 43-3 展示了在泰勒近似有效的假设下，组合价值变动随 δS 变化的曲线。注意在 $\delta S=0$ 处组合价值变动取值为 0。如果 Gamma 是正的，则当

$$\delta S = -\frac{\Delta}{\Gamma}$$

时，组合价值变动式 (43-1) 取最小值。

该最差情景下，组合价值变动为

$$\delta \Pi_{\text{worst}} = -\frac{\Delta^2}{2\Gamma}$$

这是标的资产价格任意变动下的最差情景。如果 Gamma 很小或者为负，那么最差情景下组合价值变动可能下降到零或者上升到无穷，两者皆不符合现实。

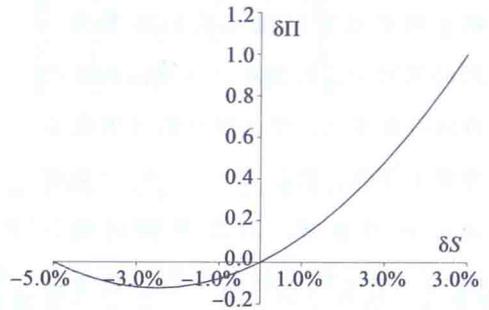


图 43-3 组合价值相对于标的资产价格的变动（泰勒近似）

43.6 组合最优化和白金对冲

既然已经找到了搜寻最差情景下可能结果的技术，很自然就会问如何才能减少最差情景下的损失。可以通过最优静态对冲来达到此目的。

首先我假设泰勒展开可用，然后看一般情形。

假设有一个合约可以用于对冲我们的投资组合。该合约有其买卖价差、Delta 和 Gamma。记该合约的 Delta 为 Δ^* ，表示该合约对标的资产的敏感性。同样将其 Gamma 记为 Γ^* 。买卖价差记为 $C > 0$ ，表示在买入（卖出）的同时卖出（买入）该合约会承担的损失。

假设添加 λ 份对冲合约到我们的初始头寸中，则新组合对崩盘的一阶暴露为

$$\delta S (\Delta + \lambda \Delta^*)$$

二阶暴露为

$$\frac{1}{2} \delta S^2 (\Gamma + \lambda \Gamma^*)$$

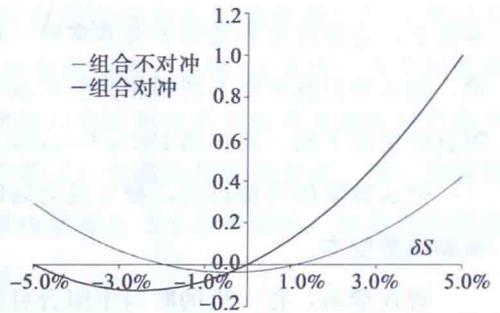


图 43-4 最优对冲情况下，组合价值相对于 δS 的变动（泰勒近似）



当崩盘幅度为 δS 时，组合价值不仅变动了这两项之和，还将承担一个确定金额的损失

$$|\lambda|C$$

这是因为我们在结束头寸时不得不承担买卖价差的损失。

静态对冲后组合的总变动为

$$\delta\Pi = \delta S(\Delta + \lambda\Delta^*) + \frac{1}{2}\delta S^2(\Gamma + \lambda\Gamma^*) - |\lambda|C$$

一般而言，最优的 λ 要使得对 $-\delta S^- \leq \delta S \leq \delta S^+$ ，上述表达式的最小值尽可能的大。因此，我们相当于在用确定数量的损失（由买卖价差造成的）来换取最差情景损失的减少。这就是一种保险，最优的选择就称为白金对冲，因绿钞和黄金之后出现的信用卡而得名。图 43-4 展示了最优的 λ 选择下，组合价值变动幅度对 δS 的曲线。注意它不再经过点 $(0, 0)$ 。

图 43-5 的电子表格展示了如何寻找单个资产的最差情景并进行白金对冲。

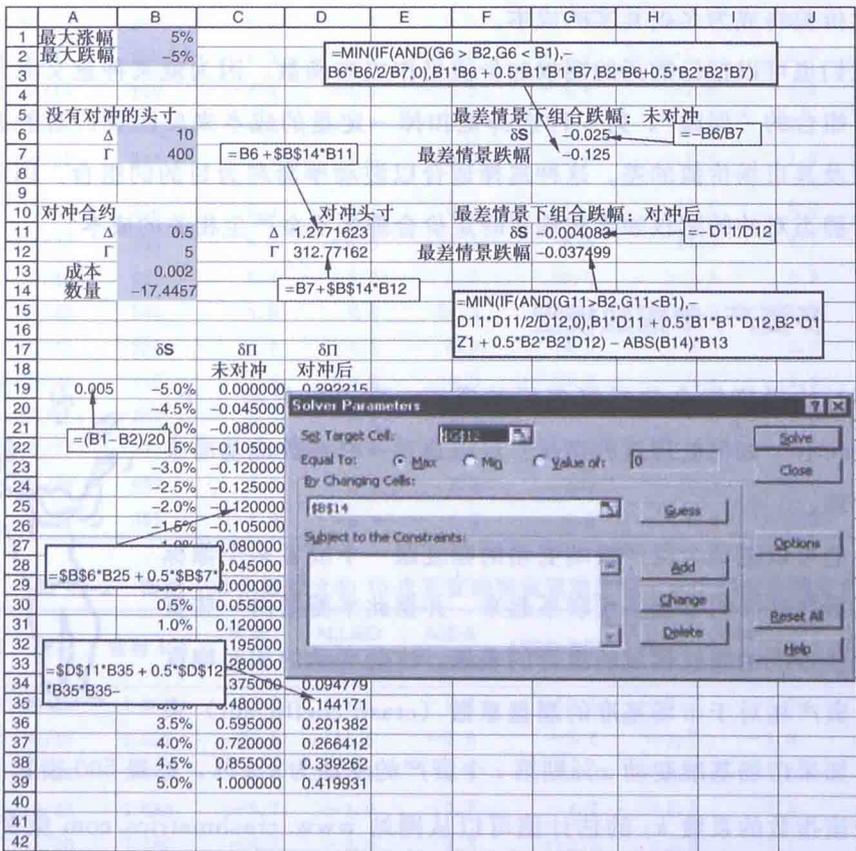


图 43-5 单个资产情况下，实现基本 CrashMetrics 方法的电子表格

一般情况下，我们不能使用泰勒近似。我们必须寻找表达式

$$F(\delta S) + \lambda F^*(\delta S) - |\lambda|C$$

的最小值。其中函数 $F^*(\cdot)$ 是对冲合约价值变动的“公式”。

找到最差情景之后，我们就能通过最优化对冲比率 λ 来尽可能地减少损失。

当然，我们不一定只用一个期权来进行静态对冲，也可能使用很多个。这将如何改变最优化过程？稍后可见分晓。



其他“成本”函数

前文提到的与组合最优化相关的“成本”是静态对冲的买卖价差。这只是成本函数的选择之一。这样选择的原因是第二天我们可能会决定放弃静态对冲，因此买卖价差将成为名副其实的成本。

我们也可以把已购买的期权的价值当作成本函数，因为就某种意义而言它们充当了组合的“保险”。另一种选择是扣掉一定量的成本来反映我们对静态对冲的估值及其市场价值的差。这种选择适合以波动率套利为目的的组合。因此，用于进行静态对冲的期权如果在购买时定价合理将不会产生相关的成本。

43.7 多资产/单指数模型

银行的投资组合包括很多标的资产，而不是只有一个。CrashMetrics 如何处理这种情况？可以通过一个指数或基准来进行处理。

我们可以把单个资产极端变动的幅度跟一个或者多个像标普 500 指数这样的市场基准联系起来，并据此来衡量由一些资产和这些资产的期权构成的组合的表现。这些变动的相对幅度用各个资产相对于市场基准的**崩盘系数**（crash coefficient）来衡量。如果市场基准变动 $x\%$ 则第 i 个资产的变动为 $k_i x\%$ 。标普 500 指数成分股相对于该指数的系数 k_i 的估计值可以从网站 www.crashmetrics.com 免费下载。注意所用的基准不一定非得是包含该资产的指数，也可以是任何具有代表性的指



数。与 RiskMetrics 和 CreditMetrics 数据集不同，因为极端的市场变动比较少，所以 CrashMetrics 数据集不需要频繁的更新。

表 43-1~表 43-5 给出了几个国家的主要指数成分股的崩盘系数。这些崩盘系数根据收益率分布的尾部估计得到，其数据范围从 1985 年年初至 1997 年年末，因此包括了 1987 年 10 月的黑色星期一以及 1997 年 10 月以后亚洲发生的一系列事件。例如，从表 43-1 中可以得到标普 500 指数在这段期间日收益的 10 个最大的正值和负值。同时该表还给出了个别成分股在同一天的收益率。

表 43-1 标普 500 指数最大的 10 次正变动和负变动及同一天个别成分股变动

日期	标普 500	变动 (%)	ABBOTT LABS.	ADOBE SYS.	ADVD. MICR. DEVC.	AEROQUIP-VICKERS	AETNA	AHMANSON (H. F.)
1987/10/19	225	-20.4	-10.5	-22.2	-36.1	-36.6	-15.3	-20.8
1987/10/26	228	-8.3	-7.3	-20.0	-14.3	-15.2	-4.5	-4.3
1997/10/27	887	-6.9	-5.3	-6.1	-19.8	-6.7	-8.5	-6.5
1988/01/08	243	-6.8	-3.8	-14.3	-6.8	-13.5	-7.1	-6.2
1989/10/13	334	-6.1	-8.2	-12.5	-5.8	-9.3	-5.5	-3.7
1987/10/16	283	-5.2	-4.6	0.0	-5.3	-6.4	-1.5	-1.3
1986/09/11	235	-4.8	-5.2	-50.0	-4.7	-5.3	-3.3	-2.9
1988/04/14	260	-4.4	-4.0	-12.5	-5.6	-2.6	-4.4	-4.8
1987/11/30	230	-4.2	-6.7	-16.7	-1.4	-9.8	-2.7	-6.1
1987/10/22	248	-3.9	-4.6	0.0	-5.9	-6.5	-1.9	-1.4
1987/10/21	258	9.1	4.3	0.0	4.1	11.5	8.0	9.5
1987/10/20	236	5.3	-0.6	-14.3	6.5	14.3	-3.7	3.3
1997/10/28	921	5.1	5.2	4.3	19.0	-0.6	4.3	7.4
1987/10/29	244	4.9	2.4	33.3	10.3	15.5	-1.9	3.2
1991/01/17	327	3.7	4.3	0.0	4.6	8.0	2.8	3.0
1988/01/04	255	3.6	0.8	0.0	7.6	-0.4	1.9	-0.7
1988/05/31	262	3.4	2.7	0.0	5.3	0.9	3.9	2.5
1990/08/27	321	3.2	5.4	8.3	4.5	2.2	1.4	3.1
1997/09/02	927	3.1	3.8	2.6	3.3	0.1	2.5	2.3
1991/08/21	391	2.9	3.1	4.2	3.5	0.0	-3.3	2.6

表 43-2 富时 100 指数最大的 10 次正变动和负变动及同一天个别成分股变动

日期	富时 100	变动 (%)	ALLIED DOMEQ	ASDA FOODS	ASSD. BRIT.	BAA	BANK OF SCOTLAND	BARCLAYS
1987/10/20	1 802	-12.2	-7.1	-9.0	-10.1	-7.1	-12.7	-13.2
1987/10/19	2 052	-10.8	-11.5	-9.6	-3.1	-3.7	-3.8	-11.4
1987/10/26	1 684	-6.2	-7.6	-2.4	-3.0	-3.1	-9.0	-7.5
1987/10/22	1 833	-5.7	-4.0	-7.7	-4.7	-2.6	-1.8	-1.0
1987/11/30	1 580	-4.3	-3.0	-4.3	-2.3	-3.8	-2.1	-6.3
1992/10/05	2 446	-4.1	-2.0	2.9	-2.3	-3.4	-6.8	-4.6

(续)

日期	富时 100	变动 (%)	ALLIED DOMEQ	ASDA FOODS	ASSD. BRIT.	BAA	BANK OF SCOTLAND	BARCLAYS
1987/11/03	1 653	-4.0	-3.0	-1.7	-2.0	-0.8	-2.0	-7.8
1987/11/09	1 565	-3.4	-3.9	-5.5	-1.0	-4.5	-1.6	-2.2
1987/12/29	1 730	-3.4	-2.3	-1.8	-2.3	-2.1	-0.6	-2.6
1989/10/16	2 163	-3.2	-3.2	5.0	-3.4	-3.3	-0.0	-2.2
1987/10/21	1 943	7.9	7.7	4.9	2.6	2.7	1.5	8.7
1992/04/10	2 572	5.6	8.2	3.3	3.5	7.1	13.1	7.6
1992/09/17	2 483	4.4	3.5	3.6	2.4	2.5	9.6	15.5
1987/11/11	1 639	4.2	2.3	1.8	4.4	2.1	1.0	3.4
1987/10/30	1 749	4.0	1.5	5.0	6.9	3.2	4.6	2.1
1987/11/12	1 702	3.9	1.8	-0.6	-1.0	4.1	0.8	2.2
1990/10/05	2 143	3.6	5.9	0.0	-1.0	3.2	9.3	9.8
1992/09/18	2 567	3.3	6.7	3.4	4.9	3.0	4.2	3.0
1997/09/26	5 226	3.2	1.8	-0.3	1.9	3.2	9.5	8.9
1991/12/31	2 493	3.0	4.0	7.8	1.7	1.3	4.5	2.7

表 43-3 恒生指数最大的 10 次正变动和负变动及同一天个别成分股变动

日期	恒生	变动 (%)	AMOY PROPS	BANK OF E. ASIA	CHEUNG KONG.	CHINA LT. & POW.	FIRST PACIFIC	CREAT EAGLE
1987/10/26	2 241	-33.3	-37.4	-37.0	-29.2	-32.2	-28.3	-57.3
1989/06/05	2 093	-21.7	-36.4	-22.9	-27.0	-16.6	-28.6	-41.3
1997/10/28	9 059	-13.7	-4.8	-12.7	-9.8	-10.8	-14.7	-19.3
1997/10/19	3 362	-11.1	-18.9	0.0	-9.6	-10.5	-10.7	-20.2
1989/05/22	2 806	-10.8	-18.6	-8.2	-10.7	-6.2	-14.9	-15.4
1997/10/23	10 426	-10.4	-14.0	-8.9	-13.4	-7.4	-26.9	-6.3
1989/05/25	2 752	-8.5	-16.6	-7.6	-10.8	-5.0	-9.5	-14.9
1991/08/19	3 722	-8.4	-11.6	-4.7	-6.8	-6.8	-10.2	-9.4
1992/12/03	4 978	-8.0	-2.4	-13.4	-4.8	-9.9	-7.5	-11.3
1990/08/06	3 107	-7.4	-10.3	-6.1	-6.1	-8.2	-6.9	-6.0
1997/10/29	10 765	18.8	9.2	4.9	17.8	20.2	17.3	18.0
1989/05/23	3 067	9.3	11.4	7.5	9.9	5.2	11.4	14.3
1987/11/06	2 113	7.8	8.5	1.2	12.2	5.4	2.2	9.7
1989/06/12	2 440	7.6	11.7	8.7	10.5	7.0	7.0	16.9
1997/09/03	14 713	7.1	6.0	6.2	5.3	11.9	11.2	5.0
1997/10/24	11 144	6.9	4.1	2.0	9.5	5.9	12.6	7.1
1987/10/27	2 395	6.9	20.1	-2.0	3.8	9.0	-11.4	1.8
1997/11/03	11 255	5.9	5.3	7.8	7.4	-2.9	13.7	6.8
1994/01/04	10 774	5.9	6.1	3.7	6.6	3.6	3.9	4.9
1985/06/19	1 510	5.8	0.0	6.1	6.1	6.2	0.0	13.2

表 43-4 日经指数最大的 10 次正变动和负变动及同一天个别成分股变动

日期	日经	变动 (%)	AJNO-MOTO	ALL NIPPON AIRWAYS	AOKI	ASAHI BREW.	ASAHI CHEM.	ASAHI DENKA KOGYO
1987/10/20	21 910	-14.9	-14.4	-17.9	-18.9	-18.1	-15.7	-10.8
1990/04/02	28 002	-6.6	-3.2	-6.3	-13.7	-5.0	-1.2	-5.8
1991/08/19	21 456	-6.0	-12.1	-7.9	-8.4	-1.6	-5.5	-4.7
1990/08/23	23 737	-5.8	-7.6	-12.0	-9.6	-5.4	-8.4	-7.3
1995/01/23	17 785	-5.6	-8.0	-7.2	-4.9	-1.9	-5.3	-5.2
1997/11/19	15 842	-5.3	-9.0	-3.5	-16.3	-3.4	-3.2	-5.6
1994/01/24	18 353	-4.9	-4.3	-6.0	-6.8	-1.6	-4.1	-7.6
1987/10/23	23 201	-4.9	-4.0	-6.8	-0.9	-4.1	-6.8	-3.4
1990/09/26	22 250	-4.7	-5.2	-2.4	-5.4	-1.6	-2.7	-0.6
1995/04/03	15 381	-4.7	-2.2	-4.1	-2.3	-2.0	-8.4	-6.6
1990/10/02	22 898	13.2	16.0	14.7	9.8	11.4	10.0	15.8
1987/10/21	23 947	9.3	13.5	16.3	11.6	14.7	9.3	5.2
1997/11/17	16 283	8.0	7.3	6.1	0.0	7.4	11.8	9.9
1994/01/31	20 229	7.8	8.5	3.6	13.6	4.2	4.6	9.6
1992/04/10	17 850	7.5	10.5	3.9	13.3	0.0	6.1	3.5
1995/07/07	16 213	6.3	9.8	6.3	9.2	3.0	5.0	1.2
1992/08/21	16 216	6.2	7.9	3.3	21.2	5.6	2.9	2.5
1992/08/27	17 555	6.1	5.6	-1.0	9.4	10.1	5.8	1.8
1988/01/06	22 790	5.6	5.0	6.3	6.4	2.7	6.6	2.4
1990/08/15	28 112	5.4	2.2	6.9	5.4	3.2	3.8	3.8

表 43-5 Dax 指数最大的 10 次正变动和负变动及同一天个别成分股变动

日期	Dax	变动 (%)	ALLIANZ HLDG.	BASF	BAYER	BAYER HYPBK.	BAYERISCHE VBK.	BMW
1989/10/16	1 385	-12.8	-11.3	-10.0	-7.0	-16.1	-13.8	-13.1
1991/08/19	1 497	-9.4	-9.9	-4.8	-5.8	-11.2	-11.2	-10.0
1987/10/19	1 321	-9.4	-10.4	-9.4	-8.5	-7.0	-3.6	-8.2
1997/10/28	3 567	-8.0	-4.7	-8.3	-9.6	-8.6	-7.8	-14.8
1987/10/26	1 193	-7.7	-10.2	-4.0	-5.3	-9.0	-5.5	-6.4
1987/10/28	1 142	-6.8	-7.1	-2.6	-3.2	-8.9	-5.7	-7.5
1987/10/22	1 287	-6.7	-4.2	-4.6	-6.9	-4.6	-5.8	-7.5
1987/11/10	945	-6.5	-8.9	-4.8	-4.1	-7.4	-6.6	-7.8
1988/01/04	943	-5.6	-9.9	-6.9	-5.7	-2.1	-5.6	-3.3
1990/08/06	1 740	-5.4	-3.4	-4.3	-6.1	-5.5	-5.2	-6.4
1991/01/17	1 422	7.6	7.8	5.3	6.9	5.8	9.6	9.3
1987/11/21	1 061	7.4	16.6	4.7	7.6	7.6	10.8	6.4
1987/10/30	1 177	6.6	10.2	3.6	8.1	7.8	2.7	7.4
1989/10/17	1 475	6.5	5.8	3.7	2.5	5.9	9.2	5.9
1990/10/01	1 420	6.4	7.8	7.4	9.0	6.0	9.5	7.0
1988/01/05	1 004	6.4	8.6	5.1	4.7	1.7	4.6	4.4
1997/10/29	3 791	6.3	3.5	8.4	8.2	5.9	6.8	12.0
1990/08/27	1 654	6.1	3.9	8.7	5.7	5.0	2.5	6.1
1987/10/21	1 379	5.9	10.9	1.5	8.8	8.7	4.1	4.2
1990/10/08	1 465	5.3	9.1	5.0	5.2	5.1	1.8	3.7

图 43-6 使用第 18 章的数据计算了迪士尼的 β 值。图中细线的斜率为 β ，粗线无截距拟合了标普 500 最大的 20 次上升和下跌。

图 43-7 是香港上海大酒店集团相对于恒生指数的收益率。图 43-8 是戴姆勒 - 奔驰相对于 Dax 指数的 40 次极端变动。要注意这里的崩盘系数与资产和指数之间的 β 系数是不一样的。其差异不仅仅体现在数值上，初步研究结果表明崩盘系数比 β 系数更稳定。此外，股票与指数之间的相关性在指数发生大的变动时比正常市场条件下强得多。换句话说，当市场崩盘的时候，所有股票会一起变动。

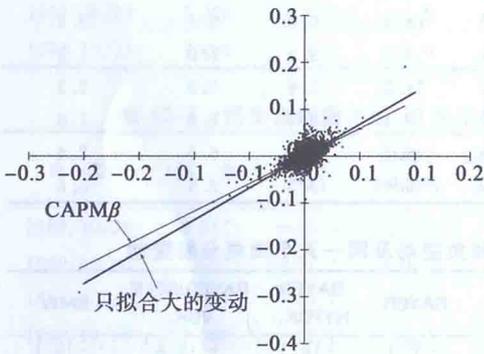
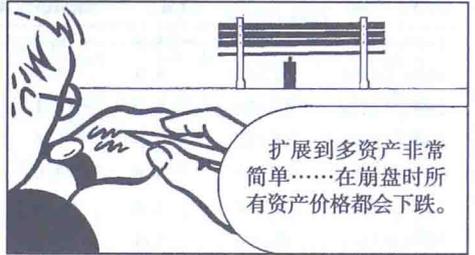


图 43-6 迪士尼相对于标普 500 指数的收益率。斜率为 β 的线拟合了所有点，斜率为 κ 的线拟合了 40 个极端变动且截距为零的点

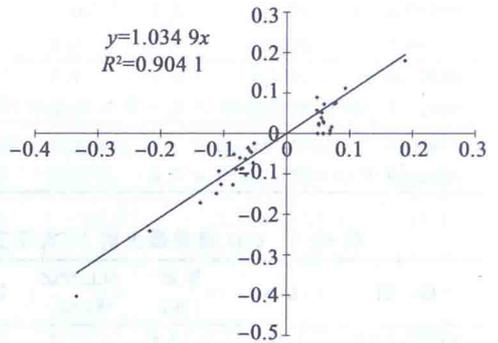


图 43-7 香港上海大酒店集团相对于恒生指数的收益率。该线斜率为 κ ，拟合了 40 个极端变动且截距为零的点

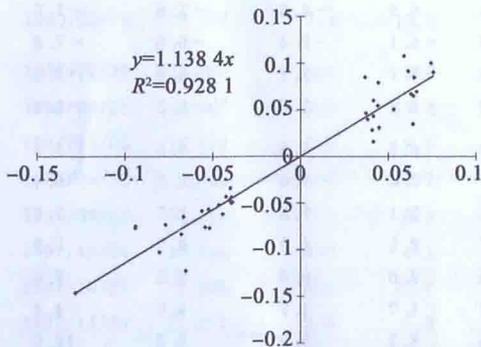


图 43-8 戴姆勒 - 奔驰相对于 Dax 指数的收益率。该线斜率为 κ ，拟合了 40 个极端变动且截距为零的点

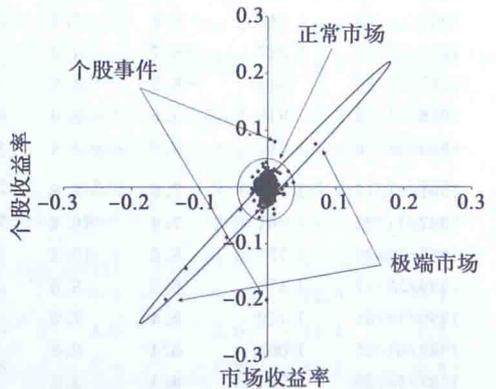


图 43-9 各种收益变动模式示意图

- (1) 常见的日间无异常；股票和市场小幅度变动；可能存在一定的弱相关性。
- (2) 个股层面的事件；个股大涨或者大跌；市场整体变化明显。
- (3) 市场崩盘或者大幅度反弹；市场及股票都大幅度变动。

根据该图的形状，我称为土星光环（rings of Saturn）效应。

假设泰勒级数可用

现在我们来使用这些概念，首先假设可以使用组合变动的泰勒展开式。

在单指数、多资产模型中，我们可以用常见的符号写出组合价值变动的表达式（要特别注意交叉 Gamma）

$$\delta\Pi = \sum_{i=1}^N \Delta_i \delta S_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Gamma_{ij} \delta S_i \delta S_j \quad (43-2)$$

假设当发生极端变动的时候，每个资产的百分比变动与市场的百分比变动有关

$$\delta S_i = \kappa_i x S_i$$

根据上式可以化简式（43-2）

$$\begin{aligned} \delta\Pi &= x \sum_{i=1}^N \Delta_i \kappa_i S_i + \frac{1}{2} x^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Gamma_{ij} \kappa_i S_i \kappa_j S_j \\ &= xD + \frac{1}{2} x^2 G \end{aligned}$$

注意该式如何包含了组合对崩盘的一阶和二阶暴露。一阶系数 D 称为崩盘 Delta (crash Delta)，二阶系数 G 称为崩盘 Gamma (crash Gamma)。

下面我们限制市场基准的变动幅度

$$-x^- \leq x \leq x^+$$

组合价值变动的最差情景在该范围的其中一个端点或者在内点

$$x = -\frac{D}{G}$$

取得。

在最后一种情况下，组合的极端变动为

$$\delta\Pi_{\text{worst}} = -\frac{D^2}{2G}$$

我们同样可以计算在这个最差情景下的崩盘 Delta 和 Gamma。

前面介绍的单资产模型中的所有思想也都适用于多资产模型，我们只不过用 x 替代 δS 来决定组合可能发生的最差情景。

如果我们不能使用 Delta-Gamma 泰勒展开式, 那么我们必须寻找表达式

$$\delta\Pi = F(\delta S_1, \dots, \delta S_N) = F(\kappa_1 x S_1, \dots, \kappa_N x S_N)$$

的最差情景。只要有组合中期权的定价公式, 这就不难办到, 甚至都不用耗太多的时间。

假设你要考虑 N 个标的资产的投资组合在各种情景下的风险暴露, 那你可能需要画出组合价值相对于 N 个标的资产的 $N+1$ 维曲线图。然而, 根据上面的分析方法, 如果你想画出崩盘发生时组合价值的曲线, 就可以用可控的二维图来代替该 $N+1$ 维曲线图, 即组合价值相对于指数的曲线图。

43.8 多资产模型的组合最优化和白金对冲

假设存在 M 个合约可用于对冲。记第 k 个对冲合约的 Delta 为 Δ_i^k , 表示该合约对第 i 个资产的敏感性, 其中 $k=1, \dots, M$ 。同理, 这些合约的 Gamma 记为 Γ_{ij}^k 。记买卖价差为 $C_k > 0$, 表示如果我们在买入 (卖出) 的同时卖出 (买入) 合约需要承担的损失。[⊖]

假设我们增加 λ_k 份第 k 个对冲合约到我们的初始头寸中。现在, 组合对崩盘的一阶暴露为

$$x \left(D + \sum_{k=1}^M \lambda_k \sum_{i=1}^N \Delta_i^k \kappa_i S_i \right)$$

二阶暴露为

$$\frac{1}{2} x^2 \left(G + \sum_{k=1}^M \lambda_k \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Gamma_{ij}^k \kappa_i S_i \kappa_j S_j \right)$$

如果崩盘幅度为 x , 组合价值的变动不仅包括这两项之和, 因为我们不可能平仓而不承担买卖价差的损失,[⊖] 所以还将包括一个确定金额的损失

$$\sum_{k=1}^M |\lambda_k| C_k$$

现在静态对冲后组合的总变动变成了

$$\delta\Pi = x \left(D + \sum_{k=1}^M \lambda_k \sum_{i=1}^N \Delta_i^k \kappa_i S_i \right) + \frac{1}{2} x^2 \left(G + \sum_{k=1}^M \lambda_k \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Gamma_{ij}^k \kappa_i S_i \kappa_j S_j \right) - \sum_{k=1}^M |\lambda_k| C_k$$

⊖ 当然, 如前文所述, 亦可使用其他成本函数。

⊖ 我们可以通过比率 κ/σ_{imp} 判断什么样的期权适合用于白金对冲。平价期权的成本与其隐含波动率近似成比率, 而用平价期权对冲崩盘的效果取决于它们的崩盘系数。

如果不能使用泰勒展开式呢？我们必须考察

$$\delta\Pi = F(\kappa_1 x S_1, \dots, \kappa_N x S_N) + \sum_{k=1}^M \lambda_k F_k(\kappa_1 x S_1, \dots, \kappa_N x S_N) - \sum_{k=1}^M |\lambda_k| C_k$$

其中 F 表示初始投资组合， F_k 则表示可用的对冲合约。

从现在开始，我将全部采用 Delta-Gamma 近似法，更稳健和符合现实的全公式方法则留给读者自己完成。

资产的边际效应

我们可以将最差情景下组合的变动分解为每一个标的资产的贡献

$$\delta\Pi_i = x^* \Delta_i \delta S_i + \frac{1}{2} x^{*2} \sum_{j=1}^N \Gamma_{ij} \delta S_i \delta S_j$$

其中 x^* 是最差情景下 x 的取值。这种方法相当武断地将对两个资产的风险暴露（当交叉 Gamma 不等于零时）平均分配到了它们身上。比率

$$\frac{\delta\Pi_i}{\delta\Pi_{\text{worst}}}$$

衡量了第 i 个资产对崩盘的贡献。

43.9 多指数模型

与 CAPM 模型可扩展到多指数情形一样，我们也可以使用多指数的 Crash-Metrics 模型。实现方法很简单。下面我会省略很多的细节。

单个资产极端收益与指数极端收益的拟合可以通过下式

$$\delta S_i = \sum_{j=1}^n \kappa_i^j x_j$$

其中 n 个指数由下标 j 表示。

现在，我们的股票和期权组合的价值变动是所有 x_j 的二次函数。此刻，我们必须确定在指数收益率的哪个范围寻找最差情景。为了做图方便，我们来考虑只有两个指数的情形。一种可能是假设 x_1 和 x_2 相互独立且可以取给定范围内的任意值。该情形相当于在图 43-10 中的矩形内寻找二次函数的最小值。注意在这里两个指数之间不具有相关性；幸好这个难以衡量的参数无关紧要。如果你相信一个指数

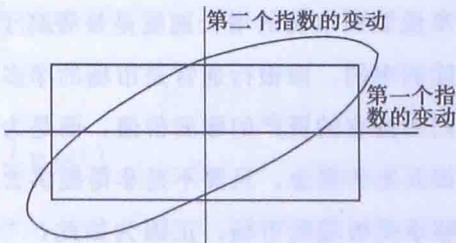


图 43-10 双指数模型的关键区域

的崩盘幅度与另一指数的崩盘幅度存在某种联系，就需要缩小区域来寻找最差情景。图中也给出了一个例子。

43.10 纳入时间价值

一般来说，我们感兴趣的是比隔夜更长期限中的表现。我们能否考虑有限时间范围内的最差情景？可以用泰勒级数将组合价值变动展开成 δS 和时间变量 δt 的函数，得到

$$\delta\Pi - r\Pi\delta t = (\Theta - r\Pi)\delta t + \Delta\delta S + \frac{1}{2}\Gamma\delta S^2 \quad (43-3)$$

注意我们考察的是组合价值变动超过无风险利率的部分。现在，我们必须确定式 (43-3) 在下面范围内的最小值

$$0 < \delta t < \tau \text{ 和 } -\delta S^- < \delta S < \delta S^+$$

其中 τ 是我们感兴趣的时间范围。由于时间和资产价值变动是分开的，因此资产价值变动的最差情景问题与前面的隔夜情形是一样的。该期限下时间衰减的最差情景为

$$\min((\Theta - r\Pi)\tau, 0)$$

进行简单修正后，白金对冲的概念仍然适用。需要的修正是对 Theta 进行的。我们需要加入每个对冲合约的 Θ^* 值乘以相应的合约份数。

43.11 追加保证金和保证金对冲

如果把崩盘定义为不可对冲的价格变动，则股票市场上的崩盘比想象中的更为常见。虽然，一直以来我们把重点集中在崩盘发生时的组合价值变动，但通常造成麻烦的并不是这一点。一个原因是从长期来说股票市场的增长速度是显著高于无风



险利率的，而银行通常是市场的净多头。给银行和其他机构造成麻烦的并不是它们所持有的资产的账面价值，而是为满足未预期的追加保证金要求所需的大量突如其来的现金。只要不是非得提供大量的现金以满足追加保证金要求，银行就能够承受极端的市场。正因为如此，“保证金对冲”才是有意义的。保证金对冲是指通过买/卖合约使得净保证金要求对标的资产变动不敏感，从而降低未来需要

追加的保证金。在这里讨论的最差情景下，保证金对冲意味着选择对冲合约来最优化最差情景下的保证金要求。一般来说，场外（OTC）期权无法用于保证金对冲，因为柜台交易通常没有保证金要求。

德国金属公司和长期资本管理公司是最近由于保证金而蒙受重大损失的例子。[⊖]

现在，我将说明怎么通过简单的修正将基本的 CrashMetrics 方法用于估计和改善最差情景下的追加保证金。

43.11.1 什么是保证金

卖空期权的风险非常大。购买期权的损失最多为初始的期权费，而收益则可能无限。卖空期权的收益是有限的，而损失却可能非常大。因此，为了防范不利事件导致的违约风险，进行期权登记和结算的清算机构会要求期权空方存储一定的保证金。清算机构扮演了每一笔交易的对手方。

保证金有初始保证金和维持保证金两种类型。初始保证金是在合约刚刚成交时所要求的保证金数额。总的保证金数额必须保持在维持保证金之上。如果总保证金下降到维持保证金以下，则必须存入更多的钱（或者价值相等的债券、股票等）。这些保证金水平根据市场不同而不同。

43.11.2 保证金建模

保证金的数额取决于具体的合约类型。显然，我们并不是太关心初始保证金，因为其数额在购买/销售合约之前就已经知晓。我们真正关心的是会发生变动的保证金，因为市场剧烈变动会导致突然出现无法达到的追加保证金要求。

我们用合约价值变动的百分比为追加保证金建模。用希腊字母 χ 表示该百分比。要注意的是，场外（OTC）合约通常没有保证金要求，故 $\chi=0$ 。

沿用前文的符号，以单个资产为标的的单个合约价值变动为

$$\delta\Pi = \Delta\delta S + \frac{1}{2}\Gamma\delta S^2$$

而追加保证金为

$$\delta M = \chi\left(\Delta\delta S + \frac{1}{2}\Gamma\delta S^2\right)$$

[⊖] 后者遭遇的是“千年一遇……10个标准差的事件”。不幸的是，事件发生时该公司成立仅4年。

读者可以自行思考如何将该公式拓展到适合多个标的资产、多个合约以及加入时间衰减时的相关细节。

最终的结果为

$$\delta M - rM\delta t = \left[\sum_{i=1}^N \bar{\Theta}_i - rM \right] \delta t + \sum_{i=1}^N \bar{\Delta}_i \delta S_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \bar{\Gamma}_{ij} \delta S_i \delta S_j$$

这里假设保证金可以获得利息。其中

$\bar{\Theta}_i$ = 以 S_i 为标的的所有期权的**保证金 Theta** (margin Theta)

= $\sum \chi \Theta$, 其中求和针对所有期权

$\bar{\Delta}_i$ = 以 S_i 为标的的所有期权的**保证金 Delta** (margin Delta)

= $\sum \chi \Delta$, 其中求和针对所有期权

$\bar{\Gamma}_{ij}$ = 以 S_i 和 S_j 为标的的所有期权的**保证金 Gamma** (margin Gamma)

= $\sum \chi \Gamma$, 其中求和针对所有期权

r = 无风险利率

δt = 时长

δS_i = 第 i 个资产的价值变动

符号的含义不言自明。

结论就是只要对相应的希腊字母重新定义, 那 CrashMetrics 方法就可直接用于保证金的分析。因此, 我们引进了新的希腊字母 $\bar{\Theta}_i$, $\bar{\Delta}_i$ 和 $\bar{\Gamma}_{ij}$, 分别表示保证金 Theta, 保证金 Delta 和保证金 Gamma。

了解德国金属公司惨败事件的读者可能记得他们进行了 Delta 对冲, 但是没有进行保证金对冲。

我认为泰勒级数/Delta-Gamma 近似法在崩盘时几乎肯定会不符合现实。我们很幸运, 因为在我们为保证金建模时, 几乎每一个有保证金要求的合约都有形式较好的定价公式。那些要求数值解的复杂产品通常是场外合约, 没有保证金要求。我把使用公式法而不是希腊字母近似法的细节留给读者完成。

43.11.3 单指数模型

与基础的 CrashMetrics 方法一致, 我们通过以下关系式将资产价值变动与代表性指数变动联系在一起

$$\delta S_i = \kappa_i x S_i$$

由此可以得到

$$\begin{aligned}\delta M - rM \delta t &= \left(\sum_{i=1}^N \bar{\Theta}_i - rM \right) \delta t + x \sum_{i=1}^N \bar{\Delta}_i \kappa_i S_i + \frac{1}{2} x^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \bar{\Gamma}_{ij} \kappa_i S_i \kappa_j S_j \\ &= \bar{Th} \delta t + x \bar{D} + \frac{1}{2} x^2 \bar{G}\end{aligned}$$

其中, \bar{Th} 是组合的保证金 Theta 超过无风险增长的部分。可以观察到该表达式包含对崩盘的一阶和二阶暴露。一阶系数 \bar{D} 是崩盘的保证金 Delta, 二阶系数 \bar{G} 是崩盘的保证金 Gamma。

我们已经了解怎么将最差情景、白金对冲和多指数模型应用到组合分析与对冲中。在保证金分析中, 只要对希腊字母的定义做出相应的修改, 所有的这些方法都仍然适用。尤其是白金保证金对冲以最佳的方式减少了市场崩盘时追加保证金的规模。

43.12 对手方风险

如果场外合约不存在追加保证金, 那么它们必然存在另一种很严重的风险: 对手方风险。在极端的市场条件下, 交易对手可能破产, 从而对其他银行造成冲击。正因为如此, 人们应该首先将它们的投资组合按交易对手分组, 然后逐一考察每一组的最差情景。前文所述有关最差情景和白金对冲的一切都适用于与每一交易对手相联系的更小的投资组合。

43.13 CrashMetrics 的简单拓展

在这部分我想要简单概括一下将 CrashMetrics 方法拓展到其他情况和用于捕捉其他效应的方法。因为 CrashMetrics 方法的基本形式很简单, 可以很直接地加入很多其他特征。

首先, 我们没有介绍如何将 CrashMetrics 方法应用到利率产品。这并不难; 以某个收益率 (或者某几个) 作为市场基准, 然后通过久期和凸性将产品价值变动和收益率变动联系起来。其余部分读者可以自己想象。

一个特别有趣的主题是崩盘发生时, 参数值将会发生什么样的变化。在这种情况下, 隐含波动率和买卖价差通常都会上升。可以通过引入依赖于崩盘幅度的 Vega 项将波动率的上升纳入考虑范围。从概念上讲这是很直截了当的, 但是需要分析崩盘时期的期权价格数据。如果崩盘的时候你处于香草期权的多头, 那么你将因波动率的上涨而受益。同样地, 该方法也可以纳入依赖于崩盘的买卖价

差，但是也需要分析历史数据，并为崩盘幅度与买卖价差上涨幅度之间的关系建模（见图 43-11）。

最后，通常的经验是崩盘后股票会立即反弹，因此，价格的下跌并没有表面上看起来那么严重。通常突然损失的 20% 会在不久之后恢复，但这不是硬性规则。你可以在前面的数据表中发现这点，某一天发生大幅度的下跌后会紧跟一个大幅度的上升。将这种动态效应加入到相对静态的 CrashMetrics 方法中是一项有趣的任务。

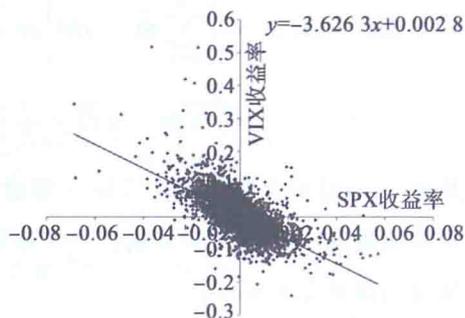


图 43-11 VIX 收益率跟 SPX 收益率的关系

43.14 CrashMetrics 指数

CrashMetrics 方法的结果和原理已经被用于 CrashMetrics 指数 (CMI)。这是衡量市场变动幅度和判断我们是否处于崩盘情景的指数，类似于金融世界里的里氏震级。与很多市场变动衡量指标不同，该指数并不是改头换面的波动率指数，比波动率指数更为微妙。然而，由于专利问题，我不能告诉你它的定义。很抱歉。但我可以给你一些线索：该指数是基于对数尺度的；只有一个时间尺度（不像波动率既需要长的时间尺度又需要短的时间尺度，例如 30 天和 1 天）；它利用了图 43-1 的效应。图 43-12 展示了标普 500 指数的 CMI 时间序列。

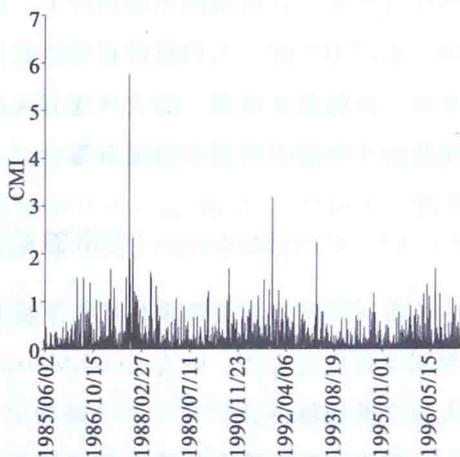


图 43-12 标普 500 CMI 指数

43.15 总结

本章描述了为分析和防范市场崩盘而专门设计的 VaR 方法。这些分析对金融机构的良好运作至关重要，因此我采用了一个非概率建模方法。

拓展阅读

- 从 www.crashmetrics.com 网站上可以下载 CrashMetrics 技术说明、数据集及相关的示范软件。



第 44 章

衍生品灾难案例

本章内容

- 奥兰治县
- 宝洁公司
- 德国金属公司
- 吉布森贺卡公司
- 巴林银行
- 长期资本管理公司



44.1 引言

衍生品使用不当可能会成为危险的武器，既可以毁掉一个人的职业生涯，也可以毁掉一个机构。本章我们将回顾一下一些广为人知的衍生品投资教训案例。很多案例的细节都没有公开，但是我将尽可能介绍已知的信息并进行相应的分析。

44.2 奥兰治县

奥兰治县位于美国加利福尼亚州。20 世纪 90 年代的前半段，罗伯特·西特

伦 (Robert Citron) 担任该县的财务官。他负责该县的投资基金, 该基金的资金来源是市民的各种税收。从 1991 年至 1994 年年初该基金利用低利率赚取稳定的收益, 总收益达到 7.5 亿美元。这是非常好的投资表现, 其收益率高于美国政府利率将近 400 个基点。这是如何做到的? 他把老百姓的钱投资于杠杆式反向浮动利率票据。

浮动利率票据是一种债券, 其票息与某一浮动利率相关, 如个月或者个月的 LIBOR。正常情况下, 票息随利率的上升而上升, 但反向浮动不同。常见的反向浮动债券的票息具有以下形式

$$\max(\alpha r_f - r_L, 0)$$

其中, r_f 是固定利率, r_L 是某一 LIBOR 利率, $\alpha > 1$ 是乘子。随着利率上升, 票息下降, 但是下限为零; 债券持有者从来都不用还钱。而西特伦购买的杠杆式反向浮动利率票据^①的票息形式为

$$\max(\alpha r_f - \beta r_L, 0)$$

其中 $\beta > 1$ 。(如果 $\beta < 1$, 则是降低杠杆的票据。) 当利率很低时, 票息会很高。这正是 90 年代早期的情况, 西特伦和奥兰治县也因此而受益。但如果利率上升怎么办? 这些票据具有很高的杠杆。

西特伦赌的是利率会保持在低位上。

1994 年年中, 美国的利率水平骤然上升, 总涨幅高达 3%。票据中的杠杆产生了巨大的影响, 奥兰治县也因此损失 16 亿美元。图 44-1 展示了 20 世纪 90 年代早期美国的利率水平。有将近 18 个月的时间美国的短期收益率水平低于图中的水平线——4%。但 1994 年年初利率开始上涨, 跟前期的“稳定”相比上涨速度非常快。西特伦 (和其他人, 见下文) 对此期间利率的上涨 (图中垂直线右端部分) “猝不及防”。

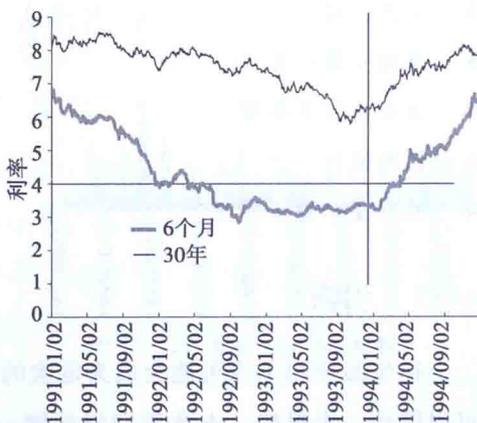


图 44-1 20 世纪 90 年代早期的美国利率

奥兰治县并没有到一定要宣布破产的地步, 它的财政仍有盈余, 还是有资金

^① 实际上, 他也买了很多其他的产品。看来他当时不太走运。

不断注入该基金。但是作为对该交易经纪商的损失赔偿诉讼的一种策略，他们在1994年12月6日宣布破产。

似乎没有人知道那些损失是如何积累起来的。之前看起来没有必要进行频繁盯市。如果能这样做，就能够预期到大概的损失，那么就应该会有人采取行动。在奥兰治申请破产保护的时候，标准普尔对它的评级为AA级而穆迪对它的评级为Aa1级；这是非常高的评级，所以看起来违约的可能性也非常低。

“杠杆式反向浮动利率票据”是一个名字很长却非常简单的工具。它的风险应该是很明显的。毕竟要理解 $\max(ar_f - \beta r_L, 0)$ 会有多难呢？

如果奥兰治县遭受了损失，那么谁获益了？该浮动票据的对手方是各种美国政府住房机构。幽默的是钱从奥兰治县纳税人的手中流入了全美国纳税人的手中，呵呵。

西特伦因违反政府投资法律而被判处社区服务性劳役1年。在审判阶段，心理学家发现他的数学能力只有七年级的水平，而且他的思维和推理能力属于总人口中最差的5%。

44.3 宝洁公司

宝洁(P&G)是一家大型跨国公司，生产美容和医疗类产品、食品与饮料以及洗衣与清洁产品。它们有很大的利率和汇率风险暴露。为了减少风险暴露，它们使用了利率和货币互换。

1993年年末，宝洁公司认为当时很低的利率仍将保持在低位，因此想从互换的固定端转移到浮动端。如果利率没有上升，使用普通互换将很好地达到，但如果利率上升呢？作为该交易的对手方，信孚银行(BT)建议对该互换做一些修改以满足宝洁公司的需求。

1993年11月2日成交的这笔交易是一个5年期互换，名义本金为2亿美元。该合约有一些特殊的条款，但并非惊世骇俗。从效果上讲，相当于宝洁公司卖给了信孚银行一个长期债券价格的看跌期权。

该交易的细节如下。信孚银行按2亿美元本金支付给宝洁公司固定利率，期限为5年。在前6个月宝洁公司支付给信孚银行固定利率，之后的支付利率由下面的公式决定

$$r_C - 0.0075 + 0.01 \times \max\left(\frac{98.5}{5.78} Y_5 - P_{30}, 0\right) \quad (44-1)$$

其中 r_c 为宝洁公司自身的公司债收益率, Y_5 为 5 年期国债的收益率, P_{30} 为 30 年期国债的价格。第一次支付利息时 (1994 年 5 月 2 日) 将会知晓当时的国债收益率和价格, 此时利率将由上面的公式固定。换句话说, 剩下的四年半中的收益率和价格都将在那一天锁定。

如果利率在 1993 年 11 月的水平附近多停留几个月, 那么宝洁公司将获得最好的结果, 其收益将达到

$$0.0075 \times 20\,000 \text{ 万美元} \times 5 = 750 \text{ (万美元)}$$

但世事无常, 该收益没有成为现实。到当时为止的整个 90 年代, 5 年期和 30 年期利率都在持续下降 (见图 44-1); 从短期收益率相对稳定的现象来看, 这种趋势有可能持续下去。

但如果 11 月到 5 月之间利率开始上升……

式 (44-1) 随着 5 年期国债收益率的上升而增大, 随着 30 年期国债价值的上涨而减小。如果 30 年期收益率上升、价格下降, 式 (44-1) 将增大。虽然对收益率曲线的斜率有少量的暴露, 但是主要还是受收益率曲线水平的影响。

表 44-1 收益率曲线平移对宝洁公司损失的影响

平移量 (基点)	0	50	100	150	200
5 年期收益率 (%)	4.95	5.45	5.95	6.45	6.95
30 年期债券价格 (美元)	103.02	97.77	93.04	88.74	84.82
30 年期收益率 (%)	5.97	6.47	6.97	7.47	7.97
4.5 年中的总损失 (百万美元)	0	0	75	190	302

在 1993 年 11 月, 息票率为 6.25%、到期日为 2023 年 8 月的债券价格在 103.02 左右, 对应的收益率为大约 5.97%。而 5 年期的利率在 4.95% 左右。根据这些值计算, 式 (44-1) 等于 $r_c - 0.0075$, 位于安全水平。但 1994 年年初利率上升, 非但潜在的 750 万美元利润没有实现, 宝洁公司还损失了将近 2 亿美元。

最后宝洁以未能披露相关信息为由起诉了信孚银行。该案件最终以庭外和解收场。

下面的内容来自于宝洁公司的新闻稿。

宝洁与信孚银行的衍生品诉讼案达成和解

1996 年 5 月 9 日

辛辛那提, 1996 年 5 月 9 日——今天宝洁公司与信孚银行就诉讼案达成协议。该诉讼案涉及两份衍生品合约, 信孚银行向宝洁公司的索赔总额近 2 亿美

元。根据协议，宝洁将承担争议金额中的 3 500 万美元，剩下将近 83% 的部分将由信孚银行自行承担。

宝洁公司董事长及首席执行官白波 (John E. Pepper) 表示：“我们对该解决方案很满意，也很高兴这件事情得以解决。”

在事先算出收益曲线的平移和潜在损失的关系并不困难，在表 44-1 中我在收益率曲线平移的假设下完成了该计算。收益率曲线上升 70 个基点，宝洁公司就会开始亏损。此后收益率每上升 1 个基点，宝洁公司就多亏损 230 万美元。在 1994 年 5 月 2 日，5 年期和 30 年期利率分别为 6.687% 和 7.328%，平均上升超过 150 个基点。

图 44-2 展示了 1993 年 11 月之前的 10 年中美国 5 年期利率变动在 6 个月内的分布。这些数据在该合约签署的时候就可以得到。^① 数据显示，利率上升超过 70 个基点的概率为 14%，此时宝洁将开始亏损 (图中黑条)。利率上涨 150 个基点或更多的概率为 3%。根据这些数据计算的 5 年内预期利润为一 870 万美元，而不是 +750 万美元。

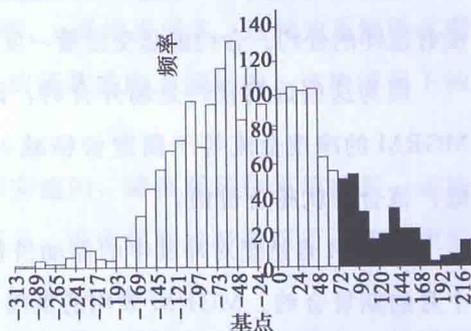


图 44-2 1993 年 11 月之前 10 年中美国 5 年期利率变动在 6 个月内的分布

我希望你在读完本章后能做一个小小的练习。请用电子数据表完成上述收益率平移的相关计算。看看你需要多长时间才能够省下这 2 亿美元。(如果你使用 Excel 内置的函数来计算收益率和价格，那么花费的时间将不会超过 10 分钟，包括打开电脑和休息的时间。)

下面的内容来自宝洁的网站 (www.pg.com)，看起来是很有道理的原则 (我不清楚是什么时候写上去的)：

诚信原则：我们一直尝试做正确的事情。我们对每一个人都保持诚实和率直的态度。我们根据法律条文和精神办事。我们根据宝洁的价值和理念来完成每一次行动和决定。我们基于数据和诚实提出方案，包括**风险识别**。

黑体字是我自己加的。

^① 这里我使用了重叠数据。对宝洁的案例来说，使用不重叠的数据将得到一样或对宝洁稍差的结果。

44.4 德国金属公司

德国金属公司（Metallgesellschaft，音标为 Met Al gazelle shaft，重音在“Al”上）是德国的一家大型企业集团，它有一个美国子公司叫 MG 精炼营销公司（MGRM）。在 1992 年 MGRM 向其客户发行了远期合约，帮其锁定未来 10 年的燃料油和汽油价格。远期价格固定为当时现货价格加 3 美元左右。客户每个月收到原油，按固定的价格进行支付。该合约允许双方平仓。比如说，当期限最近的燃油期货价格超过约定价格时，客户就可以中止该合约。一旦执行该权利，他们马上可以得到期货价与固定价差额的 50% 乘以剩余合约包含的燃油总量。当期货价格超过约定的敲出价格时，MGRM 也可以中止合约。

这些合约很受客户欢迎，因为这是唯一可用于锁定价格的长期限合约。交易所没有这样的合约。合约的总交易量一度达到 1.8 亿桶，相当于科威特 85 天的产量。

因为这些远期合约是场外合约，因此在交割之前不产生现金流。在交割时，MGRM 的净现金流等于固定价格减去现货价格。对 MGRM 来说，现货价格越低，该合约就越有价值。

MGRM 自然想对冲其中的原油价格风险。但在交易所交易的只有期限为 1~3 个月的期货合约。MGRM 采用的策略是用纽约商品交易所（NYMEX）的短期期货合约来对冲长期场外远期合约空头。因为短期合约在几个月之后就会到期，因此该头寸必须不断滚动；一份合约到期之后就必须用下一份期限最短的合约来替代。从理论上说，只要 MGRM 使用的利率和持有成本模型是正确的，这种策略就会成功。我们马上就会讨论这一点。即使 MGRM 拥有合适的模型，他们也会因为期货与场外远期合约的重要差别而遇到问题。

1993 年下半年原油价格不断下降。因为 MGRM 是期货合约的多头，价格下降使得它们不得不每天增加保证金。期货是逐日盯市的。在 1993 年期间，额外的保证金要求总计达 9 亿美元，这是一笔非常大的数目。MGRM 向其母公司寻求资金帮助。作为回应，德国金属公司接管了 MGRM，并更换了管理层。1993 年 12 月，新的管理层平掉了一半的短期期货合约头寸。1994 年年初，原油价格开始上涨，MGRM 的长期合约头寸也开始亏损。它们的回应是中止合约并平掉所有头寸。到此时的累积损失已经达到了 13 亿美元。

但它们是否真的亏损了？随着原油价格下降，MGRM 在短期的期货头寸上

有亏损，但记住这些合约是用于对冲的。它们在对冲头寸上亏损，但是其场外远期合约头寸是盈利的。问题是，这些远期合约头寸的利润在合约到期之前无法实现。不管原油价格如何，盯住模型的方法本应使得净头寸为零。回想一下第 43 章讨论过的保证金对冲。

有些人说 MGRM 的管理层惊慌失措了，但他们对此并不承认。

基差风险

这个故事由于牵涉期货价格的行为而变得稍微有点复杂。商品市场中远期价格和现货价格的关系不像外汇等其他市场那么简单。根据无套利可以得到下面的理论结果

$$F = S e^{(r+q)(T-t)}$$

其中， T 是剩余期限， r 是相应的无风险利率， q 是持有成本。这种关系使得远期价格高于现货价格，远期价格作为剩余期限的函数是向上倾斜的。这种情况下的市场称为正向市场（contango）。

在实际中按照这种策略进行套利是难以实施的，需要循环往复地购买、运输和储藏商品，因此理论上的套利机会毫无意义。因此远期价格曲线有可能甚至经常是向下倾斜的。这种市场称为逆向市场（backwardation）。

在德国金属公司的案例中，一开始原油市场是处于逆向市场状态的。得益于远期价格曲线短端的斜率，通过期货合约滚动是可以获得利润的。在 1993 年原油价格急剧下降，市场变成了正向市场。此时滚动合约的损失达到了 2 000 万美元/月。问题在于，MGRM 对场外远期合同约定价时是否考虑了有效持有成本的变化？如果他们考虑过（这似乎不太可能，或者说这是事先不可能做到的），那对冲策略就可以成功，只要没有提前平仓。

建立精确的利率或持有成本模型是很难的。因此，MGRM 面临的是用一个不完全相关的工具来对冲另一个工具的风险。这种风险一般称为基差风险（basis risk）。

44.5 吉布森贺卡公司

“我想我们应该把这当作一个机会。我们只需要打电话（给吉布森公司），并稍微修改一下其中的差额。我的意思是当实际数字是 1 400 万美元的时候，我们

告诉他们的是 810 万美元。所以如果现在的实际数字是 1 600 万美元，那我们就告诉他的是 1 100 万美元。你们知道的，只是要慢慢调整实际数值和我们告诉他的数值之间的差异。”

“……如果发生了大的变动，你懂的，如果市场像这样回落，他又亏了 130 万美元，我们可以告诉他又亏了 200 万美元……如果市场真的疯狂反弹，他挣回了几百万美元，你可以说你只挣回了一半。”

——1994 年 2 月 23 日，信孚银行证券管理人员讨论对吉布森头寸的

信孚银行内部估值和给吉布森报价的录音

吉布森贺卡公司是美国的一家贺卡公司。1991 年 5 月，它们发行了价值 5 000 万美元的债券，票息为 9.33%，期限为 4~10 年。20 世纪 90 年代初，利率下降，但吉布森公司还是需要按照相对较高的利率支付。为了减少债务成本，它们于 1991 年 11 月与信孚银行签署了一些普通利率互换。

1. 互换 1

名义本金 3 000 万美元，剩余期限 2 年，信孚银行向吉布森公司支付的利率为 6 个月 LIBOR，吉布森公司向信孚银行支付的利率为 5.91%。

2. 互换 2

名义本金 3 000 万美元，剩余期限 5 年，信孚银行支付 7.12%，吉布森公司支付 6 个月 LIBOR。

在前两年 LIBOR 的现金流相互抵消，吉布森公司将收到的利率为 $7.12 - 5.91 = 1.21\%$ 。

1992 年 7 月两个互换合约都被取消。不久之后，吉布森公司签署了一个杠杆更高的互换合约，拉开了一系列购买和取消越来越复杂产品的序幕。下面我们将介绍其中的一些产品。

3. 比率互换

吉布森公司每 6 个月支付

$$\frac{50}{3} r_L^2$$

给信孚银行，同时收到 5.5% 的利率。名义本金为 3 000 万美元，期限为 5 年。其中 r_L 是 6 个月的 LIBOR。由于第 1 次付息时确定的 LIBOR 为大约 3.08%，所以吉布森公司第 1 次支付的利率为 1.581%。第 2 次支付的利率为 1.893%，对应的

LIBOR 为 3.4%。

当时利率进入了上升周期。根据当时隐含的远期曲线判断，市场“预期”利率会继续上升。如果 6 个月的 LIBOR 达到 5.7% ($=\sqrt{0.06 \times 0.055}$)，则净现金流将从吉布森公司流向信孚银行。因为担心利率超过这一水平，互换合约被修改了 3 次，并最终在 1993 年 4 月被取消——此时距合同签署过去了 6 个月。

LIBOR 上升的速度并没有像远期曲线预测的那么快（一般来说都不会）。从事后的角度来看，保留初始的互换合约对吉布森来说可能才是最有利的。

4. 周期利率底

在 5 年时间里，信孚银行按照 3 000 万美元的名义本金支付 6 个月 LIBOR 加 28 个基点，吉布森支付利率为 r_L 。只有当 $r_L > r_L - 0.15\%$ 时信孚银行才需要支付，其中 r_L 为上一互换日确定的 6 个月 LIBOR。这是一份路径依赖合约。1992 年年末，信孚银行通知吉布森公司该周期性底的价值为负并取消该合约（此时距该合约建立仅 9 个月）。相关的损失计入后来的一份合约。

5. 国库券挂钩的互换

这份互换合约用于换取信孚银行缩短前面提到的比率互换的期限。吉布森公司支付给信孚银行 LIBOR，信孚银行支付给吉布森公司 LIBOR 加 2%。关键的区别是到期时的本金偿还总额。吉布森公司支付 3 000 万美元，信孚支付

$$\min\left(3\,060\text{ 万美元}, 3\,000\text{ 万美元} \times \left(1 + \frac{103 \times Y_2}{4.88} - \frac{P_{30}}{100}\right)\right)$$

其中 Y_2 为 2 年期国债收益率， P_{30} 为 30 年期国债价格。这个公式是否似曾相识？

6. 敲出看涨期权

由于预期信孚银行的本金偿还总额较小，为了减少国债挂钩互换的风险暴露，吉布森公司于 1993 年 6 月签订了一份敲出看涨期权。在支付期权费后，吉布森公司将会在到期时收到

$$12.5 \times 2\,500\text{ 万美元} \times \max(0, 6.876\% - Y_{30})$$

其中 Y_{30} 是 30 年期国债的收益率。在合约到期之前 30 年期国债收益率下降到 6.48% 以下时吉布森公司的收益是最低的。因为只有当到期时 $6.48\% < Y_{30} < 6.876\%$ 且 Y_{30} 从未跌破 6.48%，回报才会大于零，因此长期利率得保持稳定才行。

7. 时间互换/走廊互换

1993 年 8 月，吉布森公司与信孚银行签订了走廊互换协议。合约的期限为 3

年，名义本金为 3 000 万美元。信孚银行支付给吉布森公司 6 个月 LIBOR 加 1%。吉布森公司的支付为

$$r_L + 0.05 \times N\%$$

其中 r_L 为 6 个月期 LIBOR， N 为 6 个月的计算周期中 r_L 超过表 44-2 所限范围的天数。

表 44-2 走廊互换中 LIBOR 的范围

1993/08/06~1994/02/06	3.187 5%~4.312 5%
1994/02/06~1994/08/06	3.250 0%~4.500 0%
1994/08/06~1995/02/06	3.375 0%~5.125 0%
1995/02/06~1995/08/06	3.500 0%~5.250 0%

经过对乘数（刚开始为 0.05）、范围和终止日期的多番修改后，该合约于 1994 年 1 月被取消。

总共有将近 29 份合约。吉布森公司的损失高达 2 000 万美元，几乎等于其 1 年的利润。它们起诉了信孚银行并最终在 1994 年 11 月的一份庭外和解协议里将几份互换合约的总债务从 1 400 万美元降低为 620 万美元。它们声称信孚银行误导了它们对合约真实价值的判断。正如本节一开始转载的录音记录所示，信孚银行对这些合约有它们自己的内部估值模型，却一直低报了吉布森公司的损失。

44.6 巴林银行

巴林银行的故事实际上非常简单，衍生品在其中的作用相对较小。引人注目的原因在于损失的总金额（13 亿美元），该事件牵涉一家非常稳健、有着 200 年历史的银行和主要人物 28 岁的尼克·利森（Nick Leeson），一个逃亡者。

尼克·利森是巴林银行在新加坡的一名期货交易员。在 1994 年他报告称为巴林银行赚取了 2 000 万美元，除了 15 万美元的基本工资之外他有可能获得 100 万美元的奖励。事实上，很有可能当时他已经造成了巨额的损失，只不过具体的头寸只出现在著名的“错误账户 88888”中。利森拥有太大的自由度。在 1994 年年末至 1995 年年初，利森控制了交易部和后台操作部门；实际上监督他行为的就是他自己。

导致巴林银行破产的交易涉及日本的股票市场，确切地说是日经 225 指数的期货和期权。1994 年 11~12 月，利森一直在卖日经指数的跨式组合（straddles），执行价格位于 18 500 与 20 000 之间。当时日经指数也大致在这一区间变

化。只要指数保持稳定，波动率处于低位，他将从这个接近 Delta 中性的策略中获利。1995年1月17日，神户发生了地震，日经指数开始下跌（见图44-3）。图中也展示了利森交易的执行价格区间。

在接下来的几天，利森开始买入3月份到期的指数期货。这一策略背后的原因在于他相信自己的交易量足以改变市场的下跌趋势。如果他能够把日经指数的水平拉回到地震前的水平，那么他的期权头寸将是安全的。

虽然他的交易对指数有显著影响，却始终无法挽回市场的下跌趋势。1个月之后，该指数已经下降到17 400。

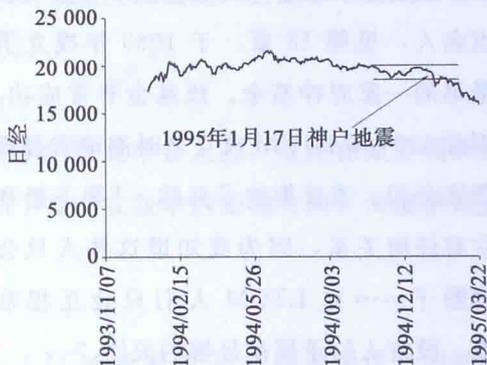


图 44-3 1994 年年初至 1995 年 3 月的日经 225 指数

在指数下跌过程中，利森继续交易以支撑指数。为满足期货盯市要求的保证金，巴林银行从伦敦调入了大量的资金。最终，需要追加的保证金多到无法支付。1995年2月23日，利森逃离新加坡。最后，他飞往法兰克福并被捕。1995年12月1日，他承认了欺骗巴林银行审计人员并在某种程度上损害了他们的声誉和欺骗新加坡金融期货交易所以（SIMEX）两项罪行。次日，他被判监禁6年半。

1999年7月3日，利森在丹娜美拉地区的樟宜监狱获释。在监狱中他得了结肠癌，他的妻子跟他离婚后再婚。他们将该故事拍成了电影，由伊万·麦格雷戈（Ewan McGregor）和安娜·弗瑞尔（Anna Friel）担任主演。

与此同时，巴林银行宣布破产。文莱的苏丹想要救助他们，但是被拒绝了。如理查德·汤姆森（Richard Thomson）所说，荷兰国际集团“最终被说服收购巴林银行”，价格为1英镑。

44.7 长期资本管理公司

长期资本管理公司（LTCM）是一家对冲基金。你以前可能认为对冲基金应该是进行风险对冲的。但很少有法规可以对它们的活动进行监管。“对冲基金”这一术语的产生是因为这些基金既做多又做空，但这和对冲并不一样。LTCM由曾经的所罗门债券套利团队的约翰·梅里韦瑟（John Meriwether）创办，诺贝尔奖获得者迈伦·斯科尔斯（Myron Scholes）和罗伯特·默顿（Robert Merton）

是其合作者。(刘易斯(1989)的优秀著作描述了梅里韦瑟在所罗门时做的一些冒险交易。)

爱德华·索普(Edward Thorp)(21点名人,见第18章)于1969年成立了最早的一家对冲基金。该基金非常成功,因此1994年LTCM成立之时邀请索普投资该公司。索普拒绝了并称:“我不想和它有任何关系,因为我知道这些人只会掷骰子……在LTCM人们只会互相恭维,没有人给予模型足够的关注。”

如果索普不想投资LTCM,那么他属于少数派。LTCM的阵容很迷人,很多本该明白真相的人都被吸引了。头几年他们取得了很好的收益,高达40%左右。但是看看图44-4:所有人都赚到了40%。在1997年他们赚了27%。

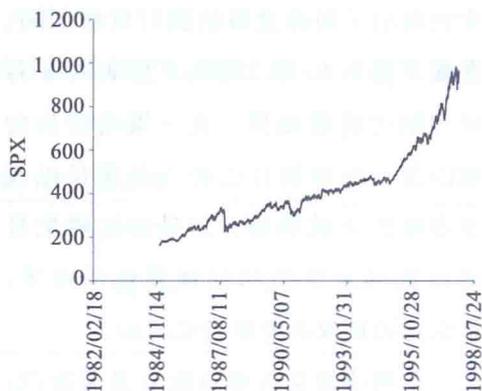


图 44-4 标普 500 指数

根据LTCM的大肆宣传——它的传奇团队以及他们身居要职的朋友,意味着它们有三个其他公司所没有的优势。

- 它们有能力用杠杆将48亿美元变成1000亿美元。它所持有的互换的名义头寸一度曾达到1.25万亿美元,占整个市场的5%;^①
- 在很多交易中它们无须提供抵押;
- 当它最后破产的时候,美联储会组织救助。

1998年LTCM使用巨大的杠杆押注在某些工具的相对价值上。他们预期金融市场会有一段时期保持相对平静,且第一世界和新兴世界的利率和信用风险会不断收敛。下面是LTCM采取的一些策略、他们下注的是什么以及实际发生了什么。请注意其中有多少交易是成对出现的;LTCM做的是相对价值交易。

1. 欧洲政府债券

由于预期欧洲货币联盟(EMU)成立后利率会收敛,LTCM在卖空德国债券的同时做多了其他欧洲国家债券。利率最终确实是收敛的,但得先经历一次分

^① Bill Ziemba 估计他们打赌过度,达到2倍的Kelly水平。回想第17章的内容,这是预期增长率开始变为负的水平。

化的过程。

2. 新兴市场债券以及美国国债

LTCM 在做多巴西和阿根廷的债券同时做空美国国债。它们预期信用价差会下降，但相反价差扩大到了 2 000 个基点。

3. 俄罗斯短期国债和日本债券

他们预期俄罗斯的收益率会下降而日本的收益率会上升，因此在做多俄罗斯短期国债的同时做空日本债券。他们错估了日本收益率的变动方向，而俄罗斯违约了。

4. 长期和短期的德国债券

由于预期德国的收益率曲线会变平，LTCM 在做多 30 年期德国债券的同时做空了 10 年期德国债券。实际恰恰相反，对短期债券的需求导致收益率曲线变得更加陡峭。

5. 长期和短期的互换期权跨式组合

他们在做多长期限的互换期权跨式组合的同时做空短期限的互换期权跨式组合。这是一个近似 Delta 中性的策略，因此属于波动率交易。如果短期波动率上升将承受损失。

需要注意的是，所有的这些交易似乎都基于对整个世界市场的一个相同的观点。他们预期会有一段相对较稳定的时期，新兴市场会尤其受益。事实上，1998 年 8 月 17 日俄罗斯违约造成了市场的恐慌，投资者“逃向了安全资产”，上面所有交易的方向都错了。LTCM 很明确地押注市场的单方向变动而非多样化。结果，公司的合伙人损失了 90% 的投资，两个诺贝尔奖获得者羞得面红耳赤。据说如果损失了 500 万美元，你将不能继续在华尔街工作；如果损失了 5 000 万美元，你在第 2 天就能找到新的工作。那如果损失了数十亿美元呢？这有利于交友。

图 44-5 展示了票息 9.25%、到期日为 2001 年的以美元标价的阿根廷债券的价格。在 8 月份俄罗斯违约之前，价格相当稳定。但是在那之后，在整个市场恐慌的影响下，价格直线下降。当事情平静后，价格就恢复了。LTCM 对长期走势的观点可能是正确的，但是如果你无法承受住短期的风暴，你对市场的观点正确与否也就无所谓了。

到 1998 年 8 月 21 日，它们损失了 5.5 亿美元，而且还将损失更多。人们认为让 LTCM 彻底倒闭太危险了，这对美国经济的影响可能是灾难性

的。因此，1998年9月纽约美联储组织了一次救助，14家银行总共投资了36亿美元以换取LTCM90%的股权。

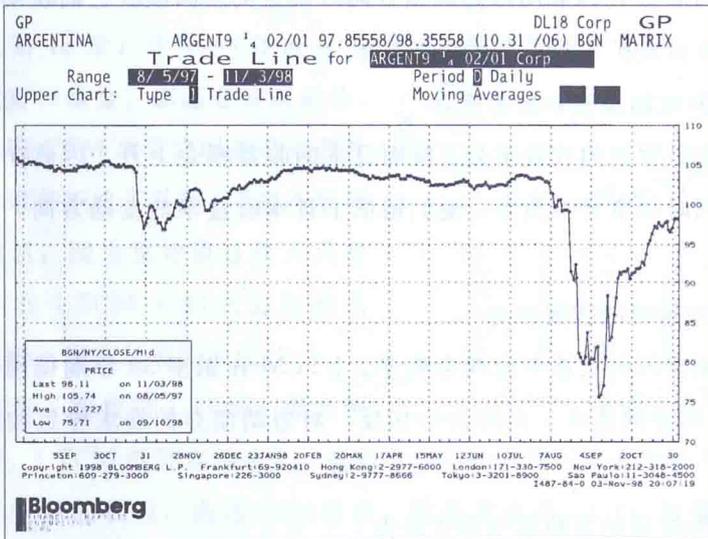


图 44-5 票息 9.25%、2001 年到期的阿根廷债券的时间序列

资料来源：Bloomberg L. P.

LTCM 故事的大部分细节仍未公开；他们太神秘了以至于很多投资者甚至都不知道他们在干什么。但看起来 LTCM 似乎只使用了基础的 VaR 估计，很少或没有看重压力测试。他们估计组合每天的波动幅度应该达到 4 500 万美元的数量级。但是并没有考虑极端的市场变动和流动性问题。LTCM 甚至试图卖掉流动性资产以减小风险，让（理论上）更具有盈利性的非流动性资产保持在账面上。这在危机的时候不是明智之举。正如第 19 章所描述的那样，简单的 VaR 固然不错，但是不能应付整体性的金融市场暴跌。

美联储前任主席艾伦·格林斯潘说：“当我们考核银行的时候，我们希望它们有将极端市场变动考虑在内的系统。”

LTCM 的故事中还有另一方面应该让任何使用简单量化分析的人更加谨慎，那就是流动性问题。1998年8月发生了世界性的流动性枯竭。没有流动性就不可能清空自己的头寸，所有产品的“价值”也就没有了任何意义。你不得不熬到市场宽松的时候。问题的一部分是很多与 LTCM 打交道的银行了解他们的交易，很多银行只是复制了 LTCM 的策略。如果 LTCM 和这些银行的交易量较小还没有什么关系。但他们没有，有些时候他们完全垄断了市场。垄断像啤酒之类的生活

必需品是一回事，但如果垄断的是一些鲜为人知的东西，那么在你想卖掉它们的时候就只能坐以待毙了。

44.8 总结

大多数故事都有相同的关键词：过度自信、对风险缺乏理解、纯投机（不当的时机或理由）、杠杆太高。

我们都是凡人，但当少数不知道自己在做什么的人将利润白白浪费的时候，数学建模又有什么用呢？如果他们知道自己在做什么，我会认为他们是欺诈者。

我将以罗伯特·默顿在 1993 年的警告结束。“如果走到极端，任何优点都将成为缺点，在金融实践中使用数学模型也是如此……数学模型有时会变得太有趣而使我们忘记了模型的最终目的。模型使用的数学是精确的，但模型却不是，它只是对复杂的现实世界的近似……因此从业人员都应该试探性地应用模型，在每一次应用时都应该仔细分析它们的局限性。”说得太对了。

拓展阅读

- Lesson (1997) 站在自己的角度解释了巴林银行的灾难。
- Chew (1996) 是关于衍生品交易风险的完美著作。她讨论了与合约相关的技术、法律和道德问题。
- Partnoy (1998) 是关于摩根士丹利如何运作的极好的故事（碰巧是我最不喜欢的银行之一）。
- 关于 LTCM 的合伙人梅里韦瑟的背景参见刘易斯 (1989)。
- Dunbar (1998)、Kolman (1999) 和 Jorion (1999) 都对 LTCM 事件进行了不错的叙述。
- Miller (1997) 详细讨论了德国金属公司的案例。
- Thomson (1998) 里面有各个衍生品故事的大量内幕信息。
- 可以阅读默顿 (1995) 以了解他对数学模型影响金融世界的认识。

这本书是《数量金融》（原书第2版）的第2卷，包括奇异合约及路径依赖；固定收益的建模和衍生品以及信用风险。这卷中，读者将看到随机数学在新金融问题和其他市场的更多应用。

本卷的主要章节

- 奇异及路径依赖衍生品导论
- 固定收益产品说明书
- 衍生品和随机控制
- 公司价值和违约风险
- 股权和外汇类产品的说明书
- 信用风险
- 单因子利率建模
- CrashMetrics
- 瞬时利率的实证表现
- 衍生品灾难案例
- HJM和BGM模型

作者列出了大量彭博资讯系统的页面，通过真实的条款佐证他所阐述的各项观点，同时也结合了大量必不可少的Visual Basic计算机代码、模型的数据表解释、产品说明书以及期权分类表格。

除了实用性导向外，作者以漫画的形式出现在整本书中，以带有个人色彩的口语化文字对书中讨论的关键部分内容给出强调与解释。

这是一个天分与自我相互激荡创造出令人愉悦作品的典范。技术性作品的写作应以此为楷模。

—— 布鲁诺·杜派尔 彭博资讯

WILEY

www.wiley.com

投稿热线: (010) 88379007
客服热线: (010) 68995261 88361066
购书热线: (010) 68326294 88379649 68995259

华章网站: www.hzbook.com
网上购书: www.china-pub.com
数字阅读: www.hzmedia.com.cn



上架指导: 金融

ISBN 978-7-111-49487-4



9 787111 494874 >

定价: 119.00元