解码三大数学常数



φ π e

φ的密码

0.618,

一个云谲波诡的数——永无止境又不循环，像宇宙一样没有尽头；

两千多年的岁月，没能磨灭它的青春——

风采依然、浪漫依旧，继续演绎着不老的传奇。

它一直都是个谜，令人感到神秘奥妙、玄机莫测，

吸引人们永无止境地探索。

陈仁政／著

科学出版社

(O-4255.0101)
责任编辑：李 敏 赵 鹏
封面设计：黄华斌

本书生动详尽地介绍 ϕ 的方方面面。由浅入深的科学道理给你学富五车，美不胜收的精彩情节让你心动神摇，妙趣横生的丰富内容让你流连忘返……

本书不但把 ϕ 融入整个数学以至科学之中，而且把人文精神融入其中，对提高人的综合素质，特别是培养人的健康心理大有裨益。

本书适合具有中等及以上文化的青少年或成人阅读，也是研究 ϕ 的重要参考书。

“楚兰不佩佩吴钩”，让我们佩戴李白的“吴钩”，与毕达哥拉斯、斐波那契、达·芬奇不弃不离，去寻找那“ϕ 的密码”……

“我喜欢在深夜拨弄心弦，弦上黄金分割不止一点。”读了这本书，您会成为这样的“ϕ 迷”。

www.sciencep.com

ISBN 978-7-03-030886-3

9 787030 308863 >

定 价：38.00 元

上架建议：数学/科普

解码三大数学常数



π

e

φ的密码

0.618,

一个云谲波诡的数——永无止境又不循环，像宇宙一样没有尽头；

两千多年的岁月，没能磨灭它的青春——

风采依然、浪漫依旧，继续演绎着不老的传奇。

它一直都是个谜，令人感到神秘奥妙、玄机莫测，

吸引人们永无止境地探索。

陈仁政 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书生动详尽地介绍 ϕ 的方方面面。由浅入深的科学道理给您学富五车，美不胜收的精彩情节让您心动神摇，妙趣横生的丰富内容让您流连忘返……

本书不但把 ϕ 融入整个数学以至科学之中，而且把人文精神融入其中，对提高人的综合素质，特别是培养人的健康心理大有裨益。

本书适合具有中等及以上文化的青少年或成人阅读，也是研究 ϕ 的重要参考书。

“楚兰不佩佩吴钩”，让我们佩戴李白的“吴钩”，与毕达哥拉斯、斐波那契、达·芬奇不弃不离，去寻找那“ϕ 的密码”……

“我喜欢在深夜拨弄心弦，弦上黄金分割不止一点。”读了这本书，您会成为这样的“ϕ 迷”。

图书在版编目(CIP)数据

ϕ 的密码 / 陈仁政著. —北京：科学出版社，2011

(解码三大数学常数)

ISBN 978-7-03-030886-3

Ⅰ. ϕ… Ⅱ. 陈… Ⅲ. 数学－常数－普及读物 Ⅳ. O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 073467 号

责任编辑：李 敏 赵 鹏 / 责任校对：陈玉凤

责任印制：钱玉芬 / 封面设计：黄华斌

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 5 月第 一 版 开本：B5 (720×1000)

2011 年 5 月第一次印刷 印张：18 1/4

印数：1—6 000 字数：353 000

定价：38.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

丛书序

在美国加州谷歌公司总部的四座办公大楼中，有三座以数学符号命名："Pi"（圆周率π）、"e"（自然对数的底）和"phi"（黄金分割数φ）。可见这"三大数学常数"在这个大公司中的至尊地位。无独有偶，以色列数学史家伊莱·马奥尔在《无穷之旅——关于无穷大的文化史》一书中，也称它们为"三个最著名的无理数"。

然而，国内除了出版为数不多的关于π，e的小册子和个别关于φ小册子之外，至今还没有以较大篇幅介绍这"数学三圣"的系统丛书。从国外译介到国内的作品也是如此。"苔花如米小，也学牡丹开。"《解码三大数学常数》丛书（以下简称"丛书"）的作者经过断续29年的努力，抛出了这套丛书之"砖"，以期引出各界的"玉"。

本丛书除了"数学三圣"和涉及的数学内容之外，还把包括物理、化学、天文、地理、生物、医学、文学、美术、音乐、环保等众多领域的内容有机地结合在数学之中。这不但显示出数学的广泛威力，而且展现出各学科之间的水乳交融；在这个意义上说，"数学三圣"是承载整个科学的"诺亚方舟"。"数学，无处不在。"德国2008年科普活动以数学为主题的这个口号，为这种威力和交融画龙点睛。而德国联邦教研部长莎万在这个活动的开幕式上说，应该让公众，特别是让青少年认识数学的丰富多彩和重要意义——数学是所有自然科学的共同语言。

本丛书由浅入深、化难为易，力图把"可怕"变为"可爱"，以消除"数学是可怕的专业"的误解。

本丛书将人文精神融入"好玩的数学"以至整个科学之中。这样，不但精彩纷呈的内容和妙趣横生的情节引人入胜，让读者充分感受数学之真、之美、之乐、之用，而且对提升人的综合素质——特别是锤炼健康心理大有裨益。

本丛书有一千多位各领域的科学家、文学家、艺术家和政治家等“大驾光临”，他们书写的人类可歌可泣的科学史和文化史，为我们留下了形形色色的宝贵财富。现在，先贤们的身影已经越来越模糊，但也越来越清晰——我们正在享受着这些财富带来的无穷福祉。当然，我们在“理所当然”和“习以为常”地享受这些福祉的同时，千万不能忘记这些财富本身的价值和意义：科学精神、科学思想、科学方法……

“天才和我们仅仅相距一步。同时代者往往不理解这一步就是千里，后人又盲目相信这千里就是一步。”对于这些“创造历史”的天才，日本“鬼才”小说家芥川龙之介在随想集《侏儒的话》中说，“同时代为此而扼杀了天才，后代又为此而在天才面前焚香。”我们相信，读者看了这套丛书之后，对这段关于天才与“我们”的精辟名言，能有更深刻的体会，从而“在你的心上，自由地飞翔”，幸福地走过人生的“水千条山万座”而有所作为。正是：“今夜，我在看星光灿烂。明晨，我要画朝霞满天。”

陈仁政

2011年4月30日

目　录

丛书序

第 1 章　毕氏学派——“暗藏黄金”两千年 …… 1

1.1　临终遗图和洞口大汉 …… 1

1.2　毕氏学派“涛声依旧” …… 2

1.3　毕氏学派“暗藏黄金” …… 5

1.3.1　联络标志五角星 …… 5

1.3.2　“暗藏黄金”两千年 …… 7

第 2 章　黄金分割——不老的传奇 …… 11

2.1　黄金分割的“基本作图”、名称和符号 …… 11

2.1.1　黄金分割的“基本作图” …… 11

2.1.2　黄金分割的名称 …… 12

2.1.3　黄金分割的符号 …… 15

2.2　从中末比到黄金分割 …… 17

2.2.1　从欧多克索斯到托勒密 …… 17

2.2.2　从达·芬奇到马丁·欧姆 …… 21

2.3　不老的传奇 …… 27

第 3 章　数学中的“密码”——无处不在的 ϕ …… 28

3.1　ϕ 的几何作图 …… 28

3.1.1　方法 1——勾股法 …… 28

3.1.2　方法 2——相似三角形法 …… 28

3.1.3　方法 3——正五边形法 …… 29

3.1.4　方法 4——梯形法 …… 30

3.1.5　方法 5——内角平分线法 …… 30

3.1.6 方法6——相交弦法 …… 30
3.1.7 方法7——图像法 …… 31
3.1.8 方法8——面积割补法 …… 31
3.1.9 方法9——双圆弧法 …… 32
3.2 正五边形的几何作图 …… 33
3.2.1 在已知圆中作正五边形 …… 33
3.2.2 已知边长作正五边形 …… 35
3.2.3 用“生锈圆规”作正五边形 …… 37
3.3 五角星的几何作图 …… 39
3.4 φ与黄金螺线 …… 40
3.4.1 φ与“矩形黄金螺线” …… 40
3.4.2 φ与“正方形黄金螺线” …… 45
3.4.3 φ与“三角形黄金螺线” …… 45
3.4.4 超级“黄金粉丝”詹姆斯 …… 47
3.4.5 无处不在的螺旋 …… 50
3.5 φ与数学形影不离 …… 54
3.5.1 平面几何中的φ …… 54
3.5.2 代数中的φ …… 62
3.5.3 三角中的φ …… 68
3.5.4 解析几何中的φ …… 70
第4章 斐波那契数列——兔子奏响和谐乐章 …… 74
4.1 兔子问题引出 *F* 数列 …… 74
4.1.1 不凡的商人数学家 …… 74
4.1.2 《算经》中的兔子问题 …… 76
4.1.3 伟大的“愚人” …… 77
4.1.4 探索正未有穷期 …… 81
4.2 奇妙的 *F* 数列 …… 86
4.2.1 递推公式和通项公式——从吉拉德到比内 …… 86
4.2.2 和谐的乐章——*F* 数列的奇妙性质 …… 91
4.3 *F* 数列的数学应用 …… 97

4.3.1　数学领域初显身手 …… 97
4.3.2　F 数列与“F 数列长方形” …… 98
4.3.3　F 数列与“完全正方形” …… 98
4.3.4　F 数列与幻方 …… 102
4.3.5　F 数列与贾宪三角 …… 103
4.3.6　F 数列与“线段数列” …… 108
4.3.7　F 数列与方程的近似解 …… 108
4.3.8　F 数列与概率 …… 109
4.3.9　每一项都含 ϕ 的“仿 F 数列” …… 110
4.3.10　F 数列与登楼梯 …… 110
4.3.11　F 数列与蜜蜂的道路 …… 111
4.3.12　尼罗河畔的余香 …… 112
4.3.13　F 数列“无所不能” …… 116
4.4　植物与 F 数列 …… 119
4.4.1　树枝增长的奥秘 …… 119
4.4.2　叶序中的 F 数列 …… 120
4.4.3　从菠萝到向日葵 …… 121
4.4.4　法国数学家揭开的植物奥秘 …… 127
4.5　动物与 F 数列 …… 131
4.6　电子显微镜下的奇观 …… 132
4.6.1　F 数列与准晶体 …… 132
4.6.2　中国科学家的“大力神杯” …… 137
4.7　F 数列用于艺体和建筑 …… 140
4.8　F 数列的“娱乐无极限” …… 141
4.8.1　魔术师的“斐波那契地毯” …… 141
4.8.2　钢琴键盘上的 F 数列 …… 151
4.8.3　《达·芬奇密码》中的 F 数列 …… 151
4.8.4　“仿 F 数”的“怪蛋” …… 152
4.8.5　火柴游戏稳操胜券 …… 154
4.8.6　颜色调配与 F 数列 …… 156

4.8.7 神奇的5 …… 156
第5章 从华尔德、基弗到华罗庚——优选法中的φ …… 161
5.1 从华尔德、基弗到华罗庚 …… 161
5.2 单因素问题的黄金分割法 …… 163
5.2.1 理论上的0.618法 …… 163
5.2.2 便于操作的0.618法 …… 164
5.3 单因素问题的斐波那契法 …… 166
5.4 最佳点会丢失吗 …… 167
5.5 0.618法和分数法的优点 …… 168
5.5.1 0.618法和分数法的“去长留短” …… 168
5.5.2 0.618法和其他方法的比较 …… 169
5.6 优选法林林总总 …… 171
第6章 艺术中的美——艺术家也爱φ …… 172
6.1 比例论引出“大明星” …… 172
6.1.1 从毕氏学派到伽利略——比例无处不在 …… 172
6.1.2 “大明星”技压群芳——出自比例论的φ …… 174
6.2 绘画、雕塑中的φ …… 177
6.2.1 古希腊的神韵 …… 177
6.2.2 文艺复兴时期的盛典 …… 179
6.2.3 从安格尔到“黄金分割画派” …… 182
6.2.4 东方与现代 …… 185
6.3 建筑中的φ …… 186
6.3.1 帕台农神庙遗韵流芳 …… 186
6.3.2 巴黎圣母院、巴洛克和东方建筑 …… 189
6.3.3 现代主义建筑中的φ …… 192
6.4 台艺、音乐、文学、书法中的φ …… 195
6.5 φ与摄影 …… 198
6.6 φ在艺术的其他场合 …… 200
6.7 多彩的艺术与神奇的科技相通 …… 201

第 7 章　生命暗藏的美——生物与 ϕ …… 203
7.1　人体中的 ϕ …… 203
7.1.1　从维特鲁威到达·芬奇 …… 203
7.1.2　“形式爱好者”对人的形体研究 …… 204
7.1.3　人体内部的 ϕ …… 209
7.2　动物中的“ϕ 密码” …… 210
7.2.1　动物身上的黄金螺线 …… 210
7.2.2　动物身上的 ϕ …… 214
7.3　植物中的 ϕ …… 215
7.3.1　植物“肢体”的形状 …… 215
7.3.2　植物“肢体”的分布 …… 215
7.3.3　植物“智慧”与“生仿学” …… 219
7.4　生物形状的无穷奥秘 …… 221
7.4.1　“形式爱好者” …… 221
7.4.2　生物形状千姿百态 …… 223
第 8 章　从物理学走向宇宙——“没有什么能够阻挡” …… 226
8.1　电学中的 ϕ …… 226
8.1.1　电容电路中的 ϕ …… 226
8.1.2　电阻电路中的 ϕ …… 229
8.2　天地宇宙中的 ϕ …… 231
8.2.1　天上和地上的 ϕ …… 231
8.2.2　维持宇宙秩序的“第七参数” …… 233
第 9 章　自娱自乐会有时——ϕ 的“八卦” …… 239
9.1　五角星中的“黄金” …… 239
9.1.1　半空心五角星中的“宝藏” …… 239
9.1.2　半空心五角星中的“黄金” …… 241
9.2　五边形数定理 …… 242
9.3　用纸折出正五边形 …… 243
9.4　隐蔽在洛依德谜图中的五角星 …… 244

9.5 五角星与等宽曲线 …… 245
9.6 五角星中摆石子 …… 248
9.7 种树问题中的五角星 …… 249
9.8 电脑键盘上的“黄金” …… 251
9.9 φ，π，6和“中空数” …… 252
9.10 φ的节日 …… 255
9.11 “不务正业”的“黄金” …… 256
9.12 用纸折出黄金矩形 …… 257
第10章 无穷的探索——φ的悬疑、误区和神话 …… 259
10.1 φ的悬疑 …… 259
10.1.1 黄金矩形最美吗 …… 259
10.1.2 弦长的1/12处弹出的音乐最美吗 …… 262
10.2 φ的误区 …… 262
10.2.1 琴弦长度的误区 …… 262
10.2.2 古琴参数的误区 …… 266
10.2.3 用“黄金定律”能提高彩票中奖机会吗 …… 266
10.3 φ的迷信或神话 …… 268
10.3.1 五角星不能避魔 …… 268
10.3.2 百慕大三角的迷雾 …… 270
参考文献 …… 277
后记 …… 280

第1章　毕氏学派
——“暗藏黄金”两千年

月落乌啼，总是千年的风霜。涛声依旧，不见当初的夜晚。

——《涛声依旧》歌词

1.1　临终遗图和洞口大汉

“请您……在……在……”一个学派的成员流落异乡，贫病交迫，无力酬报房主的殷勤照顾，在临终的时候有气无力地恳求房主，“在……门口刻下……这个图形……”

善良的房主照办了——在自己的大门上刻下了死者要求的那个图形。

岁月轮回。若干年以后，这个学派的其他成员偶然来到这里，见到了这个图形。他们询问了事情的经过之后，用重金厚报房主而去……

几乎同时，也就是距今两千多年以前的一个夜晚，在今天属于意大利半岛南端的一个山洞门口，两个彪形大汉紧把洞门。夜色降临了，数以百计的人鱼贯而入。不过，在入洞之前，他们都要伸开右手，让两个大汉“验明正身”，否则就会吃闭门羹……

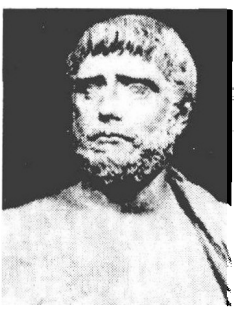
接下来，就是洞中神秘的集会……

那么，这个学派的成员是怎么知道同伴曾在此居留过呢？这个图形是什么，为什么有这么大的魅力呢？这个学派叫什么名字呢？这些人的右手心上有什么秘密，便于两个大汉识别，从而“开绿灯”呢？洞中

的神秘的集会要干什么——是杀人越货，是谋反，还是……这些问题，都将在本章得到答案。

1.2 毕氏学派“涛声依旧”

在古希腊灿烂的数学星空中，有一颗璀璨的明星——“西方理论数学的创始人”毕达哥拉斯（以下简称毕氏）。



泰勒斯

在亚洲西部，有一个著名的小亚细亚半岛，岛上是当今土耳其97%的国土。这个半岛北、南分别濒临黑海和地中海，而西边则是爱琴海。靠近小亚细亚西岸的爱琴海中，有一个名叫萨摩斯的小岛。约公元前580年，毕氏就出生在这个今天属于希腊的小岛上。

早年的毕氏，曾拜古希腊“数学之父”、大哲学家泰勒斯为老师，学习几何学和哲学。他还在爱琴海中的锡罗斯岛向费雷西底学习，也曾师从伊利亚学派的安纳西曼德——绘制世界上第一张全球地图的人。为了进一步求学，毕氏游历埃及、巴比伦（一说到过更远的印度），大约在公元前530年返回萨摩斯岛并开始讲学。

然而，由于当时萨摩斯岛的海盗和僭主（非法就位的统治者）波利克拉底的暴政，就携母亲和唯一的一个门徒离开萨摩斯岛，移居西西里岛，最后定居意大利半岛南端的克罗托内。此时，他已过“知天命之年”。

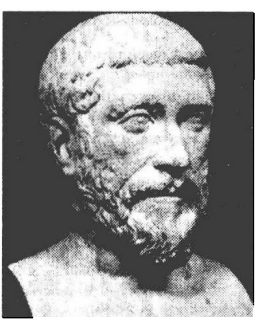
毕氏到了克罗托内之后，就一面讲学，一面广收门徒，并在大约公元前530年建立了一个秘密的宗教、政治、学术“三合一”的团体——“友谊联盟”，后人称为“毕氏学派”或“毕氏学校”。

毕氏的讲学吸引了包括各个阶层的大量的听众——特别是社会的上层人士。当时，妇女是被禁止出席公开会议的，但毕氏打破了这个“清

规戒律”，允许她们听讲。在这些热心听讲的妇女中，有房主米洛的女儿西雅娜。后来，这位绮年玉貌的西雅娜，成了他的妻子和“贤内助”，还为他写过传记——可惜已经失传。

毕氏把毕氏学派分为两等。一等是大多数的普通听众——只能听一般知识的讲授，不能发问，更不能参加讨论。另一等才是真正的毕氏学派核心成员——“获得较高深知识的”300 多个有社会地位和学问的人。毕氏学派组织严密，每个加入者都要接受长期的训练和考核，遵守许多清规戒律，并宣誓永不泄漏学派的秘密和学说，否则将受到严厉的惩罚，在学术上也要达到一定的水平。加入者还要通过一系列的神秘仪式，以求达到“心灵的净化”。他们相信依靠数学——学派教义的组成部分，可以使灵魂升华，与“上帝”融为一体；认为“万物皆数”——万物都包含数，而且万物都是数，所以数是万物的本质；“上帝”就是用“数”来统御宇宙的。

毕氏学派的成员有共同的哲学信仰和政治理想，虽饮食简单，但训练严格。学派教义鼓励大家自制、清心寡欲、纯洁、服从。他们起初在大希腊（今意大利南部一带）赢得了很高的声誉，产生过很大的政治影响。



毕达哥拉斯

因为毕氏学派的声誉和影响，所以招来敌对派的嫉恨，并由此种下了祸根。后来，又受到民主运动风暴的冲击，学派被破坏，毕氏被迫移居位于他林敦（今意大利半岛南部塔兰托）附近的梅塔蓬图姆。然而，他最终还是厄运难逃——约公元前 500 年，死于民主派暴徒在梅塔蓬图姆街道上的一次追杀袭击中。

虽然毕氏倒下了——连学派在克罗托内的活动场所也连续被破坏，但他的许多门徒却幸存下来，逃回希腊本土伯罗奔尼撒半岛东北部的弗利奥斯重新建立据点。也有一些人到塔兰托去继续进行数学、哲学研究以及政治活动——直到公元前 4 世纪中叶，繁荣了近两个世纪。



为了纪念毕达哥拉斯的“众议院”，1955年8月20日希腊发行的邮票

在这近两个世纪的活动中，毕氏学派中诞生了众多留名至今的著名数学家：希帕索斯、西奥多罗斯；阿尔希塔斯、菲洛劳斯等。

毕氏本人并没有留下什么著作，而学派内经过门徒讨论、研究的成果由领导人加以总结后又秘而不宣，所以外人很少知道详细情形。这样，后来人很难分清哪些成果属于毕氏本人，哪些属于他的门徒。但是，在毕氏学派被逐渐分散以后的约公元前370年，菲洛劳斯写成了至今只存少量片段的一部公开著作，加上后来学者们的研究，毕氏和毕氏学派的主要成果才在揭开“冰山一角”之后，露出“海面之下巨大的冰山”，逐渐被后世所认识。

毕氏学派的主要成果有：开创了把几何问题与数的性质问题结合起来的研究方法——在西方首先发现了毕氏定理（中国称为勾股定理）并在世界上最早证明这个定理，就是运用这种方法著名的具体成果；关于数的理论——例如区别奇数、偶数和素数的方法，对完全数、亲和数、“形数”等的研究；用数学方法研究音乐；对正多面体的研究；对无理数的发现和研究；提出独特的天文学见解——例如认为日月等星辰都呈球形，悬浮在太空中运行。

毕氏学派是继泰勒斯创建的爱奥尼亚学派之后，古希腊第二个最重要的学派。它持续存在了近两个世纪，影响之久，远远超过了爱奥尼亚学派。甚至约4个世纪之后的公元1世纪，还出现了它的“克隆版”——宣扬数字神秘的“新毕氏学派”。

在前面简述的毕氏学派的主要开创性成果中，许多都是至今我们熟悉或研究的重要内容，所以在距毕氏两千多年以后，希腊还为当年毕氏学派（称为毕氏的“众议院”）发行了纪念邮票。由此可见，在“千年的风霜”之后，毕氏学派的成果照样“涛声依旧”——虽然已“不见

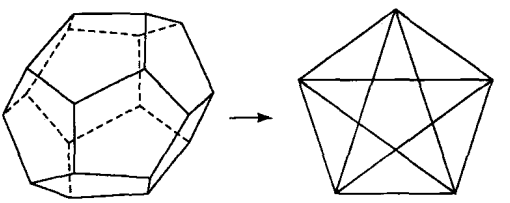
当初的夜晚”……

1.3　毕氏学派“暗藏黄金”

1.3.1　联络标志五角星

毕氏学派对正多面体的研究之一，是发现或重新发现了 5 种凸正多面体——有两种不同的说法。

一种说法是，毕氏本人原先只知道四面体、六面体、八面体和二十面体这 4 种正多面体，并说火、土、气、水（他主张的构成一切物质的 4 种“基本元素”）分别生于这 4 种凸正多面体。但是，后来发现还有正十二面体，却没有第 5 种“基本元素”和它对应，只好同整个宇宙对应。我们知道，凸正多面体有而且只有这 5 种——证明只有这 5 种的方法，可能起源于古希腊数学家欧几里得。有趣的是，在所有 5 种正多面体中，只有由正五边形构成的正多面体（正十二面体）的每一面的边数最多，所以最复杂，才最后被发现（图 1-1）。



正十二面体　　正五边形内的五角星形

图 1-1

另一种说法是，毕氏本人早就知道正十二面体，以及正四面体、正六面体。理由是正十二面体的每一个面都是正五边形，而毕氏学派对正五边形的作图法已得心应手，并且钟爱正五角星形（有时简称五角星形或五角星）。钟爱到什么程度呢？他们在（空心）五角星的角顶分别标上 5 个字母 ν，γ，ι，θ，α，作为他们秘密组织的徽章（校章）或联络

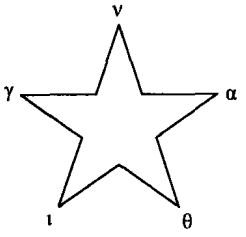
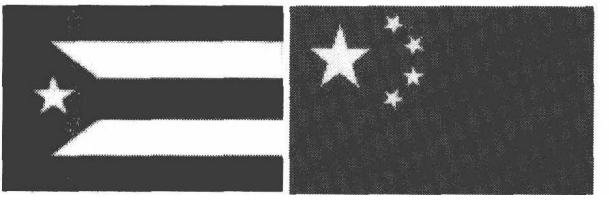


图 1-2 毕氏学派的“健康”徽章

标志。它们连起来就是“νγιθα”，意思是“健康”。这种“健康”五角星，就是我们前面提到的那个“天涯沦落人”临终恳求房主刻下的图形（图 1-2）。这个人是毕氏学派的成员，毕氏学派的其他成员就是凭这个五角星知道同伴曾在此居留过。前述两个大汉验证入洞者的身份，也是看他们的右手心上有没有一个红色的五角星。由此可见，五角星对毕氏学派有多么巨大的魅力！

五角星的这种魅力，在比毕氏学派更早的古代就显现出来：在现属伊拉克的幼发拉底河下游一个叫乌鲁克的地方，发现了一块约公元前 3200 年的泥板，上面就画有一个不是很正规的五角星。

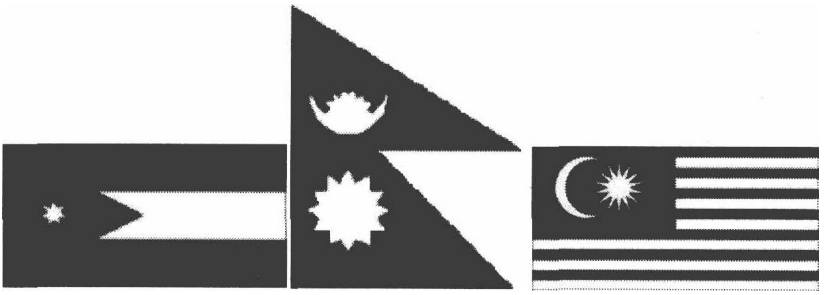
为什么是五角而不是其他数目的角呢？这是一个耐人寻味的谜——也许是原始人类遗留下来的习惯。但为什么会有这种习惯呢？



古巴国旗　　中国国旗

其实，古往今来，世界各地的许多人都把对称的五角星图案看作对称、和谐、协调、昌盛、健康和美丽的象征。这种魅力和观点在当今世界也不难找的到例证：天上闪烁的星星，多画为五角星；世界上近 40 个国家（例如中国、美国、朝鲜、土耳其、古巴）的国旗，凡是“涉星”的，几乎都画成五角星——只有澳大利亚和约旦的七角星、尼泊尔的十二角星、被称为“辉煌条纹”的马来西亚的十四角星（当初代表 14 个州，新加坡在 1965 年独立出去以后代表 13 个州和政府）等少数例外。例如，中国的国徽和国旗五星红旗——那片“从旭日上采下的虹”上就有一大四小的 5 个五角星。据说，有些国家就是考虑了五角星

中多处暗含 ϕ 这个美的密码而赏心悦目。



约旦国旗　　尼泊尔国旗　　马来西亚国旗

五角星是“正星多边形”中的一种。正星多边形是指这样的图形：设 $n>2$ 且 n 与 a 互素，用 n 个点把圆周分成 n 等份，从某一个分点开始，把各分点与其后第 a 个点用直线相连，并继续下去；这样的一个星多边形就是正星多边形——也称为“正 n 角星形”。

在历史上，许多数学家都研究过正星多边形。例如，在罗马数学家、中世纪经院哲学的奠基人博伊西斯的几何学中，在英国数学家、修士阿德拉特或意大利数学家坎帕纳斯从阿拉伯文译过来的欧几里得著作的译本中。又如，以下 4 位著名数学家都研究过它们的某些几何性质：英国布拉德瓦丁，德国约翰·穆勒和开普勒，法国布伊勒斯。

5 种凸正多面体也叫正则体或柏拉图（多面）体。这里的问题是，古希腊哲学家和数学家柏拉图并不是最早发现或研究这 5 种正多面体的人——例如毕氏就比他更早，那为什么会被称为柏拉图体呢？这个问题将在 2.2.1 小节回答。

1.3.2　“暗藏黄金”两千年

那么，五角星有什么威力无比的魅力，让毕氏学派如此钟情呢？

原来，当古代的几何学家很容易就作出正三边形（正三角形）、正四边形（正方形）和正六边形之后，就以为作出正五边形也是如此“小菜一碟”。然而，出乎他们意料的是，此时却碰了“钉子”。这颗

“钉子”，就是必须作出36°的角——例如考虑正五边形的一个内角等于36°的3倍即108°。显然，要作出正五边形，这就不是“小菜一碟”而是一个难题了。

那怎么才能作出36°的角，又是谁最早作出来的呢？

是毕氏学派最早作出36°的角，并由此作出正五边形和五角星。也许就是他们以此为荣，才把五角星作为自己学派的秘密徽章或联络标志、暗号吧！

毕氏学派是这样作出正五边形的。圆内接正五边形的一边所对的圆心角是72°（36°的两倍），这72°正好是一个等腰三角形的两个底角、36°则是它的顶角。于是，问题就化为作一个这样的等腰三角形——我们将在3.5.3小节叫它“黄金三角形”。在《几何原本》（以下简称《原本》）中，就考虑了黄金三角形的作图问题：画一个等腰三角形，使它的底角是顶角的2倍。

这一类（另一类见3.5.3小节）黄金三角形的72°底角很有用处。例如，相邻高层建筑相距太近会影响采光，建筑学家们就把阳光入射线在某一时刻与凉台边线成72°角，作为选择房屋之间距离和层次。

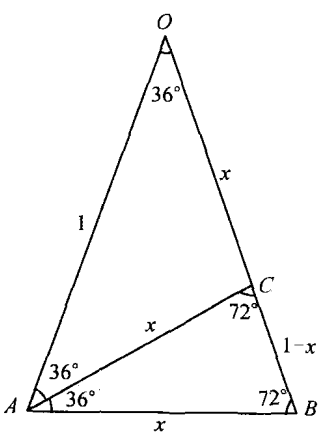


图1-3

在图1-3中，AC平分底角$\angle OAB$，此时显然$OC=AC=AB$，$\triangle BAC\backsim\triangle AOB$。现取$OA=1$，设$AB=x$，于是由$\frac{AB}{BC}=\frac{OA}{AB}$得到$\frac{x}{1-x}=\frac{1}{x}$，即$x^2+x-1=0$，由此解得$x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$。另一个解$\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$不符合题意，已舍去。由于求得了$x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，就能在图1-4中按下面的步骤得到它。

取$OA=1$，作$MO\perp OA$，$MO=1/2$，

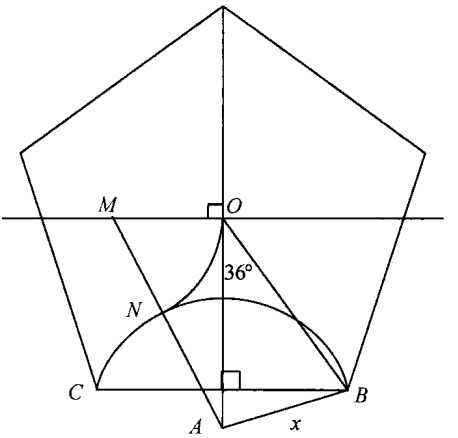


图 1-4

就得到 $AM=\frac{\sqrt{5}}{2}$。以 M 为圆心、MO 为半径画弧得到 N，再以 A 为圆心、AN 为半径画弧得到 B 和 C（$BC\perp AO$，B 和 C 在以 O 为圆心、OA 为半径的圆弧上）。这样，$AB=AN=AM-MN=\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=x$。由于得到了 B，C，就不难画出图 1-4 中那个正五边形的 5 个顶点所在的圆，根据这个圆，就能画出这个圆的内接正五边形了。不过，当时毕氏画这个图是否遵循了尺规作图法，就不知道了。

可不要小看这不起眼的无理数

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0.618\ 033\ 988\ 749\ 894\ 848\ 204\ 586\ 834\ 365\ 64\cdots$$

（到 2009 年已算到小数点之后 314.1 亿位），因为它就是著名的“中末比”，即“黄金分割数”。由此可见，毕氏学派的确“暗藏黄金”两千多年！在中国古典小说中，往往运用“草蛇灰线，伏延千里”的手法。那么，毕氏学派在数学中也是这样做的吗？

由于中末比和毕氏学派熟知的正五边形、正十边形作图有密切的关系，所以要么他们知道中末比而有意把这个宝藏隐藏起来，要么并不知

道这个宝藏。不管如何，后人并没有发现他们的系统研究。

近代数学家们猜测，古希腊的几何学家（如阿尔希塔斯）在研究比例和几何平均值时，就发现了怎样去构造一条线段自身的几何平均值，由此可能引出中末比并构造出黄金矩形。

毕氏逝去两千多年以后，我们感受到了毕氏学派的数学成就的确不同凡响，所以本章并没有浪费向他们表达敬意的笔墨。

第2章　黄金分割——不老的传奇

许多往事都已老去/只有/只有那金色的池塘/依然那样年轻/而美丽

——中国诗人郭曰方

“时间会刺破青春的华丽精致，会把平行线刻上自己的额角，会吃掉稀世珍宝、天生丽质。什么都逃不过它横扫的镰刀。”这是世界著名的英国戏剧家莎士比亚充满哲理的慨叹。

然而，“莎士比亚的时间”只能“吃掉”“物质”——包括“稀世珍宝、天生丽质”，却不能、也不会“横扫”“精神”。黄金分割就是“莎士比亚的时间”不能吞噬的“稀世珍宝、天生丽质”，所以至今依然有“青春的华丽精致”……

2.1　黄金分割的“基本作图”、名称和符号

2.1.1　黄金分割的“基本作图”

分已知线段为两部分，使其中一部分是全线段和另一部分的比例中项，求这一个分点就是把全线段进行黄金分割。

在图2-1中，设 $AB=1$ 为已知线段，作 $BD\perp AB$，使 $BD=AB/2$，连接 AD，再以 D 为圆心，BD 为半径作弧交 AB 于 C，则 C 就是所求的分点。下面我们对这个黄金分割的几何作图加以证明。

由勾股定理可知 $AD=\frac{\sqrt{5}}{2}$。于是

$$AC = AE = AD - BE = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$BC = 1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}。$$

由 $AC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$，$AB = 1$ 和 $BC = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$，可知 $AC^2 = AB \times BC$，即 AC 是 AB 和 BC 的比例中项，C 是分割点，叫“黄金（分割）点”。证明完毕。

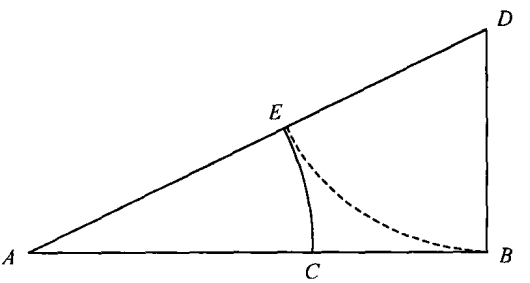


图 2-1　作图法求黄金分割

这个几何作图和证明，显然和毕氏学派在图 1-2 中作正五边形的方法本质上相同。所以，数学家们揣测和推断毕氏学派已经知道了黄金分割，也不无道理。

此外还可轻而易举地用代数法求得黄金分割数。由 $AC^2 = AB \times BC$ 就得到

$$AC^2 = 1 \times (1 - AC),$$

解这个一元二次方程（实际就是 1.3.2 小节的 $x^2 + x - 1 = 0$）并舍去负根，就得到 $AC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$。

2.1.2　黄金分割的名称

黄金分割数为什么会加上“黄金”二字呢？不少人都认为，“说明

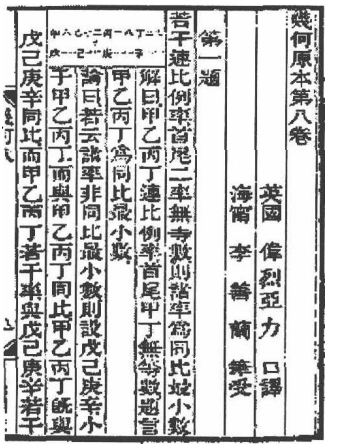
它在科学和艺术上的重要价值”贵如黄金。类似地，它下面的许多“绰号”中都含“黄金”二字。

1. “黄金比率”、“黄金率”

在图 2-1 中，由于 $AC:AB$ 代表比率 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，所以 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 又称为“黄金比率”或简称“黄金率”。这是黄金分割的第 2 和第 3 个名称。

2. “中末比”、“中外比”、“外中比”、“外内比”、“连续比例”、“比例分割”、“理分中末线”

由于 C 在 AB 之“中”，B 在 AB 之末，所以就有黄金分割的这第 4 ~ 10 个名称。其中连续比例和比例分割这两个名称的来历，将在 2.1.3 小节谈到。而理分中末线一词，则是中国明清时代的科学家徐光启和意大利传教士利玛窦，在 1607 年共同翻译并出版的《原本》（前 6 卷）中，首先称呼的。理分中末线的意思是，把整段线（全量）合理地分成中段（大量）和末段（小量）两部分。


几何原本第八卷
英國　偉烈亞力　口譯
海寧　李善蘭　筆受
第一題
若干連比例率首尾二率無等數則諸率俱同比城小數
解曰甲乙丙丁連比例率首尾甲丁無等數題言
甲乙丙丁為同比最小數
論曰若云諸率非同比最小數則設戊己庚辛小
于甲乙丙丁而與甲乙丙丁同比甲乙丙丁既與
戊己庚辛同比而甲乙丙丁若干率與戊己庚辛若干

李善兰等翻译的《原本》首页

翻译并出版《原本》，是明清数学界的大事，所以徐光启等没能译完的后 9 卷，由清代数学家李善兰和来华的英国传教士伟烈亚力在 1857 年译完。

3. “黄金分割律”、“黄金切割率”、“黄金律”、“黄金比”、“黄金比例”、“黄金均值”

这 6 个名词是黄金分割的第 11 ~ 16 个名称。

值得注意的是，“比”和“比例”是两个不同的概念，所以一个数字（或一个式子）不可能同时拥有这种“双重身份”。那么，中末比怎么能既是黄金比，又是黄金比例而“身兼二职”呢？原来，黄金比是

指无理数$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，黄金比例是指像图2-1中的“AC是AB和BC的比例中项”（即$AB:AC=AC:BC$）这样一个比例——在体现$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$这个黄金数上，两者并没有本质上的不同。

4. “黄金分割数”、“内黄金分割数”、“黄金数”

我们约定，黄金分割有时指作图法，有时又指$\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0.618\cdots$这个数——“黄金分割数”或简称“黄金数”。这是黄金分割的第17～19个名称。为了简便，必要时（例如在优选法中）$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$的近似值0.618也被称为黄金数。



帕帕斯

此外，$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$的倒数$\frac{\sqrt{5}+1}{2}=1.618\cdots$，有时也被称为黄金（分割）数或“外黄金（分割）数”此时，$0.618\cdots$被称为“内黄金分割数”——例如在美国数学史家伊夫斯所写的《数学史上的里程碑》一书中，以及美国女数学教师、数学科普作家帕帕斯的《数学趣闻集锦》一书中就是这样。此外，不少人也把$1-0.618\cdots\approx0.382$也称为黄金数。本书除特别指明外，把“黄金分割”和“黄金分割数”混用，而且黄金分割专指$\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0.618\cdots$，而不是指$\frac{\sqrt{5}+1}{2}=1.618\cdots$，0.618或0.382。

对于外黄金数，我们说一下它是否“来路不正”。

在图2-2中，我们用代数方法来求有向线段$AB=1$的外分点C'。设$AC'=-x$，按题意显然有$(-x)^2=1\times[1-(-x)]$，即$x^2-x-1=0$。由此求得正解$x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=1.618\cdots$。由此可见，$1.618\cdots$也是“有来

头”的。

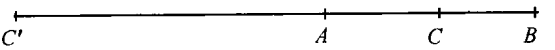


图 2-2　求黄金分割的外分点

此外，我们也可以不用图 2-2 中的有向线段得到 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$：在图 2-1 中，就可直接得到

$$AB:AC=AC:CB=\frac{\sqrt{5}+1}{2}。$$

5. “神灵架构”、“神奇的比例”、“神奇比例”、“神圣比例”、“神圣分割”、“神圣分割线”、“神分线”

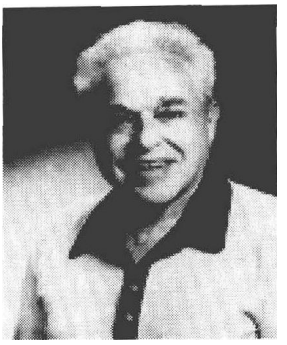
这是黄金分割的第 20 ~ 26 个名称。“神灵架构”是古希腊以来一些人的称呼，“神奇的比例”则来自帕帕斯的《数学趣闻集锦》。其余 5 个名称的来源，将在 2. 2. 2 小节谈到。

2. 1. 3　黄金分割的符号

人们用符号 π 和 e 分别代表圆周率（3. 141…）和自然对数的底（2. 718…），这是“大有来头”的。π 来自希腊文 περιφερια（圆周）的第一个字母，为英国数学家琼斯在 1706 年出版于伦敦的《新数学引论》一书中首先使用。e 则来自瑞士数学家欧拉的姓氏的第一个字母，以纪念他在 1728 年或 1727 年时没有发表的遗作（一份手稿，1862 年才付印）中首先使用它——所以也称为欧拉数。

和 π，e 出自“名门望族”相比，黄金分割的符号却没有“显赫身世”。

中国数学史家梁宗巨在《中国大百科全书·数学卷》等书籍中，用英文大写正体字母 G 表示黄金分割（数）$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$。用 G 表示黄金数，是源于黄金分割的英文 golden section（拉丁文是 sectio aurea）的第一个



伊夫斯

字母。有人也用小写正体的 g 或小写正体希腊字母 ω 来表示黄金数。在伊夫斯的《数学史上的里程碑》中，用斜体 *r* 表示黄金数。而我们这本书中则用小写正体希腊字母 φ 表示——虽然没有来自“显赫世家”，但下面要说，φ 也不是“私生子”。

其实，许多人都用 φ 代表黄金数——例如，帕帕斯在《数学趣闻集锦》中就说，“直到 20 世纪，黄金均值（也以黄金比、黄金分割、黄金比例等著称）才得到一个符号（引者：指下面用的斜体小写 ϕ）”。帕帕斯还在这本书中说，用斜体 ϕ 代表黄金数并非偶然或巧合，因为古希腊著名雕塑家菲迪亚斯名字的前 3 个字母 Phi 的读音，就和 φ 相同——“相信菲迪亚斯在他的作品中用了黄金均值和黄金矩形，既然毕氏所处的那个社会能够选择五角星作为等级的一种记号，那么用 φ 表示黄金均值也就很难说与菲迪亚斯毫无关系。”帕帕斯的说法并非凭空杜撰，因为菲迪亚斯是欧洲古典雕刻艺术顶峰的标志性人物。举例来说，“雅典的王冠”——著名的帕台农神庙上的雕塑，就是他的大作；古代世界的七大奇迹之一的奥林匹亚宙斯神庙中的宙斯神像，也出自他灵巧的双手；传说当时的人虔诚地认为，如果活着没有见到这座用黄金象牙的制成的宙斯神像，是终身的遗憾。既然菲迪亚斯的艺术成就如此巨大，社会地位也如此显赫，那时就有可能用 φ 来“标记”他，而且在 20 世纪得到人们公认。



菲迪亚斯

2.2　从中末比到黄金分割

2.2.1　从欧多克索斯到托勒密

1. “神明”的研究——欧多克索斯与中末比

最早对中末比进行系统研究的人，是古希腊的数学家欧多克索斯。据说，“能否将一条线段分为两部分，使较长部分为原线段和较短部分的比例中项”这个问题，就是他在研究大量的比例问题的过程中最早提出来的。他在深入探究五角星的性质时，曾惊叹道：“中末比到底在这儿出现了!”欧多克索斯最早给出了中末比的表达式，最大的功绩是创立比例论——连《原本》卷 5《比例论》中的大部分内容，都采用了他的研究成果。



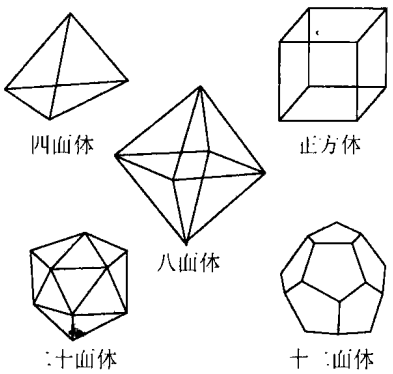
欧多克索斯

欧多克索斯出生在小亚细亚半岛东南角的科尼多斯，游学埃及之后在小亚细亚半岛北部的息稷卡斯成立了欧多克索斯学派，于公元前约 368 年率领他的门徒加入柏拉图学派。这位兼为天文学家、医生、立法家、地理学家的古希腊著名数学家，对许多领域都有贡献，被著名的美籍匈牙利数学家厄尔多斯誉为“神明似的人”。

2. “免进”牌后的“秘密”——柏拉图的中末比

古希腊伟大的哲学家和数学家柏拉图，被誉为“西方思想的创始人”之一。约公元前 387 年，柏拉图在雅典西北郊的圣城阿卡得米（来自一个英雄的名字）创立的学派和学园（院）在当时有巨大的影响。这个维持了近一千年之久的柏拉图学园，是当时整个希腊世界的学术中心，成了求学者们的朝圣之地，阿卡得米后来在西方词汇也成了学园的代名词。使人铭记于心的，是学园门口悬挂的著名牌匾——上面赫然写着“不懂几何者免进”。柏拉图的受毕氏学派的强烈影响，许多人甚至

把他看成毕氏学派的人。所以他和毕氏学派一样，也把中末比作为不可通约量的例子，也就不足为奇了。



这里对1.3.1小节中的为什么5种凸正多面体叫柏拉图体这个问题做出回答。原来，和毕氏认为“数是万物之源”不同，柏拉图更重视“形”的一面：“神永远按几何规律办事。”这样，在他研究“漫游者”（希腊文中行星是漫游者的意思）创建的宇宙模型中，正多面体就起着特殊的作用，曾对它做过“深奥的探讨”，所以直到现在人们还把5种正多面体称作柏拉图体。

3. “严密的科学体系”——“范本”中的“黄金”

最早的严格系统论述并记载中末比的著作，是欧几里得的《原本》。《原本》中几乎所有的定理和证明方法，在欧几里得之前就为人知晓——他只是把它们“网罗”在一起。举例来说，等腰三角形两底角相等，就是在他之前的泰勒斯发现的。但是，《原本》却使此前的同类作品黯然失色而被它迅速、彻底取代而流传至今。不过，他的“网罗”，不是机械的堆砌和摭集，而是前所未有地把繁杂无序的“几何世界”（实际含代数内容）演绎成了一个有机而严密的“欧几里得几何体系”。具体地说，他首先仔细地挑选了一套公理和定理，然后循序渐进地从点、线、


欧几里得

面、体出发，符合逻辑地推出整个体系，使“世界第一次目睹了一个逻辑体系的奇迹。”

距欧几里得两千多年以后的爱因斯坦，在评价《原本》划时代的创新时说：“当一个人最初接触欧几里得几何时，如果不曾为它的明晰性和可靠性所感动，那么他就不会成为一个科学家。”所以，直到今天，《原本》依然是科学而严密地论述科学体系的一个“范本”，被无数杰出的来者仿效。在众多的仿效者的著作中，包括荷兰哲学家斯宾诺莎的《（几何）伦理学》，牛顿的《自然哲学的数学原理》。

《原本》中的卷 2 第 11 题、卷 6 第 30 题都记载有中末比。此外，在《原本》卷 4 第 10 题、卷 13 第 9 题中则指出了正五边形、正十边形和中末比的关系。而在卷 2 第 11 题中对中末比的问题是：“分已知线段为两部分，使全段与一小段构成的矩形等于另一小段上的正方形。”这其实就是黄金分割的问题。

在图 2-3 中，设 $AB=1$ 是已知线段，要求它的黄金分割点。《原本》卷 2 第 11 题用尺规作图法做出了如下的实际分割。

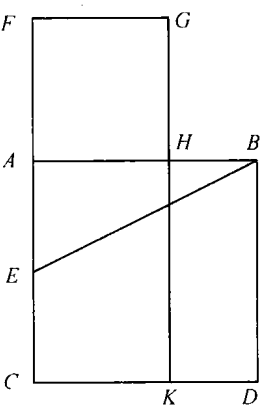


图 2-3

在 AB 上作正方形 $ABDC$，取 AC 的中点 E，连接 EB，延长 CA 到 F，取 $EF=EB$，在 AF 上作正方形 $AFGH$。则可证得 H 就是 AB 上所求的黄金分割点，即 AB 与 HB 所构成的矩形等于 AH 上的正方形。这种作图法被称为欧几里得法。

《原本》卷 4 第 10 题对正五边形和正十边形和中末比的关系的问题是：“作一等腰三角形，使底角是顶角的两倍。”实际上就是要作出 36°和 72°的角，从而作出正五边形和正十边形。卷 6 第 30 题则直接提出黄金分割问题：“截已知线段成中末比。”卷 13 第 9 题又重新提出正十边形、正六边形与中末比的关系。由此可见欧几里得很看重这个分割。

当今教科书中作正五边形和正十边形的方法，就是上述卷4第10题的方法。

4. 天文学家的数学杰作——托勒密的“奇妙关系”



托勒密

另一种更简单的正五边形作图法，来自希腊数学家托勒密的名著《天文学大成》。他在这本书中还给出了圆内接正五、六、十边形边长之间的奇妙关系。这位古希腊天文学成就的总结者，出生在古埃及的上埃及的一座希腊化城市，大气折射（蒙气差）现象就是他最早提出来的。

在图2-4就是托勒密的作图法。长度为2的 AB 是圆（单位圆）的直径，O 是圆心，半径 $OC \perp AB$。以 OB 的中点 D 为圆心、DC 为半径作弧交 AB 于 E，连接 EC。容易证得 EC，EO 分别是圆内接正五、正十边形的一边。

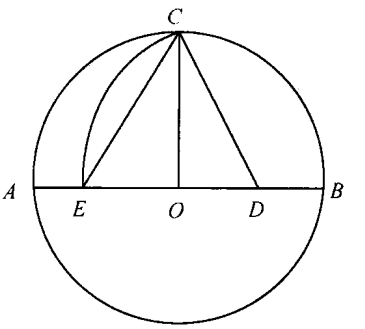


图2-4

因为圆的半径 $OC = 1$，$OD = \frac{1}{2}$，就可算出 $\mathrm{Rt}\triangle CDO$ 的斜边 $CD = \frac{\sqrt{5}}{2}$。

而 $EO = ED - OD = CD - OD = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \phi$。这个结果说明，单位圆内接正十边形的一边，长度正好是 ϕ。

也可在 $\mathrm{Rt}\triangle CEO$ 中算出它的斜边 $EC = \sqrt{1+\phi^2} = \frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$。

由于这个圆的内接正十边形一边的长为 $2\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = EO$，正十边形就能作出来。而这个圆的内接正五边形一边的长是 $2\sin 36° =$

$\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}=EC$，正五边形也能作出来。此外，半径 OC 就是圆内接正六边形一边的长。而圆内接正五、六、十边形各自一边的长，恰好构成一个直角三角形 EOC——真是妙不可言！这种方法，实际上是又一种黄金分割的作图法——E 是 OA 的黄金分割点。

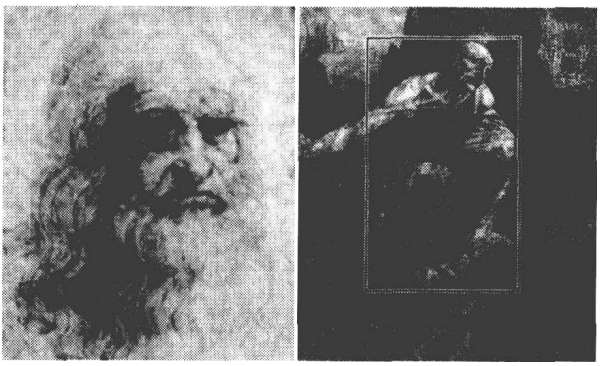
2.2.2　从达·芬奇到马丁·欧姆

1. 蒙娜丽莎的微笑之外——达·芬奇也爱“黄金”

在中世纪和文艺复兴时期，中末比被披上了神秘的外衣。

关于黄金分割的一个问题是，这个名称是谁最先改的？答案是意大利艺术家、科学家达·芬奇。达·芬奇曾研究过中末比，并致力于把他贯彻到自己的艺术实践中去，是他“在人体及建筑比例中发现的不可动摇的美感比例”。

据说，为了得到人体骨骼结构的确切比例，达·芬奇曾挖掘出人的尸体来测量。他是宣称人体的结构比例完全符合黄金分割率的第一人。



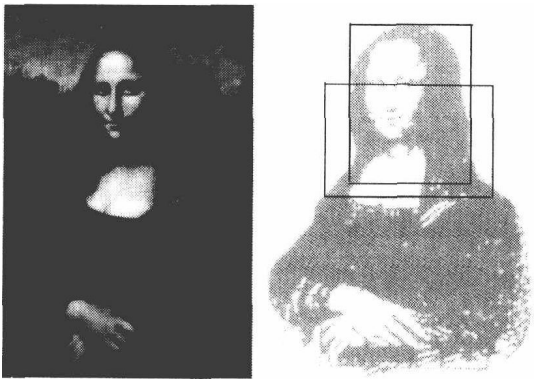
达·芬奇（左）和他未完成的、含有黄金矩形的作品《圣徒杰罗姆》

事实上，黄金矩形已经出现在达·芬奇的许多作品之中——包括他画于 1483 年但没有完成的作品《圣徒杰罗姆》。在这幅画中，杰罗姆的躯干完全在画上附加的黄金矩形之内。“……没有什么能不通过人类的探求而称之为科学的，”达·芬奇说，“除非它是通过数学的解释和证

明的途径。”由此可见，他把“数学元素”黄金分割放进美术作品之中并非偶然的巧合，而是有意为之——在他的著作和思路中，处处表现出对数学应用的强烈兴趣。

达·芬奇之所以不被大众忘记，大多是因为他众多杰出美术作品中的那幅油画——微笑的“蒙娜丽莎”。没想到，他的这“微笑”却来之不易——因为达·芬奇的才华、执著和把“黄金”融入其中的思路。这种思路来源于他对数学的认识：“一个人如果怀疑数学的极端可靠性，那就会陷入混乱之中，他就永远不能平息诡辩科学中那些会导致不断空谈的争辩。”

也许，达·芬奇能“未来先知”：“数学家的模式，就像画家与诗人一样，必须是美的，数学概念同油彩或语言文字一样，必须非常协调。美是第一性的，丑陋的数学在世上不会有永久的位置。”这是英国数学家哈代在达·芬奇死了400年后说的。

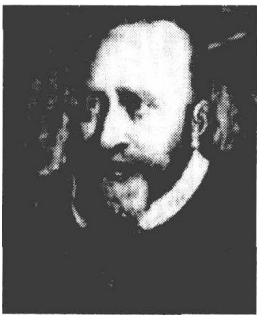


油画《蒙娜丽莎》（左）和它的上面的黄金矩形

达·芬奇被称为“万能的人”，在许多方面都有至今仍被人们津津乐道的建树——来自于他对大自然孜孜不倦的请教。“在以数学为依据的科学研究中，如果有些人不直接向自然界请教，而是只向书本的作者请教，那么他就不是自然界的儿子，而只是其孙子了。”他的这段话不但道出了他作出这些建树的“奥秘”，而且道出了科学原始真谛在大自

然而不是在书本的作者之中的哲理。这在当时就产生了积极的影响，至今依然指导着我们无穷无尽的探索……

略晚于达·芬奇，英国数学家雷科德，在1543 年出版的《技艺基础》一书中，也曾讨论过黄金分割。雷科德是当时有名的律师和哲学家，当过英格兰国王爱德华五世和英格兰女王玛丽亚一世的物理教师，也是当今仍在使用的等号“ = ”的发明人——首次出现在他于1557 年出版的《砺志石》一书中。所以，在英国等地方，“ = ”也被称为“雷科德符号”。



雷科德

不过，这位有名的律师却没能让自己成功脱罪——因债务入狱并死在狱中。

2. “不务正业”的修道士——帕奇奥里的神圣比例



帕奇奥里

意大利法兰图教会的数学家帕奇奥里称中末比为“神圣比例”（也译为“神奇比例”）。他认为世间一切事物都须服从这一神圣的比例法则：“一切乞求成为美的世俗物品，都必须服从‘黄金分割’这一天赐的比例。”此时，中末比已经被披上了神秘的外衣，染上迷人的色彩。帕奇奥里于 1509 年在威尼斯出版的《神圣比例》一书中，专门、系统地谈到这个“上帝规定的比例”。据说，他在 15 世纪末就“发现金字塔之所以能屹立数千年不倒，且形状优美，原因在于其高度与基座每边的结构比例为‘5∶8’。因为有感于这个神秘比值的奥妙与价值，而使用了‘黄金’一词，将描述此比例法的书籍命名为‘黄金分割’。”不过，这种“金字塔奥妙”的说法是一种迷信或者误解。

《神圣比例》和帕奇奥里在同年出版的意大利文的《原本》，重新点燃了人们对立体几何的热情。而他此前于 1494 年在威尼斯出版的

《算数、几何、比与比例集成》一书，是最早印刷的数学著作之一。书中发明的一些当时有用的简写数学符号，大大地推动了数学的发展。

《神圣比例》的一则趣事也许是“题外话”：热衷于黄金分割的达·芬奇热情地为这本书配了插图——其中一幅是于1490年前后创作的《维特鲁威人》。在《神圣比例》中，还有达·芬奇画的5个柏拉图体的图形。当然，达·芬奇也不是“自作多情”：在1496～1499年间，帕奇奥里曾追随达·芬奇在几何方面的工作。

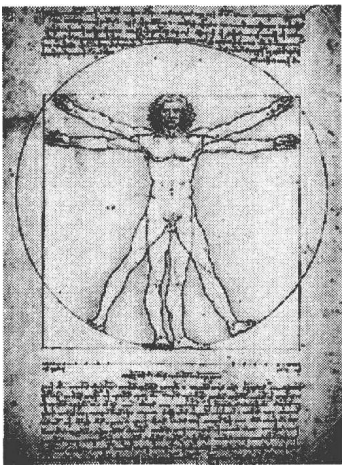


维特鲁威像：表现他在偶然发现一株叶面肥大卷曲的植物刚好长在古希腊废墟跌落地面的柱头前得到灵感，设计了“花型柱头”的场景

这幅《维特鲁威人》，也出现在美国畅销书作家、“全球惊悚小说之王”丹·布朗风靡一时的小说《达·芬奇密码》，和由它改编的同名电影之中。

这里提到的维特鲁威，是一位曾担任过古罗马执政官的盖厄斯·儒略·恺撒的军事工程师，也曾为罗马帝国第一个皇帝奥古斯都（恺撒的甥孙）监制军械。维特鲁威也是一位著名的建筑师，据说当今遍布世界各地的古罗马建筑的“花型柱头”就是他首创的，写有著名的《建筑十书》——欧洲中世纪以前遗留下来的唯一的建筑学专著。也许也是一位中末比的探索者的维特鲁威，曾描述过人体比例。达·芬奇就是根据他的描述，才创造性地绘成这幅恒久传世、无与伦比的《维特鲁威人》的。

《维特鲁威人》太奇特深邃了，它有机而巧妙地融美学和科学原理为一体，被认为是人类艺术史上最奇幻无比、最奥妙无穷的作品之一。但在事实上，没有谁能在同一时间里摆出所谓的《维特鲁威人》姿势，因为它是一系列人体动作的叠加与复合，也可以说没有一种固定的姿势——所有的姿势都是相对的，即使有固定的姿势也远不止1种，而是16种！这16种姿势是这样算出来的：从《维特鲁威人》躯干以外的左



达·芬奇画的《维特鲁威人》：图上下的文字内容是："一座庙宇的各部分应达到最大限度的和谐以及相对于整体的各个部分的匀称关系。进一步说，人体的中心部分自然就是肚脐。因为如果一个人平躺下来时，将手臂和腿脚伸直，把两个圆规放在他的肚脐上，他两手的手指和两脚的脚趾正好处于由此画出的圆的圆周上。而且在人体上可以画出一个圆的同时，它也能画出一个正方形。"

手、右手、左脚、右脚分别取出1个元素进行组合，就得到 $C_2^1 \times C_2^1 \times C_2^1 \times C_2^1 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$。达·芬奇的奇特杰作《维特鲁威人》诞生以后，文艺复兴时期的许多画家都先后画过类似的人体比例图，但没有哪一幅能与它比肩。

于是，我们想起了法国著名画家塞尚的名言："我欠你的绘画真理，我将在画中告诉你。"

3."天空立法者"目光如炬——开普勒的神圣分割

把中末比搞得神秘莫测、云遮雾障的，还有开普勒——他称为中末比为神圣分割或"神圣分割线"（简称"神分线"）。徐光启和利玛窦还在前述共同翻译并出版的《原本》中说，"古人目为神分线也"，就是从开普勒这里来的。比例分割一词也是开普勒的"原创"——在他于1596年出版的《宇宙之秘》一书中。

开普勒还满怀崇敬之情盛赞了中末比和数学中的另一大奇迹——毕氏定理（勾股定理）是数学中的双宝："前者好比黄金，后者有如珠玉。"从开普勒的称赞中，我们可以感受到神圣分割在中世纪以来的科学家们心目中的地位。由于毕氏学派对这两者都有研究，所以从开普勒的盛赞还可以闻感到这些毕氏成果的留香余韵。

作为天文学家的开普勒的最大成果，是找到了在"天上"似乎是乱跑乱动的群星的运动规律——开普勒行星运动三大定律。所以，他被

称为“天空立法者”。这三大定律不但是天空的“交通规则”，而且也是他辞世30多年以后牛顿发现万有引力定律的起点。



开普勒在为天空“立法”

4. 电学大师弟弟的杰作——马丁·欧姆“一锤定音”

最早正式在书中使用黄金分割这一名称的，是德国数学家马丁·欧姆。他在自己于1835年出版的《纯粹初等数学》一书第二版中，使用了德文“goldene Schnitt”（黄金分割）。但是，在1826年刊印的这本书第一版中，他用的却是“连续比例”（stetige Proportion）这位不很闻名的马丁·欧姆，是我们熟悉的、电学上发现著名的欧姆定律的德国物理学家乔治·西蒙·欧姆的弟弟。



马丁·欧姆

与知名度更高的哥哥相比，马丁·欧姆在中国鲜为人知——与他把黄金分割这一当今世界盛行的名称“一锤定音”并不相称。所以，我们在这里要为他打一点“抱不平”——简介他的生平和数学成果。马丁·欧姆生于1792年5月6日，曾担任柏林大学教授，以80岁高龄于1872年4月1日辞世。他在1822年著有《数学的一个完备兼容系的研究》一书，为数系基础的建立作了先驱性的尝试，且为形式代数奠定了基础。

不过，两位欧姆所在的时代，黄金分割的名称还没能广为传播——直到19世纪以后，黄金分割的名称才逐渐通行起来。

“自然界不会一下子披露她所有的秘密。”古罗马哲学家塞涅卡曾这样说过。而现在，我们终于揭开了黄金分割的神秘面纱。正是：“风去庐山雾，云开佛海光。”

源远流长的φ的历史，被加拿大数学史家罗杰·赫茨－菲什勒，

比较详细地总结在《中末比分割的数学历史》一书中。1987 年，这本书在加拿大安大略省滑铁卢市的韦尔福瑞德·劳里尔大学出版社出版。

2.3　不老的传奇

19 世纪末有学者认为，优美的比例是纯理性的，而不是直觉的产物，每一个对象都有潜在于它本身之中的比例，而且应该具有科学性。由此看来，ϕ 既是数学思维的产物，又是美学思维的产物——它是二者的紧密结合。正因为如此，ϕ 具有无穷的魅力和永恒的生命力。

在现代，黄金分割依然遗韵流芳。报纸、杂志、书籍、网络、电影、电视等“媒体”，经常都在用这张“旧船票”去登上“新客船”；詹姆斯·利根在《数学教师》杂志 1984 年第 5 期上中，介绍了他新发现的二次曲线中的黄金比；中国在 21 世纪的头几年出版的不少报刊书中，依然有 ϕ 的一席之地……

总之，两千多年来，黄金分割充分展现了它强大的生命力，推崇它的“粉丝”也前赴后继。“最美最巧妙的比例”，“天然合理的最奇妙的形式比例”这类赞美声不绝于耳，而且还将继续书写——不老的传奇……

第3章　数学中的“密码”
——无处不在的 ϕ

在大多数的学科里，一代人的建筑遭下一代人摧毁，一个人的创造被另一个人破坏。唯独数学，每一代人都在这个古老的大厦上添加一层楼。

——德国数学史家汉克尔

3.1　ϕ 的几何作图

ϕ 的几何作图法有多种，这里新介绍 9 种（连同前面介绍的 3 种，共 12 种）。

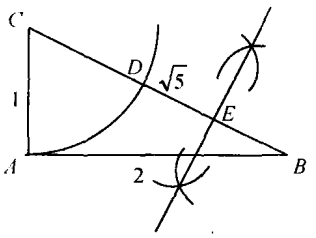


图 3-1

3.1.1　方法 1——勾股法

如图 3-1 所示，取 $AB=2$ 和 $AC=1$ 作直角三角形，就得到斜边 $BC=\sqrt{5}$。以 C 为圆心、1 为半径画弧交 CB 于 E，显然 $DB=\sqrt{5}-1$。再平分 DB 得到 E，于是 $DE=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}=\phi$。

3.1.2　方法 2——相似三角形法

按图 1-4 的方法，作出底角为 72°的等腰△ABO 如图 3-2 所示，再

作$\angle A$的平分线BD交于C，就得到$BC=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$。下面加以证明。

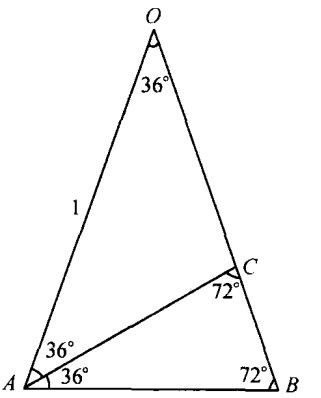


图3-2

由于$\triangle ABC\backsim\triangle OAB$，又因$OC=AC=AB$，所以$CB/AB=AB/AO$，即$(1-AB)/(AB)=(AB)/1$。这样，就得到$AB=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$。

3.1.3　方法3——正五边形法

作一个对角线为1的正五边形如图3-3所示。那么，它的一边的长$AB=a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$。下面给出证明。

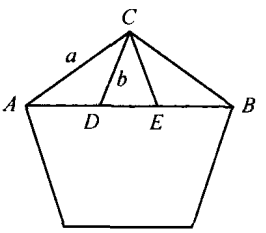


图3-3

作$\angle C$的三等分线CD，CE，交AB于D，E，设$CD=b$。因为$\angle ACB=108°$，再由前面的“方法2”知道$DE=\frac{\sqrt{5}-1}{2}b$，所以$AD+DE+EB=AB$，即

$$b+\frac{\sqrt{5}-1}{2}b+b=1。$$

由此解得

$$b=\frac{4}{(\sqrt{5}+1)^2}。$$

由CD和CE的作法可得到$\triangle ADC\backsim\triangle ACB$，由此可得$AC/AD=AB/AC$，即$a/b=1/a$，或$a^2=b$，就是

$$a^2=\frac{4}{(\sqrt{5}+1)^2},$$

于是

$$a=\frac{2}{\sqrt{5}+1}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}。$$

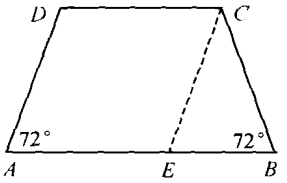


图 3-4

显然，方法 3 的前提就是要能作出正五边形——将在 3.1.2 小节中介绍它的作图法。

3.1.4 方法 4——梯形法

如图 3-4 所示，作底角为 72°、上底和腰相等、下底为 1 的等腰梯形 $ABCD$。

作辅助线 CE 之后，由“方法 2”或“方法 3”的证明知道，上底 DC 的长就是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$。

3.1.5 方法 5——内角平分线法

如图 3-5 所示，以 $AB=1$ 和 $AC=\frac{1}{2}$ 作直角三角形，再作 $\angle C$ 的平分线 CD，交 AB 于 D。最后在 DB 上截取 $DE=DA$。这样，E 就是 AB 的黄金分割点，即 $AE=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$。现证明如下。

显然斜边 $BC=\frac{\sqrt{5}}{2}$。由内角平分线定理得知：

$$\frac{AD}{DB}=\frac{CA}{CB}\Rightarrow\frac{AD}{AD+DB}=\frac{CA}{CA+CB}$$

$$\Rightarrow\frac{AE}{AB}=\frac{2AB}{AD+DB}=\frac{2CA}{CA+CB}$$

$$=\frac{2CA}{(\sqrt{5}+1)\ CA}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}。$$

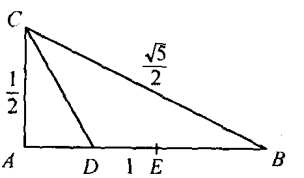


图 3-5

由 $\frac{AE}{AB}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 得知作图成立。

3.1.6 方法 6——相交弦法

如图 3-6 所示，作 $AC=2$，在 AC 的垂直平分线 DE 上取 $BO=\frac{1}{2}$。

再以 O 为圆心、OA 为半径画圆，与 DE 交于 D，E，其中 D，O 在 AC 的两侧。这样就得到 $DB=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$。

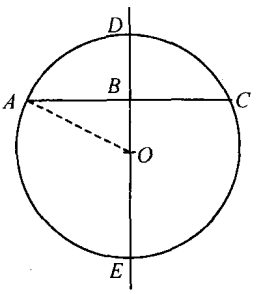


图 3-6

用圆的相交弦定理，不难来证明这个作图。

因为 Rt$\triangle ABO$ 中的斜边 $AO=\frac{\sqrt{5}}{2}$，所以同为半径的 $OE=OD=AO=\frac{\sqrt{5}}{2}$。由相交弦定理知，$DB\times BE=AB\times BC\Rightarrow DB\times(BO+OE)=AB\times BC\Rightarrow DB\times\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=1\times 1\Rightarrow DB=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$。

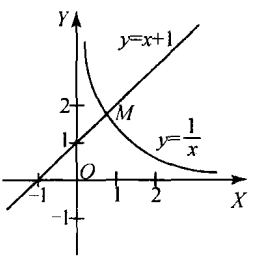


图 3-7

3.1.7　方法 7——图像法

在平面直角坐标系中，如图 3-7 所示作直线 $y=x+1$ 和反比例 $y=\frac{1}{x}$的图像，得到它们在第一象限的交点 M，则 M 的横坐标等于$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$。

证明很简单：由 $y=x+1$ 和 $y=\frac{1}{x}$得到 $x+1=\frac{1}{x}$，这就解得 $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$，其中正值解就是$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$。

3.1.8　方法 8——面积割补法

把边长为 1 的正方形割补成长比宽多 1 的矩形，则这个矩形的宽就是$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$。具体作图方法就是我们已经在 2.2.1 小节的 3. 谈过的欧几里得法，现借那里的图 2-3 给出简单证明。

Rt△ABE 的斜边 $BE=\frac{\sqrt{5}}{2}\Rightarrow FE=BE=\frac{\sqrt{5}}{2}\Rightarrow AH=FA=FE-AE=\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$。证明完毕。

此外，由 $FC=FA+AC=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}\right)+1=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 和 $AH=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，可算得矩形 $CFGK$ 的面积为 1——的确和正方形 $ABDC$ 的面积相等，并且因为宽为$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$而不是黄金矩形的“冒牌货”。

3.1.9 方法 9——双圆弧法

如图 3-8 所示，正方形 $ABCD$ 的边长为 1，平分 AB 于 E，连接 DE。以 E 为圆心、EA 为半径画弧，交 DE 于 F。再 D 以为圆心、DF 为半径画弧，交 CD 于 G。那么 $DG=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$。

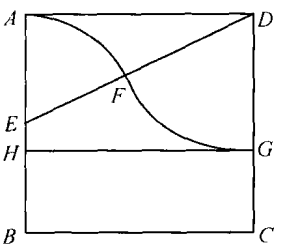


图 3-8

这是因为 DE 为 Rt△ADE 的斜边，所以 $DE=\frac{\sqrt{5}}{2}$，于是

$$DG=DF=DE-EF=DE-EA=\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}。$$

最后，图 2-1、图 2-3 和图 2-4 示的作图法，是方法 10～12。

附带说明，图 3-8 表示的方法，也是由已知正方形作黄金矩形的一种方法——只需作 GH 平行于 CB，就得到长边为 1 的黄金矩形 $AHGD$。

此外，作出外黄金分割$\frac{\sqrt{5}+1}{2}=1.618\cdots$也有许多方法，下面介绍其中的一种。

如图 3-9 作出边长为 1 的正方形 $ABCD$，用 MN 把正方形 $ABCD$ 平

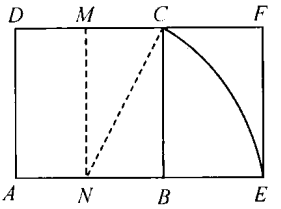


图 3-9

分为两半，再以 N 为圆心、NC 为半径画弧交 AB 的延长线于 E。则 $AE=1.618\cdots$。它的证明留给读者朋友。

如果再作 $EF\perp AE$ 交 DC 的延长线于 F，也能得到黄金矩形 $AEFD$。

3.2　正五边形的几何作图

1972 年，美国数学史家莫里斯·克莱因出版的数学名著——《古今数学思想》中说，画正五边形是个很受注意的问题，因为它是在建筑设计中提出来的。我们在前面已经提到过几种画正五边形的方法，下面将在“限制条件”作正五边形。

3.2.1　在已知圆中作正五边形

要求用尺规作图法。

1. 方法 1

在图 3-10 中，半径 AO 为 1 的$\odot O$，是已知圆。现作直径 $PQ\perp AO$，以 Q 为圆心、1 为半径画弧交$\odot O$ 于 F，再以 F 为圆心画半径等于 QA 的弧交 OP 于 G。那么，AG 的长就是$\odot O$ 的内接正五边形的长。这样，就可在$\odot O$ 中作出它的内接正五边形 $ABCDE$。下面加以证明。

显然，据作图，可知 $\triangle FOQ$ 是正三角形，所以作出 $FH\perp OQ$ 时，垂足 H 必然是 OQ 的中点，而且 $FH=\frac{\sqrt{3}}{2}$。又 $FG=QA=\sqrt{2}$。因此

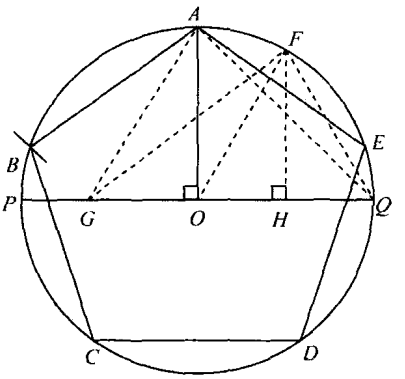


图 3-10

$$GH=\sqrt{FG^2-FH^2}=\sqrt{2\times1^2-\frac{3}{4}\times1^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}。$$

于是

$$OG=GH-OH=\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}。$$

这样，就得到

$$AG^2=OA^2+OG^2=1^2+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2=\frac{5-\sqrt{5}}{2},$$

于是 $AG=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$。

这就证明了前面的作图是正确的。

从这个作图还可以看出，正五边形的一边的长是半径的$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$倍。根据这个关系，就可以作出边长是任意大小的正五边形——这个方法的一个优点。例如，我们要作边长为 1 的正五边形，只需在半径为$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$的圆中作出内接正五边形就可以了。这里的$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$由 1 除以$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$得到。

2. 方法 2

在图 3-11 中，以 O 为圆心，1 为半径画圆，并作互相垂直的直径

MN 和 AP。平分半径 OM 于 K，就得到 $OK=KM$。

再以 K 为圆心，KA 为半径画弧与 ON 交于 H，那么 AH 就是正五边形的边长。最后以 AH 为弦长，在圆周上截得 A，B，C，D，E 各点，就是 $\odot O$ 的内接正五边形 $ABCDE$ 的各顶点。证明如下。

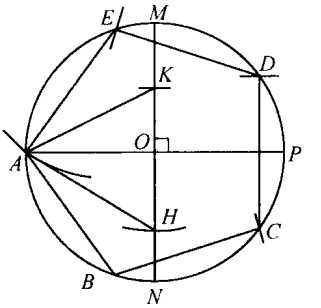


图3-11

因为 $KO=\frac{1}{2}$ 和 $OA=1$，所以在 $\mathrm{Rt}\triangle AOK$ 中用勾股定理，可求得 $AK=\frac{\sqrt{5}}{2}=KH$。而 $OH=KH-KO=\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}$，这就在 $\mathrm{Rt}\triangle AOH$ 中用勾股定理由 $OH=\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}$ 和 $OA=1$ 求得 $AH=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$。显然，它就是 $\odot O$ 的内接正五边形的一边。

3. 方法3

由于半径为1的圆的内接正十边形的边长为 $2\sin 18^\circ=\phi$，所以可先作出圆的内接正十边形，然后再作内接正五边形。

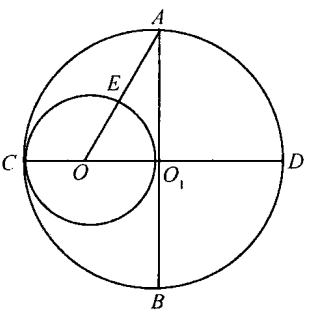


图3-12

具体画法按图3-12，作 $\odot O_1$ 的两条相互垂直的直径 AB 和 CD，再以 CO_1 的中点 O 为圆心，CO_1 的一半为半径作 $\odot O$。连接 AO，与 $\odot O$ 交于 E。那么，AE 就是 $\odot O_1$ 的内接正十边形的一边。由此作出 $\odot O_1$ 的内接正十边形后，作出 $\odot O_1$ 的内接正五边形。

3.2.2　已知边长作正五边形

要求用尺规作图法。

分析 设正五边形 $ABCDE$ 的一边 $AB=2$ 为已知，现延长 BA 与 DE 交于 F。由于它的一个内角 $\angle EAB=108°$，所以得到两个结果：①$\angle FAE=\angle FEA=72°$，由此得到 $\angle AFE=36°$；②$\angle AEB=\angle ABE=36°$。

这样，就知道 $\triangle AEB\backsim\triangle BFE$，从而得到 $BE/BF=BA/BE$，也就是 $BE^2=BA\times BF$。但 $BE=EF=AF$，所以 $AF^2=BA\times BF$；可见 F 是外分 AB 成黄金分割的分点。于是，就得到作图方法如下。

如图 3-13，作 $BG\perp AB$，并取 $BG=1$。以 G 为圆心、GB 为半径作圆。连接 AG 并延长，交⊙G 于 H。分别以 A，B 为圆心，各以 AH 为半径画弧 a，b 相交于 D。再以 B 为圆心画$\overset{\frown}{AC}$交 a 于 C；以 A 为圆心画$\overset{\frown}{BE}$交 b 于 E。这里，设 C，D，E 在 AB 的同一侧。这样，五边形 $ABCDE$ 就是所求的正五边形。

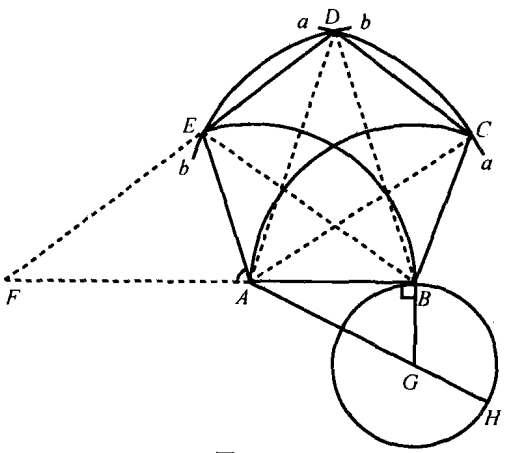


图 3-13

当然，也可以从作图的过程来加以证明。在 Rt$\triangle ABG$ 中，由于 $AB=2$，$BG=1$，所以 $AG=\sqrt{5}$，这就得到 $AC=AH=AG+GH=\sqrt{5}+1$。

在等腰 $\triangle ABC$ 中，由 $AB=BC=2$、$AC=\sqrt{5}+1$，使用余弦定理，就得到 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\times BC\times\cos\angle ABC$，即

$$(\sqrt{5}+1)^2=2^2+2^2-2\times2\times2\times\cos\angle ABC。$$

由此解得

$$\cos\angle ABC = -\frac{\sqrt{5}-1}{4}。$$

由此，可得到在 0 ~ 180°的 $\angle ABC = 108°$。

类似地，可证明五边形 *ABCDE* 的其余 4 个角也是 108°，也就证得五边形 *ABCDE* 就是所求的正五边形。

当然，由于给出的条件不同，显然作正五边形的方法也就有多种，不可能一一列举。

3.2.3　用“生锈圆规”作正五边形

1. “无刻度尺生锈圆规作图法”

这种作图法要求用无刻度直尺（“无度尺”）和开口大小固定的圆规（“生锈圆规”）——我们称为“无刻度尺生锈圆规作图法”，简称“无度尺锈规法”。

在《原本》卷 4 的命题 11 中，欧几里得曾给出了一个画法，但没有要求用“生锈圆规”。这说明当时还没有提出这一问题。

约 980 年，阿拉伯数学家阿布 - 韦法率先采用“锈规法”作图。

意大利数学家塔尔塔里亚、费拉里、卡尔丹、蒙蒂、本尼德提，和另外许多国家的 16 世纪的数学家，都先后探讨过用“无度尺锈规法”精确作出正五边形的问题。后来，本尼德提扩大了这个问题，寻找用“无度尺锈规法”来解欧几里得的所有作图问题。一般的作图问题，由丹麦数学家乔治·莫尔在 1673 年出版的《奇妙的欧几里得简编》一书中解决。

2. “单规法”

“无度尺锈规法”还不能让数学家们“过瘾”，于是按古希腊人“尽量简单”的思想，只用一个圆规的作图方法——“单规法”应运而生。

乔治·莫尔在 1672 年出版的《欧几里得概要》一书指出，凡是能

用尺规作图法作的图，也能用“单规法”完成。但他的工作长期无人知晓，直到1928年才被发现——但“专利权”已“过期作废”。当然，没有直尺就不能画出连接两点的直线，但给定了这两点就以画出这直线和圆的交点，并且给定了两对点就可画出由这两对点所决定的两条直线的交点。

在《欧几里得概要》出版125年之后的1797年，意大利数学家洛伦·马歇罗尼发表了《圆规几何学》一书，从理论上证明用“单规法”就足以完成欧几里得的所有作图——这被称为“马歇罗尼（圆规）问题”。这样，才使莫尔的方法大显于世。因此，现在将与之相关的一些论断都统称为“莫尔－马斯凯罗尼定理”。马歇罗尼还认为，这种只用圆规的作图法比用尺和规的作图法更准确、更有价值。

著名的“拿破仑分圆”问题（把已知圆分为四等份），就是一个著名的单规问题。

3. “单尺法”

既然有“单规法”，就应该有“单尺法”，这就是“斯泰纳直尺问题”。

1759年，德国数学家兰伯特首先提出了只用无刻度直尺作图的问题（“单尺法”），成为“直尺几何”的鼻祖。不过，他发现了类似$\sqrt{ab}$的式子用“单尺法”不能作出来，而需要一个辅助圆和它的圆心（一个定圆）才能作出。1822年，法国数学家庞斯列指出，由于“单尺法”只能作那些代数形式是有理代数式的图形，所以兰伯特的发现是正确的。

1833年，瑞士－德国数学家雅格布·斯泰纳出版了《用直尺和一个定圆进行的几何作图》一书，证明了兰伯特的发现和庞斯列的观点——用“单尺法”和一个定圆，就能完成尺规作图法能作出的所有图形。后来，人们就称这一问题为“斯泰纳直尺问题”。

1904年，意大利数学家塞韦里又证明了尺规作图只用“单尺法”和一段给定圆弧（不管多么小）和它的圆心，就能完成。

4.20 世纪下半叶的余波

当然，后来还有许多数学家对“无度尺锈规法”、“单尺法”进行过无数的研究，并间断持续到今天。例如，出生在英国的美国几何学家唐·佩多于1979年（在加拿大的一家数学杂志上）和1982年分别提出了两个问题：①已知两点 A，B，仅用一把只能画半径为1的圆的“生锈圆规”，能否作出点 C，使得 $\triangle ABC$ 是正三角形（不能用线段连接 A，B）？②已知两点 A，B，仅用一把只能画半径为1的圆的“生锈圆规”，能否作出线段 AB 的中点（不能用线段连接 A，B）？

1983年，中国数学家张景中和杨路发表了对前一个问题的解答。1986年，又发表了他们和中国青年侯晓荣对后一个问题的解答。这样，他们就为解决了佩多的这两个问题写下了“精彩的一笔”。据说，佩多听到这个消息以后，非常高兴。此外，侯晓荣还大大加强了“生锈圆规”的“本领”：能作出直线上所有的有理数点，甚至所有整数系数二次方程的根；能作出普通圆规可以作出的正多边形等。

这一系列的研究，解决了用“生锈圆规”作正五边形的问题——我们知道，尺规作图法能作出正五边形。

目前，人们提出了新的课题：能否只用“生锈圆规”完成所有尺规作图的问题？如果不行，只用几个“生锈圆规”又行不行？

3.3　五角星的几何作图

这里只说已知“边长”作出五角星的方法。

假定图3-14中 $AB=2$（待画的五角星 $ABCDE$ 的“边长”）为已知，作出以它为“边”的五角星。

设 AB 与 DE 的交点为 F。由 $\angle FDB=\angle FBD=\angle FAD$，知 $\triangle BDF\backsim\triangle BAD$；由此得到 $BD/BA=BF/BD$，即 $BD^2=AB\times BF$。

又因为 $\angle ADF=\angle AFD=72°$，所以 $AF=AD=BD$，就得到 $AF^2=AB\times BF$。也就是说 F 是内分 AB 的黄金分割点。这样，就可按下面的方

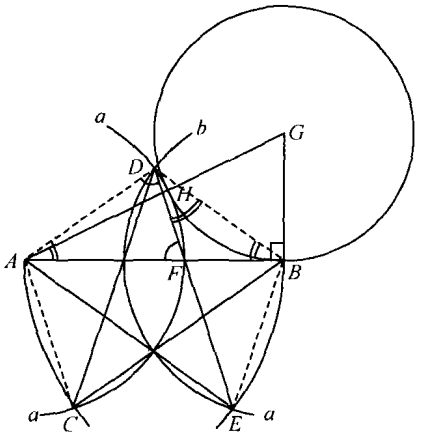


图 3-14

法作图。

如图 3-14 所示，作 $BG \perp AB$，且取 $BG = 1$。以 G 为圆心，作半径为 1 的 $\odot G$。连接 AG 交 $\odot G$ 于 H。以 A，B 各为圆心画半径等于 AH 的弧 a，b 交于 D。以 B 为圆心，画 $\overset{\frown}{AC}$ 交 a 于 C；以 a 为圆心，画 $\overset{\frown}{BE}$ 交 b 于 E。这里 D 居于 AB 的一侧，C，E 居于 AB 的另一侧。这样，就得到了所求的五角星 $ABCDE$。

显然，因已知条件不同，作五角星也有其他方法——例如，最简单的就是已知正五边形作五角星。

3.4 φ与黄金螺线

3.4.1 φ与“矩形黄金螺线”

1. “矩形黄金螺线”的来历

把图 3-15 左边的黄金矩形 $ABCD$（宽 $CD = \phi$，长 $AD = 1$）分割出一个正方形 $ABFE$。那么剩下的矩形 $CDEF$ 是一个什么矩形呢？显然，$ED = AD - AE = 1 - \phi = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$。这样，$ED : CD = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} : \phi = \phi$。由此可以看出，矩形 $CDEF$ 竟然是一个黄金矩形！

这是所有黄金矩形的一个奇妙之处——一个黄金矩形靠三边分割出一个正方形之后，必然剩下一个“儿子”黄金矩形。

按上面的方式，我们把“儿子”黄金矩形 $CDEF$ 继续分割，就得到图 3-15 中的“孙子”黄金矩形 $DEGH$；如此继续，就得到“第四代”黄金矩形 $EGIL$ 和“第五代”黄金矩形 $GIJK$……

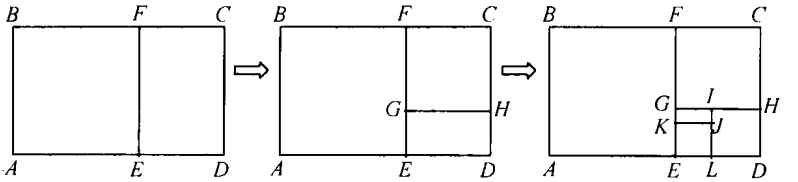


图 3-15

在图 3-15 的这一系列正方形中，按图 3-16 作出每一个正方形的四分之一段圆弧，这些圆弧就组成了一条“螺线”的轮廓。如果更细致一些——用“光滑”的曲线连接起来，就成了一条真正的螺线。显然，这条螺线经过这一系列的黄金矩形的各一个顶点，应该叫“由黄金矩形产生出的黄金螺线”，简称“矩形黄金螺线”或“黄金螺线”——本书的第一类黄金螺线。

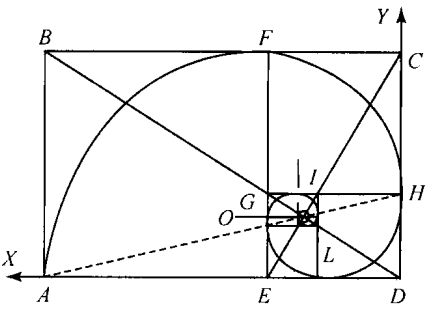


图 3-16

那么，这条黄金螺线总长是多少呢？可能有人会猜测，既然黄金矩形可以一代一代地无限产生，那这条黄金螺线就是无限长。其实，这条黄金螺线的长度是$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$！

2. 黄金矩形的 10 个趣味

（1）在图 3-16 中，CD 是 AD 与（$AD-CD$）的比例中项，即 $AD:CD=CD:(AD-CD)$。

（2）这一系列正方形犹如“套盒娃娃”——一个套一个，其边长组成了一个等比数列：ϕ，ϕ^2，ϕ^3，…。和套盒娃娃不同的是，这些正方形虽然越来越小，但没完没了。

（3）这一系列黄金矩形也像套盒娃娃，也越来越小和没完没了；它们有唯一公共点 O——相似中心；这些黄金矩形都相似，每后一个和

相邻的前一个的相似比为 ϕ，面积比则为 ϕ^2。

（4）从大到小，每一个黄金矩形的长边的黄金分割点，分别是 F，H，L，K，…；黄金螺线 $AFHLK$……都要依次经过；还可以看出，这条黄金螺线也必然依次经过 A 和 F，（F）和 H，（H）和 L……——从大到小的每一个正方形两个相对的顶点。

（5）B，G，D 三点共线，也和 O 共线；C，I，E 三点共线，也和 O 共线；……

（6）从大到小的这一系列黄金矩形中，第一个与第三个……的一条对角线 BD，DG……重合；第二个与第四个……的一条对角线 CE，EI……重合。对角线 BD，CE……还和 AH 在相似中心 O 共点。

（7）黄金矩形 $ABCD$ 的一条对角线 DB，与黄金矩形 $CDEF$ 的一条对角线 CE，互相垂直；当然，更小的一系列黄金矩形各自的一条对角线，必然分别是 BD 和 CE 的一部分。下面证明 $DB \perp CE$。

在图 3-16 中，显然 $\triangle ABD \backsim \triangle CDE$，于是 $\angle ADB = \angle DCE$。由于 $\angle ADB$ 的 DA 边和 $\angle DCE$ 的 CD 边互相垂直且“反向”，所以 $\angle ADB$ 的另一条边即 DB 边，一定和 $\angle DCE$ 的另一条边即 CE 边互相垂直且“反向”。这就证得了 $DB \perp CE$。显然，这种对角线互相垂直的关系，会无限继续下去。

当然，也可以用其他方法证明。例如，从 $AD = 1$ 和 $CD = \phi$ 出发，利用勾股定理和相似三角形对应边成比例的关系，算出 $\triangle CDO$ 各边之长的平方，一定会得到 $CO^2 + OD^2 = CD^2$ 的结果，这就证明了 $\triangle CDO$ 是直角三角形，从而得知 $DB \perp CE$。又如，建立适当的直角坐标系之后，求出 BD 的斜率和 CE 的斜率的乘积为 -1，也能证明 $DB \perp CE$。这两个证明留给读者朋友。

（8）$CO : BO = OD : CO = OE : OD = OG : OE = \phi$，而 $OH : OA = \phi^2$。

（9）如果在图 3-18 中，以 D 为原点，直线 DA 和 DC 为分别为 X 轴（正向朝左）、Y 轴（正向朝上），则 O 点的坐标为 $\left(\frac{\phi^2}{1+\phi^2}, \frac{\phi^3}{1+\phi^2}\right)$，与 ϕ 有关。

（10）黄金螺线是一对“双胞胎”。通过 B，C，D，E，G，I……可以作出第二条矩形黄金螺线（图 3-17）。它的 $BCDE$ 段在黄金矩形 $ABCD$ 的外面，所以应该是前面那条矩形黄金螺线的“双胞胎哥哥”。

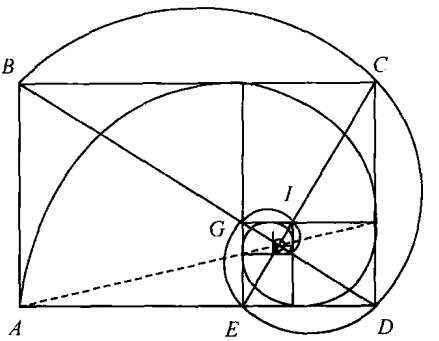


图 3-17

3. 黄金螺线是等角螺线

以图 3-18 的 O 为极点（即极心）建立极坐标系，就可以在黄金螺线上的任意点（如 P_1 点）作出切线 P_1T_1、极角 $\theta = \angle P_1OX$ 和极（半）径 $\rho = OP_1$。我们把 $\angle OP_1T_1$ 称为 P_1 点的“径切角”——极径与切线之间的夹角。同样，可作出黄金螺线上其他的任意点的“径切角”，如 $\angle OP_2T_2$ 和 $\angle OP_3T_3$ 等。

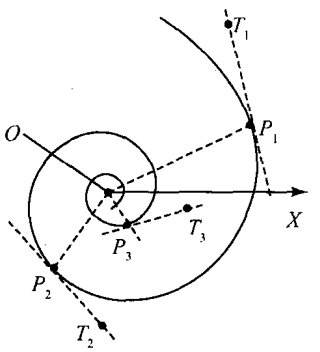


图 3-18

如果螺线上任意点的“径切角”都相等，那这条螺线就是等角螺线——这也是对数螺线被称为等角螺线的原因。在极坐标系中，等角螺线的一般方程是 $\rho = ke^{\alpha\theta}$（其中 k 和 α 是常数；e 为自然对数的底 2.718…，也可用其他合适的数做底），若取 $k = \alpha = 1$，它的极坐标方程就简化为 $\rho = e^{\theta}$。可以证明，黄金螺线是等角螺线——也叫对数螺线，因为它以几何比率（即某个数的几次方幂）随 $\theta \to \infty$ 而无限增长。

4. 美妙的对数螺线

对数螺线是最优美、奇妙的平面几何图形之一。“等角螺线是一种迷人的曲线，”帕帕斯在《数学趣闻集锦》中就说，“它出现在以下的自然界的生长形式中：鹦鹉螺的壳、向日葵的种子盘、球蜘蛛的网等。”等角螺线的奇特之处在于，它增大时不会改变自己的形状，这在所有螺

线中是独一无二的——看来，黄金矩形和黄金螺线的确特立独行。



纪念托里拆利诞辰350周年的邮票：苏联1959年2月5日发行

那么，对数螺线美在哪里呢？

对数螺线的优美奇妙之处——或者说特点，有三个。

一是，对数螺线每一次全程旋转，都会以一个固定的比率增加它到极点的距离；这个比率因螺线的不同而异，并决定螺线的增长率。所以，螺线看起来像渐开的花一样美丽。

二是，由于对数螺线是等角螺线，所以它就成了圆的“近亲”——圆的“径切角”是90°。事实上，圆就是一种增长率为0的特殊对数螺线。我们知道，圆也是最美的图形之一。

三是，如果沿着对数螺线上的任意一点向内朝着极点走，就必须走许多圈，但走的距离却是有限的——一个有趣的、似乎难以置信的迷人事实！

当然，等角螺线还有其他许多重要而有趣的性质。

最早（在1638年）系统研究等角螺线的，是法国数学家笛卡儿，他的方法是利用他创立的、沿用至今的直角坐标系——用数形结合的方法解决几何图形和代数方程的关系。在1645年，伽利略的学生、意大利物理学家、数学家托里拆利发现了它的“弧长”有一个重要而有趣的性质。

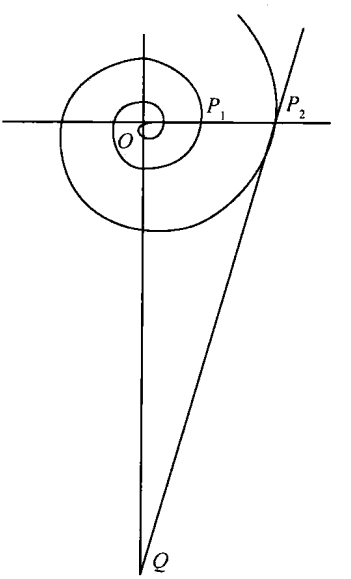


图3-19

在图3-19中，P_2Q是等角螺线上P_2

点的切线，$OQ \perp OP_2$，P_2Q 和 OQ 相交于 Q。那么，等角螺线从 P_1 点到 P_2 点的螺线的长（“弧长”），和 P_2Q 相等。这就是托里拆利发现的重要性质。

此外，上述“迷人的事实”，也是托里拆利在1645年发现的。

3.4.2　ϕ 与“正方形黄金螺线”

我们知道，在黄金矩形内作一个正方形之后，剩下的必是一个黄金矩形，还可依次作下去。如果将这些从大到小的正方形的顶点用“光滑”的曲线连接起来，将得到一条“由正方形产生的黄金螺线”（图3-20），简称“正方形黄金螺线”或“黄金螺线”——本书中的第二类黄金螺线。

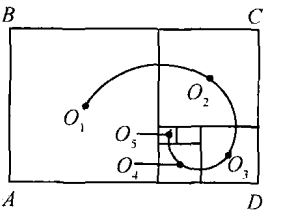


图3-20

这条黄金螺线，也是一条对数螺线或等角螺线。

3.4.3　ϕ 与“三角形黄金螺线”

1. 黄金三角形中也有“套盒娃娃”

图3-21（a）的△ABC，是顶角为36°的等腰三角形——它的底和腰之比为 ϕ（通过图1-1已经证明 $BC:AB=\phi$）。不但它和 ϕ 密切相关——在△ABC 中可以看到它的许多个“相似版”（例如△BCD），而且它本身就包含着 ϕ，所以叫黄金三角形。图3-21（a）就是图1-1的“克隆版”——只不过我们把它变成了又一个“套盒娃娃”——在这个黄金三角形内通过连续平分从大到小的三角形的底角，又能作出一系列越来越小的黄金三角形 BCD，DBE，…，有无数多个。

当然，一系列越来越小的黄金三角形，还可由△ABC 通过另一种方法作出来——图3-21（b）说明了这种方法。此时，得到位置和摆放方向不同的另外两种黄金三角形：一种如△MNO 所示，另一种如△PQR 所示。这类“锐角黄金三角形”的一个“绝技”是，能用5个同样大

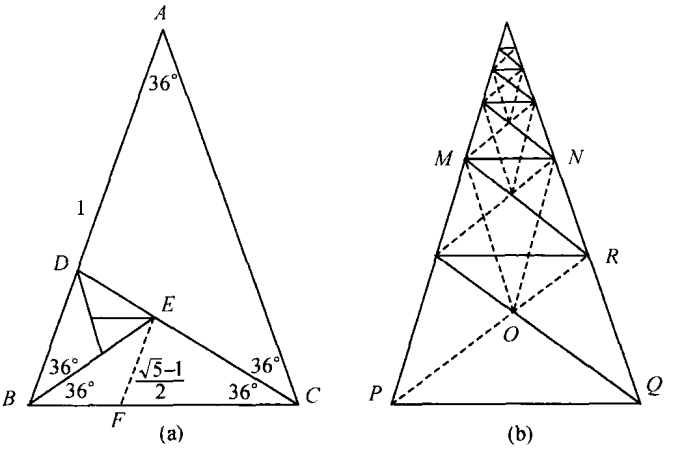


图 3-21

小的三角形来拼成与它本身相似的三角形；而其他任何三角形都没有这个“绝技”——这样拼都只要4个就行了，而用5个却无法拼成！有兴趣的读者，不妨一试。

另一类黄金三角的形状，像△*BCE*——底和腰之比为 φ，顶角为108°。如果把图 3-21（a）中△*BCE* 的顶角∠*BEC* 三等分，又可得到两个黄金三角形——和△*BCE* 相似的△*BEF*，和△*ABC* 相似的△*CEF*。

2. “三角形黄金螺线”这样诞生

在图 3-21（a）中，先以 *D* 为圆心、*DA* 为半径画$\overset{\frown}{CA}$（图 3-22），再以 *E* 为圆心、*EB* 为半径画$\overset{\frown}{BC}$，并如此继续。这样，一条螺线的轮廓就把这些三角形的顶点连接起来。这轮廓勾勒出的螺线，叫“由黄金三角形产生的黄金螺线”，简称“三角形黄金螺线”或黄金螺线——本书中的第三类黄金螺线。

我们还可以把这条三角形黄金螺线从 *C* 向 *A* 延长到 *O*（*A* 到 *O* 为$\overset{\frown}{AO}$），形成一条“三角形外黄金螺线”。这里的 *O* 是 *CB* 的外黄金点——$CO=\frac{\sqrt{5}+1}{2}AB$，而$\overset{\frown}{AO}$是以 *B* 为圆心、*BA* 为半径画出来的。当

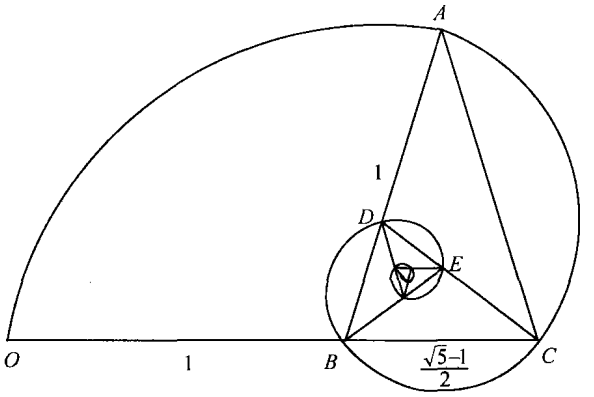


图 3-22

然，还可以顺着这个方向继续延长下去……

三角形黄金螺线也是等角螺线。

3.4.4　超级“黄金粉丝”詹姆斯

1. 詹姆斯的欣喜

3.4.1 小节提到的黄金螺线即对数螺线或等角螺线的那些奇妙之处，常使数学家们着迷。瑞士数学家詹姆斯·伯努利（1654—1705，下称詹姆斯）就是它的一个超级“粉丝”。

詹姆斯之所以成为超级“黄金粉丝”，是因为他被人们津津乐道的一件轶事——长期醉心研究黄金螺线。



詹姆斯·伯努利

这个“粉丝”的汗水终于浇出了“黄金螺线族”之花——1691 年，詹姆斯发现将黄金螺线作某些变换之后，依然各自是黄金螺线。它们包括：黄金螺线的渐伸线（即渐开线）、渐屈线（即渐缩线）、垂足线（从极点到切线的垂足的轨迹）、反演曲线、焦线、回光线。以极点为发光点，经过对数

螺线反射后得到无数根反射线，和这些反射线相切的曲线，就是回光线。

由于詹姆斯的这一研究成果，对数螺线也就有了新的名称——伯努利螺线。

2. 斯人已去螺线在

对于这些新发现，詹姆斯欣喜和诧异不已。在惊叹对数螺线的神奇巧妙之余，他仿效古希腊物理学家和数学家阿基米德把几何图形（一个圆柱和内切于它的球）刻在墓碑上的做法，临终前嘱咐后人把对数螺线刻在自己的墓碑上。据说，他是继阿基米德之后第一个在墓碑上展示自己的数学成果的数学家。他还配上了一句含意深刻的哲学名言“纵使变化，依然故我”（Eadem mutata resurgo），以象征某种不朽之物，并嘱咐将它刻在墓碑上那条对数螺线的周围（图 3-23）。这一铭文是如此美妙，以至于各家译文是如此之多：“再生乃故我”、“虽然改变了，我还是和原来一样”、“尽管改变，我仍将再现”、“虽经沧桑，我仍将以故我出现”、“我将再变为我自己”。

这段一语双关的碑文，总结了对数螺线最显著的特征：它在大多数普通几何变换中的不变性。无论你伸长、缩小还是旋转它，你最后总能得到同样的螺线！就像前面提到的那样。

这个图形是如此被人津津乐道，以至于出现另一个版本：一个下部有阿基米德螺线的图（图 3-24）——图中下部的这条螺线显然不同于图 3-23 的对数螺线。阿基米德螺线又名等速螺线，它的简化极坐标方程是 $\rho = \alpha\theta$（其中 ρ 和 θ 分别为极坐标的极半径和极角，α 为常量）。

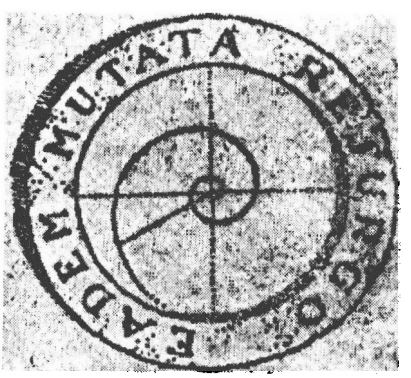


图 3-23　詹姆斯墓碑上的螺线和铭文 1

那为什么会有两个不同的

版本呢？原来，这是粗心的雕刻师误将阿基米德螺线（图 3-23）当成对数螺线刻在图 3-24 所示的墓碑的下部！

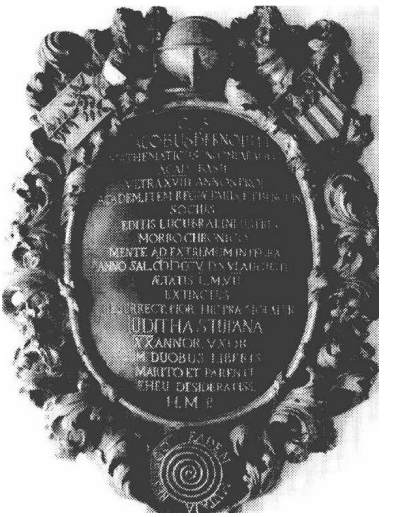


图 3-24　詹姆斯墓碑上的螺线和铭文 2

天哪！要是詹姆斯地下有知，可能会把这个数学“水不平”和粗心而“张冠李戴”的“马大哈”雕刻家，拉到身边去搞一点“数学普及”。

不过，这里还有一个问题：图 3-23 显然不是图 3-24 下部的直接放大，那么有两个不完全相同的图又是怎么回事呢？对此，本书无力回答，诚求教于读者。

三百多年如水流，斯人已去螺线在——在詹姆斯的墓碑上，更在数学人的心中！

3. 永远的伯努利家族

詹姆斯又叫雅格布·伯努利或雅格布第一·伯努利，是著名的伯努利数学和自然科学家族的主要成员之一。这个庞大的科学家族，原来是今天比利时安特卫普（当时属于荷兰）的新教徒，1583 年因天主教的迫害移居瑞士巴塞尔。这个家族从尼古拉·伯努利（1623—1708）到汉斯·本诺·伯努利（1876—1959）的 300 多年中，就涌现了不少于 120 多位的著名数学家。他们在数学（如微积分学）、物理学（如力学）等领域都有重大而流芳至今的贡献。例如，数学中著名的“伯努利数”和“伯努利级数”，就是詹姆斯的杰作。再如，流体力学上著名的“伯努利原理”，就是詹姆斯的侄儿丹尼尔·伯努利（1700—1782）发现的。他们俩和约翰·伯努利（1667—1748，詹姆斯的弟弟，丹尼尔的父亲），是这个家族中的“三杰”。

在世界数学和物理学史上，有如此重大贡献并影响深远的家族，不

说伯努利家族是绝无仅有，也是寥若晨星。由此，我们想起了中国“积德百年元气厚，读书三代雅人多”的对联。

“不以物喜，不以己悲”，这是中国北宋政治家、文学家范仲淹在《岳阳楼记》的名言。世事沧桑，岁月轮回，将当今许多在“商品经济”大潮就放弃科技的学者和放弃学习机会的平民百姓等，对比历经几百年对科学“痴心不改”的伯努利家族，缺的就是远见卓识和“不以物喜，不以己悲”的健康形态。



丹尼尔·伯努利



约翰·伯努利

“坚守就有远方”——实现振兴中华的宏伟目标，在“科教兴国”的真抓实干中，在干云的豪气中，在“缓步的骆驼比飞驰的骏马更早到达终点”意识中……

“永别了，过路人！——我把墓穴带到远离你的地方。道路已经在你僵硬的脚下展现：但应想象，这是你在前行。”

1905年，年仅21岁的美国著名科学史家乔治·阿尔弗雷德·萨顿，在作品《诗人的一生》的结尾处，这样优美地抒情。这一作品是他早年发表的。我们愿意“借诗献佛”，把这段饱含诗意的话，献给探索科学奥秘的伯努利家族，相伴他们到地老天荒！

3.4.5 无处不在的螺旋

在大自然的生物中，螺旋形无处不在。牵牛花、金银花、许多豆类植物（如豇豆）的藤蔓，都是以这种形状缠绕在其他物体上。兰科绶

草属的植物绶草，则自成螺旋，花也就自下而上成螺旋形开放。当然，这些螺线并不是阿基米德螺线或黄金螺线，而是接近圆柱螺线或圆锥螺线。



与蜻蜓同属和蛉目的一种豆娘——青纹细蟌在螺旋藤蔓上



绶草花开在螺旋茎上



海马

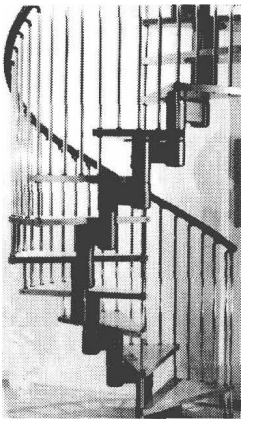
在海马的尾巴和许多动物身上，也可以找到螺旋形。2004 年 10 月，中国和瑞典的古生物学家们首先在贵州江口县的一条小河边挖掘出来的新物种“八辐射动物”（化石）——八臂仙母虫身上，就有 8 条从中心向外辐射的螺线。人的内耳结构、指纹形状、蛋白质的多肽链、决定遗传的物质——核酸（包括脱氧核糖核酸 DNA）阶梯结构的大体形状，也是螺旋形。氨基酸分子呈右螺旋形，淀粉分子呈左螺旋形。有的动物的飞行线路也是螺旋形：盘旋捕食的猎鹰，飞行觅食的蝙蝠……

有人说，人的内耳之所以是涡旋状，是经过漫长岁月进化而成的。而“巧合”的是，风鸣琴（一种古希腊乐器）的琴弦在风中振动时，就因为“涡流尾迹效应”而产生优美悦耳的乐音。难道人耳是为了欣赏这种乐音才这么进化的吗？

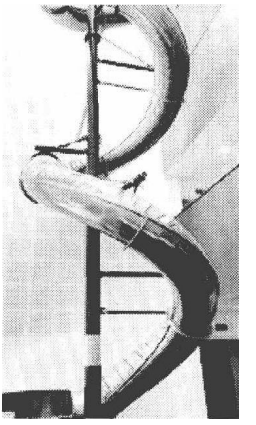
许多自然现象也牵涉螺旋形：龙卷风、飓风等的“风眼”的形状，有时沙漠中被旋风吹刮后的沙……

五花八门的螺线，还有人的作品。

建筑学家们把一些楼梯建成螺旋形，既美观也可节约空间——比萨斜塔内 294 级（一说 297 级）的螺旋形阶梯，就是一个著名的例子。2009 年，英国谢菲尔德市建成了一座数字中心大楼，也有一条巨大的

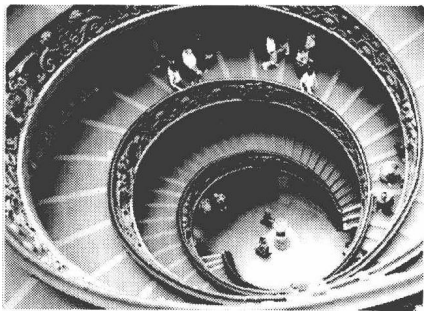


螺旋形楼梯



谢菲尔德市的螺旋形滑梯

管状螺旋形滑梯。据说，从这个滑梯的4楼下到底楼，只需要滑7秒钟。类似的作品是螺旋形房屋——美观兼顾充分采光。芝加哥螺旋塔就是一个名例。这座高2 000英尺（1英尺合0.304 8米）的著名高楼有150层，由设计2004年雅典奥运会主场馆等的西班牙建筑大师卡拉特拉瓦设计，预计在2012年完工。当然，也有把象征“生命的旋梯”作为装饰物的——如北京中关村街心的不锈钢DNA双螺旋结构模型。

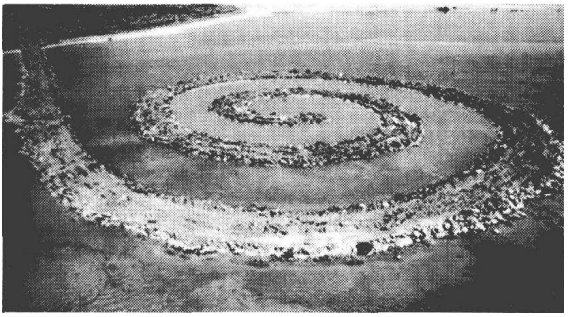


圣彼德大教堂的鹦鹉螺线形走廊

不但有芝加哥螺旋塔这种外表呈螺旋形的建筑物，还有内部呈螺旋状的建筑物——梵蒂冈教廷的圣彼德大教堂就是一个名例。这座有鹦鹉螺线形走廊的教堂，是文艺复兴盛期意大利最杰出的建筑家布拉曼特，和同期意大利“画坛三杰”之一的米开朗琪罗等从1506年开始设计建造，在1526年完工的。

走进美国犹他州大盐湖东北角的岸边，就会看到一片孤立无助的荒凉。然而，一幅“后现代主义”的“大地艺术”作品，却在这里吸引着无数游客的眼球。它就是美国艺术家罗伯特·史密森在1970年4月

建造的“螺旋形防波堤”。“螺旋形防波堤”由泥土和黑色玄武岩等石头构成，堤宽约4.6米螺旋直径约50米，总长约457米，中心离岸边30米远。游客可在堤坝上走几圈，除此以外没有任何实用功能。

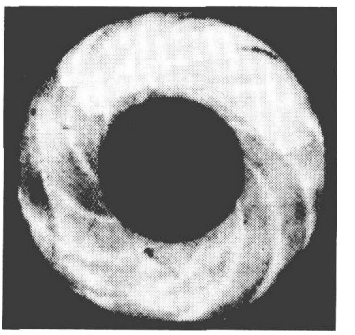


螺旋形防波堤

大地艺术又名“土方工程”或“地景艺术”，它的第一声“啼哭”是在1968年10月纽约的Dwan画廊——这里举办了一个名为“土方工程”的展览。重要人物有卡尔·安德烈和“大地艺术的精神领袖”罗伯特·史密森等。

螺线或涡旋形的作品之所以受到人们的偏爱，是因为它的美。正如英国著名画家和艺术理论家荷迦兹所说：“螺线或涡旋形逐渐缩小到中心，都是美的形状。”那为什么我们的感觉与“精神眼睛”，会本能和直观地从中得到满足呢？这难道意味着人类的精神和“内在世界”，同外在世界之间有一种比历史更为原始的同构对应关系吗？

当然，我们司空见惯的螺丝、弹簧、钻杆这些“小件”的身上，也能找到螺旋形纹。



有呈阿基米德螺线凹槽的玉环

另一件有人造螺线的作品，是在河南西川夏寺的春秋时期楚墓中和其他许多地方（如安徽寿县蔡侯墓、江苏吴县和西安等地）出土的玉环。在西川夏寺出土的一只玉环上，有10个呈阿基米

德螺线的凹槽。2004年，一位哈佛大学的学者研究后认为，这些凹槽的均匀性和精密度强有力地表明，它们是由精密复式机械加工出来的。由于阿基米德生活在公元前200多年，所以这不但表明中国至少比以前认为的约公元前二三世纪才有这种机械（首次出现在西方公元1世纪的文献中）早两三百年，而且表明中国比阿基米德更早知道这种螺线。

无处不在的螺旋或涡旋表明，它们是自然事物普遍的存在形式，而且受到人类“特别的爱”。

3.5 φ与数学形影不离

几乎在数学的每一个角落，都有φ的身影或隐藏的φ。例如，自然数的起点“1”，就是一个隐藏“双φ”的数——$1=1/\phi-\phi$ 或 $1=\phi^2+\phi$。本书搜集了许多个这种φ的藏身之地，但依然挂一漏万。

3.5.1 平面几何中的φ

1. 等腰梯形中的φ

如图3-25所示，如果底角为72°的等腰梯形的腰等于上底，则上下底之比等于φ。下面给出证明。

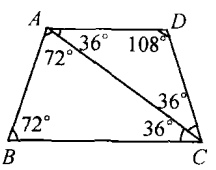


图3-25

因为$\angle A=\angle D=108°$，连接AC后就得到等腰三角形DAC中的$\angle DAC=\angle DCA=36°$，于是$\angle ACB=36°\Rightarrow\angle BAC=36°$。显然$\triangle BAC$是黄金三角形，就得到$\frac{AB}{BC}=\phi$，于是$\frac{AD}{BC}=\phi$。

2. 五角星中的φ

对五角星中的φ，我们在前面已经零星提到过，在这里补充之后作一个梳理。

在图3-26的半空心五角星中，长短不一的线段共有4类：NM类、BN类、BM类、BE类。它们的关系是：$NM:BN=BN:BM=BM:BE=$

ϕ。下面加以证明。

（1）连接 D，E 和连接 K，M，容易证得 $DE // KM // NQ$，所以 $BM : BE = KM : DE$，但 $KM = ME$，$DE = KE = BK = BM$，所以 $BM : BE = ME : BM$，得到 M 是 BE 的黄金点。

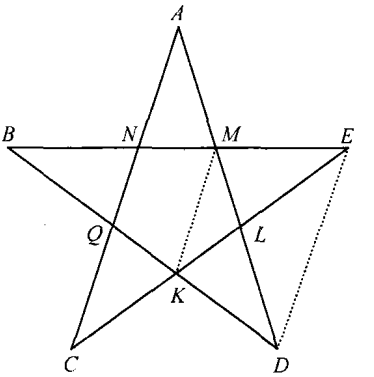


图 3-26

（2）由 $BN : BM = NQ : KM$ 和 $NQ = NM$，$KM = BN$，知道 $BN : BM = NM : BN$，得到 N 是 BM 的黄金点。

又因为 $ME = BN$，所以 $NM : BN = BN : BM = BM : BE = ϕ$。

这就是说，在半空心五角星的每边中，都有 3 个 ϕ。

3. 对角线长为 1 的正五边形的边长为 ϕ

如图 3-27 的正五边形（实线）的 5 条对角线，构成一个半空心五角星（虚线）。显然，AC 与 BD 的交点 F 是 AF 和 AC 的黄金点，也就是 AB 和 AC 的黄金点。

由于 $AC = 1$，所以 $AB = ϕ$。

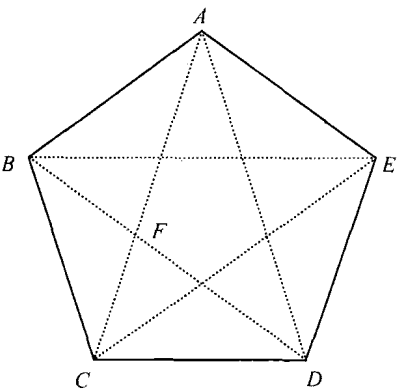


图 3-27

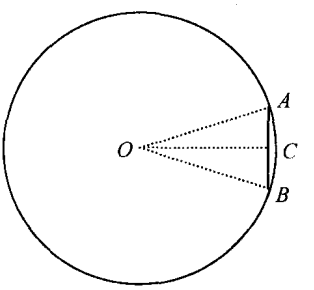


图 3-28

4. 单位圆中内接正十边形的边长等于φ

在图3-28所示的半径为1的单位圆⊙O中，AB是⊙O的内接正十边形。连接OA，OB，并从圆心O作出△AOB的AB边上高OC。

因为正十边形的中心角$\angle AOB$是36°，所以$\angle AOC = \angle BOC = 18°$，所以$AC = \sin 18° = \phi/2$，于是$AB = \phi$。

这里用到$\sin 18° = \phi/2$，它的证明见3.5.3小节。

可以看出，φ不但与正五边形“有缘”，而且和正十边形也密不可分。

5. 单位正方形中的φ

在边长为1的单位正方形（图3-29）的正中，挖去一个边长为a的小正方形，使小正方形的面积和剩余部分的面积的平方在数值相等。那么$a = \phi$。

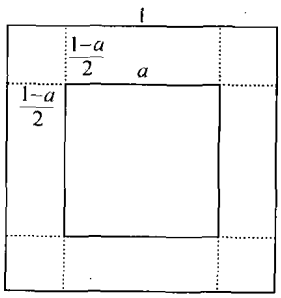


图3-29

不难看出，剩余部分由4个更小的正方形和4个矩形组成，面积为$4\left(\frac{1-a}{2}\right)^2 + 4a\left(\frac{1-a}{2}\right)$。于是，由题意可列出式子

$$a^2 = \left[4\left(\frac{1-a}{2}\right)^2 + 4a\left(\frac{1-a}{2}\right)\right]^2,$$

就是$a^4 - 3a^2 + 1 = 0$。由此解得$a^2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$，舍去不合题意的$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$后得到$a^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$。再解得$a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$（已舍去不合题意的负根）。

6. 三角形中的φ

在平面直角坐标系中，如果以A（1，a），B（a，1），C（−1，$-a$）为顶点的三角形的面积等于a，那么$a = \phi$。

由题设可知，△ABC的三个顶点是逆时针方向，所以

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ -1 & -a & 1 \end{vmatrix} = a。$$

展开这个行列式并整理，可得 $a^2+a-1=0$。于是 $a=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$（已舍去不合题意的负根）。

当然，由平面直角坐标系中的两点距离公式算出 AB，BC，CA 之长后，用海伦公式计算面积，再用这个面积等于 a，也可证明。这项任务留给读者。

上述三角形的特例，是顶点在（1，ϕ），（ϕ，1），（-1，-ϕ）上。那么，这个三角形的面积就是ϕ。

7. “等比三角形”中的“ϕ1”

在图3-30中，CD 是 Rt$\triangle ABC$ 斜边 AB 上的高，如果 $\triangle ACD$，$\triangle CBD$，$\triangle ABC$ 各自的面积 S_1，S_2，S_3 成等比数列，则 $\sin B=\phi$——我们所说的“ϕ1”。这是1980年中国高考的一道数学题，以下是一种证明。

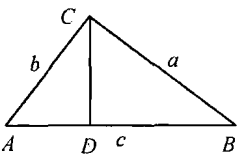


图3-30

$$S_1=\frac{AD\times CD}{2},\quad S_2=\frac{BD\times CD}{2},\quad S_3=\frac{AB\times CD}{2}。$$

由题意有 $S_2^2=S_1\times S_3$，所以代入 S_1，S_2，S_3 的上述值之后，就得到 $BD^2=AD\times AB$，即 D 是 AB 的黄金点。

又因为 $AC^2=AD\times AB$，所以 $BD=AC$。就得到 $\sin B=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{BD}{AB}=\phi$。

“ϕ1”（$\sin B=\phi$）还有另外一种来历。

在图3-30中，如果三边 b，a，c 成等比数列，则 $a^2=bc$；又因 $c^2=a^2+b^2$，所以 $c^2=b^2+bc$，就是 $\left(\dfrac{b}{c}\right)^2+\dfrac{b}{c}-1=0$。解得 $\dfrac{b}{c}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$（已舍去负根），所以 $\sin B=\dfrac{b}{c}=\phi$。

其实，$\sin B = \phi$ 在这个 Rt$\triangle ABC$ 的两种来历本质相同：$\triangle ACD$、$\triangle CBD$、$\triangle ABC$ 的面积等比数列，容易证明它们又是相似三角形，所以三边必然成等比数列。这一点，可在下面得到证明——在下面还可看出，这两个成等比数列的公比不同。

8. “等比三角形”中的“ϕ2”

如果 Rt$\triangle ABC$ 的三边 b，a，c 成公比为 q 的等比数列，则 $q^2 = \phi$——我们所说的“ϕ2”。

利用图3-30，由$\frac{b}{a} = \frac{a}{c} = q$，知$\frac{b}{c} = \frac{b}{a} \times \frac{a}{c} = q^2$。而前面已经得到$\frac{b}{c} = \phi$，所以 $q^2 = \phi$。

由此可见，如果一个直角三角形的面积成等比数列，那它的三边也必然成等比数列；但两个公比不同：面积的公比是 $q^2 = \phi$，三边的公比是 $q = \sqrt{\phi}$。

9. “等比三角形”中的“ϕ3”

如果三角形的三边成公比为 q 的等比数列，则 $\phi < q < 1/\phi$——我们所说的“ϕ3”。

设三角形的三边依次为 a，aq，aq^2（这里 $a>0$）。由三角形两边之和大于第三边可得：$a + aq > aq^2$，并且 $aq + aq^2 > a$。解这两个不等式，分别得到

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} < q < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

和

$$q < \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \text{或} q > \frac{\sqrt{5}-1}{2}。$$

要使两式同时成立，只有取$\frac{\sqrt{5}-1}{2} < q < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$，即 $\phi < q < 1/\phi$。

这个结论和前面得到的 $q = \sqrt{\phi}$吻合，于是得到 $\phi < \sqrt{\phi} < 1/\phi$。

10. 拼图中的 ϕ

把正方形按图 3-31 切割开以后，拼成图 3-32 那样的矩形，则 $a:b=\phi$。下面是证明。

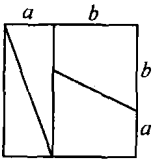


图 3-31

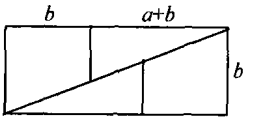


图 3-32

正方形的面积为 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$；矩形的面积为 $b(b+a+b)=2b^2+ab$。

由题意得 $a^2+2ab+b^2=2b^2+ab\Rightarrow a^2+ab-b^2=0$，两边除以 b^2，就得到关于 a/b 的二次方程 $(a/b)^2+a/b-1=0$，于是 $a/b=\phi$（已由题意舍去负根）。

11. 旋转体中的 ϕ

如图 3-33 所示，在矩形 $ABCD$ 的边上取 H 点，连接 AC，HC。如果 $\triangle ABC$，$\triangle AHC$，$\triangle HDC$ 分别绕 AB 旋转一周后，所得到的旋转体的体积相等，则 $\frac{AH}{BC}=\phi$。下面是证明。

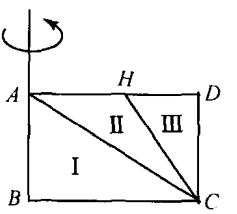


图 3-33

这 3 个三角形依次编号为Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，相应体积为 $V_{Ⅰ}$，$V_{Ⅱ}$，$V_{Ⅲ}$，则

$$V_{Ⅰ}=\frac{1}{3}\pi(BC)^2\times AB,$$

$$V_{Ⅱ}=\frac{1}{3}\pi(BC^2+AH^2+BC\times AC)AB-\frac{1}{3}\pi(BC)^2\times AB。$$

由题设，有

$$\frac{1}{3}\pi(BC)^2\times AB=\frac{1}{3}\pi(BC^2+AH^2+BC\times AC)AB-\frac{1}{3}\pi(BC)^2\times AB,$$

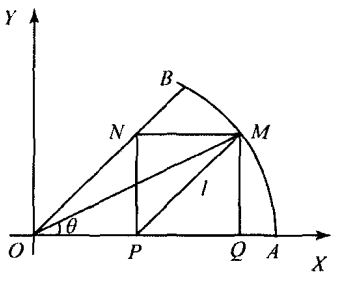


图 3-34

即 $AH^2 + AH \times BC - BC^2 = 0$，解得$\frac{AH}{BC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \phi$（已舍去负根）。

12. 扇形中的 ϕ

如图 3-34 所示，扇形 OAB 的中心角为 45°，半径为 1，矩形 $PQMN$ 内接于这个扇形，且对角线 l 有最小值，则 $l_{min} = \phi$。下面是一个解析法证明。

设$\angle MOA = \theta$，则有 M（$\cos\theta$，$\sin\theta$），P（$\sin\theta$，0）。于是

$$l^2 = |PM|^2 = (\sin\theta - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta$$

$$= 1 - \sin 2\theta + \sin^2\theta = 1 - \sin 2\theta + \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\sin(2\theta + \phi)。$$

当 $\sin(2\theta + \phi) = 1$ 时，则 l^2 有最小值$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$，此时 $l_{min} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \phi$。

13. 圆中的 ϕ

如图 3-35 所示，小的 $\odot B$ 与小的 $\odot C$ 的半径都是 2，分别通过对方圆心，并相交于 P 和 Q。大的 $\odot B$ 与大的 $\odot C$ 的半径都是 4，也分别通过对方圆心，并相交于 X 和 Y，而且显然与小的 $\odot B$、小的 $\odot C$ 相切——切点分别是它们的直径端点 A 和 D。那么，以 PQ 为直径

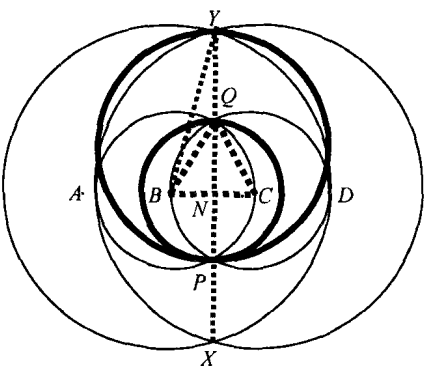


图 3-35

的圆的直径（m）跟以 PY（或 QX）为直径的圆的直径（n）之比是 ϕ。下面证明这个结论。

显然，$\triangle QBC$ 是边长为 1 的正三角形，它的高 $QN=\frac{m}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}=PN$，于是 $m=\sqrt{3}$。

又因为 $BY=2$，$BN=\frac{1}{2}$，所以在 $\mathrm{Rt}\triangle BYN$ 中可用勾股定理求得 $YN=\frac{\sqrt{15}}{2}$。这样，就求得 $n=YN+PN=\frac{\sqrt{15}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)}{2}$。

于是 $m:n=\sqrt{3}:\frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\phi$。

14. 线段中无限多的 ϕ

C 是 AB 的黄金分割点（图 3-36 上部）。当年毕氏学派已经发现，将 CB 重叠在 AC 上，让 C 对准 A，则 B 点恰好又把 AC 作黄金分割（中部）。可类此下去（下部），会出现无穷无尽的黄金分割点。这是黄金分割点的“对折繁殖法”。

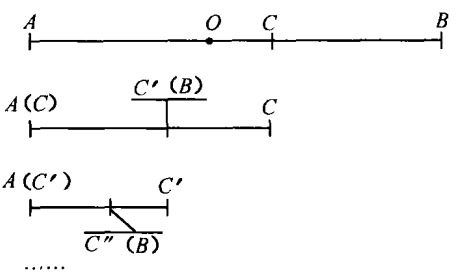


图 3-36

这里要特别注意，很容易证明，C 点和 C' 点对于 AB 的中点 O 对称。也就是说，C'点可以通过 C 点“对折”（折点是 O）来得到，而这就是我们在 5.2.2 小节中“对折法”的数学依据。

15. 其他

此外，我们还从 1.3.2 小节知道，黄金三角形的底与腰之比等于 ϕ。而且把底角平分后又会出现黄金三角形，可无限进行下去。

3.5.2 代数中的φ

1. “未知数”中的φ

设$0<a<1$，但a的大小不确定。这样，显然$\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\cdots\sqrt{1-a}}}}$（式中省略了无穷多项）是一个含有不确定数$a$的“未知数”。那么，这个“未知数”是多少呢？

说来也许难以置信：$\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\cdots\sqrt{1-a}}}}=\phi$！下面给出这个结论的证明。

设$\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\cdots\sqrt{1-a}}}}=x$（显然$x>0$）。于是，这个方程可变形为$\sqrt{1-x}=x$，两边平方后就得到$x^2+x-1=0$。于是解得$x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}=\phi$（已舍去负根）。

由此可见，当$0<a<1$时，“未知数”$\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\cdots\sqrt{1-a}}}}$是“冒牌货”——它实际上是一个数值确定的已知数！不但如此，从解这道题的过程中还可以看出，当$0<a<1$时，a的大小对$\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\cdots\sqrt{1-a}}}}$的值无关紧要——它始终等于φ！

2. “已知数”中的φ

证明实数$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}\cdots}}}}=\phi$。

按“1.‘未知数’中的φ”的方法，设

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}\cdots}}}}=x$$

之后，就得到$\sqrt{2-\sqrt{2+x}}=x$。由于$x>0$，可将方程两边平方，得到$2-\sqrt{2+x}=x^2$，再平方整理后得到

$$x^4-4x^2-x+2=0,$$

也就是

$$(x+1)(x-2)(x^2+x-1)=0。$$

解此方程并由题意容易知道 $x\neq -1$，$x\neq 2$，$x\neq\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$，所以 $x=\phi$。

这也是用无限根式表达 ϕ 的一种方法。

用无限根式表达 ϕ 还有另外的一种方法——$\phi=\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}}$。证明如下。

设分母的值为 x，整个分式的值就是 $\frac{1}{x}$；又由于分母是无限根式，所以第二层根式的值也为 x，此时整个分式就可以表达为 $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$。于是有 $\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ 即 $x^2-x-1=0$，由此解得 $x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$（已舍去不合题意的负根）。于是 $\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}}=\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\phi$。

3. 连分数中的 ϕ

$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}}$（可以写成 $\frac{1}{1+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{1+\cdots}$）是一个实数，也是一个循环连分数。那么，它的值是多少呢？

按“1.‘未知数’中的 ϕ”的方法，设 $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}}=x$，就得到 $\frac{1}{1+x}=x$。于是

$$x^2+x-1=0。$$

由此解得 $x=\phi$。于是，$\frac{1}{1+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{1+\cdots}=\phi$。

实际上，$\frac{1}{1+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{1+\cdots}$ 就是 ϕ 的一种无穷连分数。

还有另一种证法。

设 $x=\phi=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，把它代入 $\frac{1}{1+x}$，就有 $\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=$ x，也就是 $x=\frac{1}{1+x}$。把 $x=\frac{1}{1+x}$ 替代 $\frac{1}{1+x}$ 中的 x，就得到 $x=\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}$。

如此继续，就可证得后面的 $x=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+x}}}=\cdots=\phi$。

由这道题的证明可知，当 $x=\phi$ 时，可以得到一连串有趣而奇怪的等式：

$$x=\frac{1}{1+x}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+x}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+x}}}=\cdots。$$

这里的奇怪之处在于，虽然这些连分数有“长”有“短”，但并不影响它们始终和 φ 相等！

4. 连分数中的 $1/\phi$

显然，由于 $1/\phi=1+\phi$，所以 $1+\cfrac{1}{1+}\ \cfrac{1}{1+}\ \cfrac{1}{1+}\ \cfrac{1}{1+}\ \cfrac{1}{1+\cdots}=1/\phi$。

$\phi=0.618\ 033\cdots$ 和 $\phi=1.618\ 033\cdots$ 是两个没有“规则数字”而“不吸引眼球”的“东施”。经过“化成连分数”这道“美容”手术，各自变为

$$\cfrac{1}{1+}\ \cfrac{1}{1+}\ \cfrac{1}{1+}\ \cfrac{1}{1+}\ \cfrac{1}{1+\cdots}$$

和

$$1+\cfrac{1}{1+}\ \cfrac{1}{1+}\ \cfrac{1}{1+}\ \cfrac{1}{1+}\ \cfrac{1}{1+\cdots}。$$

于是都变成了使人“眼前一亮”的“西施”。

下面，附带谈一谈把 $\phi=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 化为无穷连分数的一种方法——也

是把分数（即小数）化成无穷连分数的方法。由 $2<\sqrt{5}<3\Rightarrow 1<\sqrt{5}-1<2\Rightarrow\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{5}-1}{2}<1$，按以下步骤化为无穷连分数：把分子化为1，分离出分母的整数部分，对分子母的小数部分重复上述过程；穿插进行分子和分母的有理化运算。

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{5}-1}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}=\frac{1}{1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}},$$

即 $\frac{1}{1+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{1+\cdots}$。

把 ϕ 化为无穷连分数的另一种方法，是利用 $1/\phi=1+\phi$：由 $1/\phi=1+\phi$ 可得

$$\phi=\frac{1}{1+\phi}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\phi}}=\cdots=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}}。$$

把一个“简单”的无理数化成一个“复杂”的无穷连分数，这看来有些“荒唐”，其实有许多好处。例如，在这个无理数的无穷连分数中，逐次截去末尾的分数，就可以得到它的不同精度的有理数，并由此得到一组用分数来逼近它的渐近分数；“宝塔”式的分数线层数越多，精度就越高，也就能得到任意要求的精度。

5. 小数中的 ϕ

一个正小数 $n+\varepsilon$ 的小数部分 ε、整数部分 n 和该小数 $n+\varepsilon$ 构成一个等比数列，那这个正小数的倒数是 ϕ。以下是证明。

因 $0\leqslant\varepsilon<1$，$n\geqslant 0$，由题设可得 $\frac{n+\varepsilon}{n}=\frac{n}{\varepsilon}$（$n\neq 0$），即 $\varepsilon(n+\varepsilon)=n^2$。下面讨论这个式子。

如果 $\varepsilon=0$，则 $n=0$，此时 $n+\varepsilon=0$ 而不是正数，所以 $\varepsilon=0$ 不合题意。

如果 $\varepsilon \neq 0$：因 $1 < \frac{n+\varepsilon}{n} < 2$，而且 $\frac{n+\varepsilon}{n} = \frac{n}{\varepsilon}$，所以 $1 < \frac{n}{\varepsilon} < 2$，得到 $\varepsilon < n < 2\varepsilon$。又因为 $0 < \varepsilon < 1$，所以 $0 < n < 2$，就得到 $n = 1$。这就得到这个小数为 $1 + \varepsilon$，而且 $\varepsilon(1 + \varepsilon) = 1$，即 $\varepsilon^2 + \varepsilon - 1 = 0$。由此得正解 $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$。

6. 等比数列中的 ϕ

一个各项都是正数的等比数列，如果从第二项起，每一项都等于前后相邻两项之差，则这个等比数列的公比 $q = \phi$。以下给出证明。

设这个等比数列首项为 a，则此等比数列为：a，aq，…，aq^{n-1}，aq^n，aq^{n+1}，…。

由题设，有 $aq^n = aq^{n-1} - aq^{n+1}$ $(n \geqslant 2)$，两边约去 aq^{n-1} 得 $q = 1 - q^2$ 即 $q^2 + q - 1 = 0$，由此得到正解 $q = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$。

7. 斐波那契数列中的 ϕ

在斐波那契数列 F 中，当 $n \to \infty$ 时，前一项和后一项之比的极限是 ϕ——数学语言是 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} = \phi$。证明如下。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n-1}}{F_{n-1} + F_{n-2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n-1}}{1 + \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}}}。$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}}$，设 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} = x$，因为 $0 < F_{n-1} < F_n$，所以 $x > 0$，于是有 $x = \frac{1}{1+x}$ 即 $x^2 + x - 1 = 0$。它的正解就是 $x = \phi$。

8. 复数中的 ϕ

设 $Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ 为满足 $\left|Z + \frac{1}{Z}\right| = 1$ 的复数，则 $|Z|$ 的最小值为 ϕ，最大值为 $\frac{1}{\phi}$。下面是证明要点。

由题设有

$$\left| r(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) \right| = 1$$

$$\Rightarrow \left| \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + i\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta \right| = 1,$$

此时可得

$$\left(r + \frac{1}{r}\right)^2 \cos^2\theta + \left(r - \frac{1}{r}\right)^2 \sin^2\theta = 1$$

或者

$$r^2 + \frac{1}{r^2} = 1 - 2\cos 2\theta。$$

设 $r^2 = R(R>0)$，用基本不等式 $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$ 和余弦函数的取值范围不大于1，就得到 $2 \leqslant R + \frac{1}{R} \leqslant 3$。

再设 $S = R + \frac{1}{R}$，$S'_R = 1 - \frac{1}{R^2} = \frac{R^2 - 1}{R^2}$。所以，当 $0 < R < 1$ 时，$S' < 0$，函数单调递减；当 $R = 1$ 时 $S' = 0$，$S = 2$；当 $R > 1$ 时，$S' > 0$，函数单调递增。这样，当 $S = 3$ 即 $R + \frac{1}{R} = 3$ 时，R 取得相应区间的最大、最小值。

解 $R + \frac{1}{R} = 3$ 得 $R = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$，于是

$$r_{\max} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \frac{1}{\phi},$$

$$r_{\min} = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \phi。$$

9. 对数关系中的 ϕ

设 x 为锐角，$\log_{\sin x}\cos x$ 与 $\log_{\cos x}\sqrt{\tan x}$ 的首数都是0，尾数之和为1，那么 $\sin x = \phi$。

设 $\log_{\sin x}\cos x = t$，则 $\log_{\cos x}\sqrt{\tan x} = \frac{1}{2}\log_{\cos x}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{2}(\log_{\cos x}\sin x - 1)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}-1\right)$（这里 $t=\log_{\sin x}\cos x$）。由题设得 $t+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}-1\right)=1$，即 $2t^2-3t+1=0$，解得 $t=\frac{1}{2}$（$t=1$ 不合对数首数为 0 的题意，已舍去）。

于是，有 $\log_{\sin x}\cos x=\frac{1}{2}$；或者 $\sin x=\cos^2 x$ 即 $\sin^2 x+\sin x-1=0$，解得 $\sin x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\phi$（$\sin x=\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$不合题意，已舍去）。

你看，在一个对数关系中出现了 φ。

10. 方程的根中的 φ

我们在 2.1.1 小节中说过，$x^2+x-1=0$ 的正根$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，正好是 φ。而 $x^2-x-1=0$ 的正根$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，正好是 $1/\phi$。

这个现象非常有趣——各项（含常数项）系数都是 1 的上述两个一元二次方程的正根 φ 和 $1/\phi$，正好互为倒数。而它们各自的负根$\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$和$\frac{-\sqrt{5}+1}{2}$，则正好分别是 $-1/\phi$ 和 $-\phi$——也互为倒数。

3.5.3 三角中的 φ

1. 三角函数值藏 φ

一个有趣的问题是：有没有一个整数值的角度的三角函数值和 φ 有关？答案在 2.2.1 小节中已经知道了一个答案：$2\sin 18^\circ=\phi$。下面是多种证明方法中的一种。

由 $\sin(2\times 18^\circ)=\cos(3\times 18^\circ)$ 可知，$2\sin 18^\circ\cos 18^\circ=4\cos^3 18^\circ-3\cos 18^\circ$。两边除以 $\cos 18^\circ$，就得到 $2\sin 18^\circ=4\cos^2 18^\circ-3$。把 $\cos^2 18^\circ=1-\sin^2 18^\circ$ 代入这个式子，就得到 $4\sin^2 18^\circ+2\sin 18^\circ-1$。解这个一元二次方程，就得到 $\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}=\frac{\phi}{2}$（已舍去 $\frac{-\sqrt{5}-1}{4}$），所以 $2\sin 18^\circ=\phi$。

由于 $\cos72° = \sin18°$，所以 $2\cos72° = \phi$。

此外，还易由 $\sin18° = \frac{\phi}{2}$ 得到 $\cos18° = \frac{\sqrt{3+\phi}}{2}$，以及 $\sin36° = \frac{\sqrt{2-\phi}}{2}$ 和 $\cos36° = \frac{\sqrt{2+\phi}}{2}$。

当然，由于三角函数的周期性，还有无数“含 18°”的正弦和余弦三角函数值等于 ϕ。

2. 弦长的玄机

伊夫斯在《数学史上的里程碑》中，给出了一个符号：把圆心角 α 对应的弦长记为 $\mathrm{ard}\alpha$。那么，在半径为 1 的单位圆中，就有 $\mathrm{ard}36° = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \phi$。

其实，这个结论我们在 3.5.1 小节中已经知道——ard36°就是图3-28 中的圆内接正十边形的一边 AB。

为什么伊夫斯要给出符号“ard”呢？他说，希腊亚历山大的数学评注家西翁，把一部编制“弦表”（圆心角所对弦长的表）的共 12 卷的著作，归功于古希腊数学家希帕科斯。这个弦表虽已失传，但是希腊数学家托勒密给出的另一个弦表（据说根据希帕科斯的著作改编）却保留至今。托勒密的弦表，列出了相应于单位圆从 0～180°的区间内每隔 0.5°的一切圆心角所对的弦长。把这个圆的半径分成 60 等份，取出其中的一小份为长度的单位，并用 60 进制小数来表示这些弦长。这时，就可以从弦表中查出 $\mathrm{ard}36° = 37^{p}4'55''$。这就意味着：对应于 36°圆心角的弦长等于半径的 37/60（即 37 小份），加上 1 小份的 4/60，再加上 1 小份的 55/3 600）。托勒密编制弦表的目的，是方便查出正弦值——他的弦表实际是一个从 0～90°的区间内每隔 0.25°的正弦表。

为什么托勒密需要正弦表呢？原来，他也是一位著名的天文学家，要进行天文计算——伊夫斯在这本书中记载这个“数学里程碑”的标题就是《来自天文学的动力》。而伊夫斯给出“ard”的目的，则是为了叙述的方便。

3.5.4 解析几何中的φ

1. “入侵”“π王国”的7个φ

如图3-37所示，在平面直角坐标系中，如果椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（面积为$S$）的焦点在圆$x^2+y^2=a^2-b^2$的直径两端，而且两者的面积相等、在第一象限的交点为A，$\angle AOX=\theta$，则有这样的椭圆叫“黄金椭圆”或“优美椭圆”。在黄金椭圆中有7个有关结论：①椭圆的短轴$2b$和长轴$2a$（$a>b>0$）之比为φ；②椭圆的离心率e的二次方为φ；③$S=\frac{\pi b^2}{\phi}$；④A的坐标为（b，$b\sqrt{\phi}$）；⑤、⑥$\tan\theta=\cos\theta=\sqrt{\phi}$；⑦$\sin\theta=\phi$。

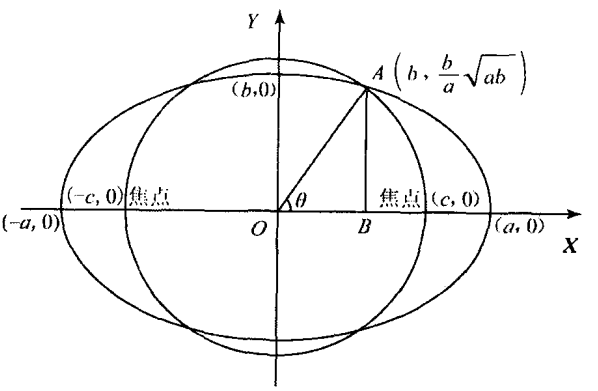


图3-37

詹姆斯·利根对这些结论大为惊异：φ竟然“入侵”他想象中的“π的王国”——二次曲线。为什么二次曲线（和后面要谈的二次曲面）是“π的王国”呢？原来，涉及圆或椭圆的曲线或曲面、某些其他二次曲线，都和π如影随形。

以下扼要证明结论①~⑦。

椭圆的焦点为（$-c$，0）和（c，0），而由椭圆的性质有$c^2=a^2-b^2$。

由题设可得 $\pi ab = \pi c^2$，把 $c^2 = a^2 - b^2$ 代入此式化简，就得到 $\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{b}{a} - 1 = 0$。由此解得 $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \phi$（$\frac{b}{a} = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$ 已舍去），即 $\frac{2b}{2a} = \phi$。这是结论①。

于是 $e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b}{a} = \phi$。这是结论②。

由椭圆的面积公式 $S = \pi ab$ 和 $\frac{b}{a} = \phi$，就得到 $S = \frac{\pi b^2}{\phi}$。这是结论③。

由 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 和 $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$ 可解得 $x = b$，$y = b\sqrt{\frac{b}{a}}$。但 $b\sqrt{\frac{b}{a}} = b\sqrt{\phi}$，所以有 A（b，$b\sqrt{\phi}$）。这是结论④。顺便指出，A 的纵坐标 $b\sqrt{\phi} = b\sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{ab}{a}\sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{b}{a}\sqrt{ab}$。

由 A（b，$b\sqrt{\phi}$）可求得 $\tan\theta = \frac{b\sqrt{\phi}}{b} = \sqrt{\phi}$。这是结论⑤中的 $\tan\theta = \sqrt{\phi}$。

在 Rt$\triangle ABC$ 中，用勾股定理可得 $AO^2 = BO^2 + AB^2 = b^2 + (b\sqrt{\phi})^2 = b^2(1+\phi) = b^2\left(\frac{1}{\phi}\right)$，所以 $AO = \frac{b}{\sqrt{\phi}}$。于是易得到结论⑤中的 $\cos\theta = \sqrt{\phi}$ 和结论⑥。

从以上证明过程可以看出，这样的黄金椭圆只有一种——“椭圆的焦点在圆的直径的两端，而且两者的面积相等”。

具有这种性质的黄金椭圆对应的圆称为“焦距圆”——詹姆斯·利根给出了这样的名字。

由于黄金椭圆很优美，所以在某些场合得到应用，例如用于一种“甲壳虫汽车”的造型。

在图 3-38 中可以看出，一个黄金椭圆与一个黄金矩形内接，车体正好在黄金椭圆的上半部分，而椭圆的长轴则刚好在车轮中轴下部。

第二个黄金椭圆围绕着汽车侧窗，同时与前轮边缘和后轮边缘相

切。椭圆长轴也是这样相切（图3-39）。

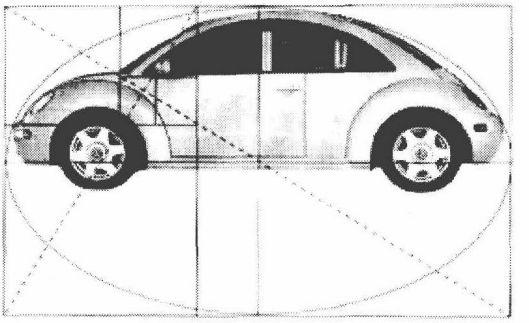


图3-38

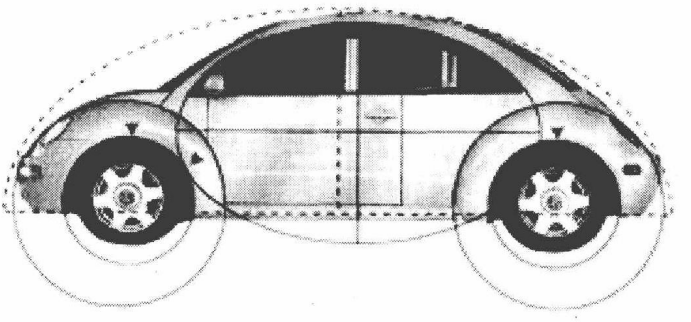


图3-39

此外，这辆车的侧窗也重复了黄金椭圆。车门和后车窗则分别符合黄金矩形。外观造型的各处细节变化部分，都与黄金椭圆或正圆相切。

詹姆斯·利根所得到的结果属于平面解析几何问题。那么，对空间问题是否有相应的结果呢？回答是肯定的。下面的结果表明，φ在另一个“π的王国”——二次曲面中出现得更多！

2. 旋转椭球、黄金椭球、焦距椭球中的φ

设一个旋转椭球的3个半轴分别为a，b，b；另一个旋转椭球的3个半轴分别为b，$\sqrt{|a^2+b^2|}$，$\sqrt{|a^2+b^2|}$。如果它们的体积要相等，

则只有满足$\frac{b}{a}=\phi^{\pm 1}$的条件。这两个椭球分别被詹姆斯·利根称为“黄金椭球”（类比“黄金椭圆”）和“焦距椭球”（类比“焦距圆”）。也就是说，黄金椭球和焦距椭球的各3个半轴，和φ紧密相连。

在黄金椭球体积公式和焦距椭球面公式中也有φ，但限于篇幅，不详谈。

第 4 章　斐波那契数列——兔子奏响和谐乐章

学习科学，有时题目比规则还有用些。

——牛顿

4.1　兔子问题引出 F 数列

在商业发达的意大利，一个曾随父经商的孩子没有白费光阴，最终成了中世纪数学家中的佼佼者——“他没有选择放弃，而是选择了成长，他的生命从此与众不同。”于是，伊夫斯在《数学史上的里程碑》一书中，把他称为“中世纪数学技巧最娴熟的数学家”……

4.1.1　不凡的商人数学家

1. 宫廷比赛得“满分”

“求一个有理数，使得 x^2+5 和 x^2-5 都是有理数的平方。”

约 1225 年一天，一次宫廷“数学竞赛”上，在 1220 年加冕神圣罗马帝国皇帝的弗里德里克二世的随从——巴勒莫的约翰出了这样一道题。弗里德里克二世是一位在 4 岁就继承西西里岛诺曼底公国的、有学识的皇帝。这道题是三道竞赛“难题”中的一道，被国王赏识的人受邀参加——其中包括一个商人。

只见这个商人不慌不忙，不久就得到答案：41/12。他还解出了另外两道题，得了“满分”，使得宫廷赴宴的君臣赞叹不已，一同称这个商人为老师。

那么，这个商人是谁，为什么这位国王要邀请他呢？

2. 闻名欧洲的商人数学家

大约在 1170 年，著名的比萨斜塔所在地——意大利的比萨城，当地的一个商人波那契奥（Bonaccio）之家生下了一名男婴。他就是斐利尤斯·波那契（Filius Bonacci，拉丁语，意思是“波那契奥之子”），即莱昂纳多·皮舍诺·斐波那契（Leonardo Pisano Fibonacci）——常被简称为莱昂纳多·斐波那契（Leonardo Fibonacci），或比萨的莱昂纳多（Leonardo of Pisa 或 Fibonacci Pisano）。这里的 Fibonacci 是 Filius Bonacci 的简写。


斐波那契

当时，意大利的大商行都在地中海沿岸开货栈，斐波那契的父亲曾任关税管理人，所以他在约 22 岁时就跟随经商、收税和管理侨民的父亲，到过北非的布日伊（今阿尔及利亚东部小港贝贾亚），在那里接受教育。以后，他又到埃及、叙利亚、希腊、西西里、法国等地游历，也有人说到过印度。他发现当时阿拉伯的数学比欧洲发达，加上父亲职业的影响和他又有志于推动欧洲数学的发展，所以在随父经商和游历期间，熟习了不同国度在商业上的算术体系，并特别注意收集数学资料。

约 1200 年，斐波那契回到比萨潜心写作。他的书被保存下来的共有 5 种，其中最重要的是《算盘书》，即《算经》。1202 年完成、1228 年修订的《算经》，是一部向欧洲人介绍东方数学的拉丁文数学著作，产生过持续了 200 多年的巨大影响——伊夫斯在《数学史上的里程碑》中，也把它的出版列为 43 个“数学里程碑”之一。《算经》中的“算盘”，并不单指罗马算盘或沙盘这类计算工具，更是指一般的计算。最耐人寻味的是，这本书里出现了与中国《孙子算经》中的不定方程一样的解法。题目是一个不超过 105 的数分别被 3，5，7 除，余数是 2，3，4，求这个数。另一个“兔子问题”，更是引起了后人的极大兴趣，

也成了我们这本书的重要角色。

保存下来的斐波那契的另外4种著作是：《几何实习》、《平方数书》、《精华》、《通信录》。

4.1.2 《算经》中的兔子问题

在《算经》保留至今的版本——1228年修订本中，记载了著名的兔子问题：如果兔子不会死亡而且成熟后都有连续生育能力并必须生育，假定一雌一雄的一对小兔在一个月之后长成大兔，在第2个月之后（即第3个月）就生出一雌一雄的一对小兔，而这对小兔出生后两个月之后也能生出这样的一对小兔，问从一对刚出生的小兔子开始，一年之后（即第13个月）能繁殖成多少对兔子？

斐波那契是这样解答兔子问题的：第1和第2个月，显然只有1对兔子；第3个月，这对兔子生了1对小兔，此时共有2对兔子；第4个月，老兔又生了1对小兔，而上一个月出生的小兔还未成熟，此时共有3对兔子；第5个月，老兔又生了1对小兔，而第3个月出生的小兔已经成熟，也生了1对小兔，此时共有5对兔子……（图4-1）；如此推算下去，就得到这样一个数列：1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，233，377，…。由此得到答案：一年之后能繁殖成233对兔子。这个数列，就是“斐波那契数列”——简称“F数列”（或“u数列”），在数学上记为 $\{F_n\}$ 或 $\{u_n\}$（n为自然数）。它的每一项被称为“斐波那契数——简称“F数”。

有的人让F数列分别从0，1或1，2开始，此时对应的数列分别为0，1，1，2，3，5，8，…（对应的答案是144对兔子）和1，2，3，5，8，…（对应的答案是377对兔子）。在没有特别说明的时候，本书所指的F数列从1，1开始，对应的数列为1，1，2，3，5，8，…。

在数论中，F数列被看成是一个特殊的“线性递归数列”。

对于F数列，我们想起了英国著名数学家和哲学家罗素的一句名言：“数学，如果你正确看待他，会发现它具有一种至高无上的美，一

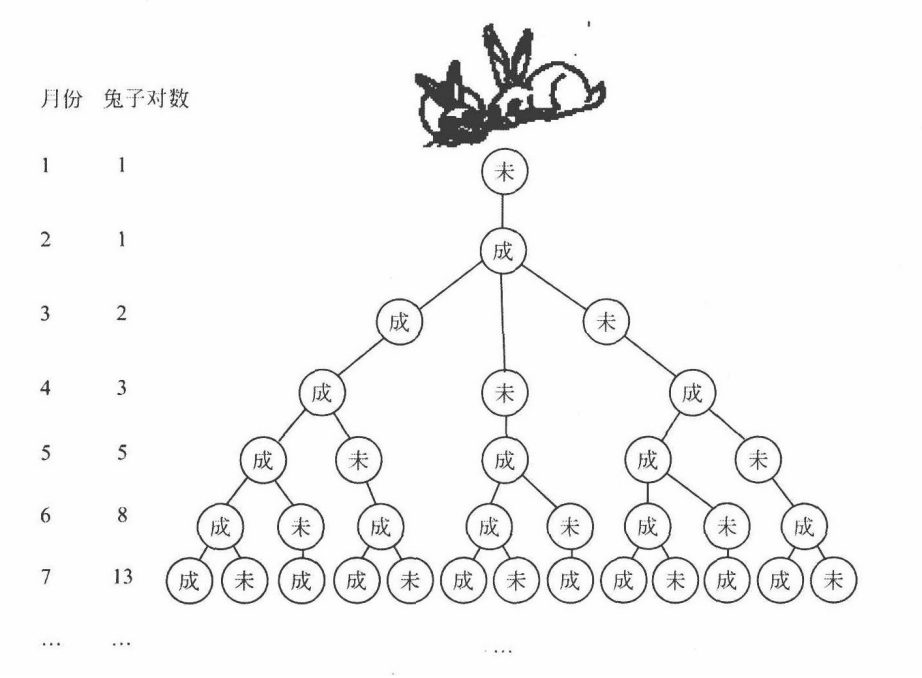


图 4-1

种冷色而严肃的美。这种美没有音乐或绘画那般华丽的装饰，而是纯洁到崇高的地步，达到了只有最伟大的艺术才能显示的那种完美境界。”无疑，没有“华丽装饰”的 F 数列，体现了这种“完美境界”。

4.1.3　伟大的“愚人”

1. 斐波那契——你“现在还好吗?”

《算经》的出版，使斐波那契成了 13 世纪闻名欧洲的数学家，所以才成了弗雷德里克二世的“特邀嘉宾”，而且在宫廷考试得了“满分”之后成为宫廷数学家，有丰厚的薪金。

约 1250 年，斐波那契悄然辞世。由于斐波那契生前并没有研究 F 数列的最终结果，也没有给出其他任何有意义的东西，所以他和 F 数列曾一度湮灭在历史长河之中。然而，从 19 世纪开始，它的性质和它涉及的领域，就开始显现出来，人们的研究也热情不减而持续至今。这

样，他和以他姓氏命名的 F 数列才流传至今。由此可见，F 数列曾被埋没——但金子终究会闪光！

由于发现了 F 数列的重要意义，法国数学家鲁卡斯在 1876 年出版的一部四卷本的娱乐方面的著作中，首先命名了斐波那契数列。



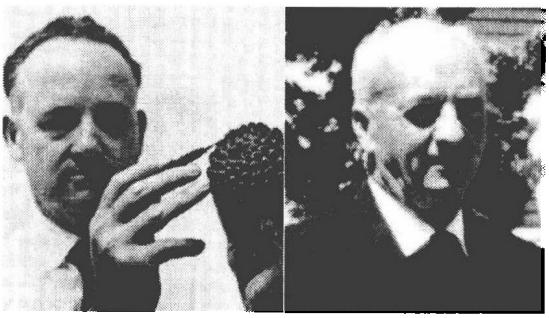
鲁卡斯

鲁卡斯是一个对数学有重要贡献和意外死亡的数学家。例如，他对数论和不定分析方面的贡献包括：用自己的方法（利用 F 数列的性质）证明了梅森数 $2^{127}-1$ 是素数——梅森素数，这在当时很不容易。这个当时已知的最大素数，保持世界纪录 75 年之久。梅森是一位法国修道士兼数学家。所谓梅森数，是指样子像 2^p-1（p 是素数）的数。梅森数中是素数的，称为梅森素数。截至 2009 年 4 月 12 日，共发现了 47 个梅森素数——其中最大的梅森素数（也是截至当时发现的最大素数），是 2008 年 8 月 23 日发现的 $2^{43\,112\,609}-1$，共有 12 978 189 位。鲁卡斯在 1878 年完善的检验梅森素数的方法，后来被美国数学家莱默在 20 世纪 30 年代改进，成为著名的“鲁卡斯－莱默检验法”。鲁卡斯对休闲数学的兴趣，发明了有趣的汉诺塔问题。在一次法国科学进步协会的年会的宴会上，一个侍者掉下的餐盘被打碎后，一块瓷碎片划破了他的脸。过后几天，他就死于可能由败血症引起的严重皮肤感染。

1963 年，在创始人、两位美国数学家霍加特博士和布鲁索的倡议下，一群热衷研究 F 数列的美国人，成立了斐波那契协会，在同年创办了学术杂志《斐波那契季刊》。虽然此时斐波那契已经去世 700 多年，但从此“花”开四季，灿烂着他不老的“容颜”。这本主要研究 F 数列和其他相关数列的杂志，一直长盛不衰，发表了层出不穷的许多新成果，至今仍在印发。例如，在创刊的头三年，就发表了近 1 000 页相关成果；1986 年还因成果太多，出了 3 期增刊。

在 20 世纪，有的国家还把 F 数列写进中学教科书中，由此可见斐

波那契和 F 数列的魅力。至于有关专著，更是不计其数。例如，苏联数学家伏洛别也夫著的小册子《斐波那契数》，1953 年和 1954 年就在中国的几家出版社出版过。俄文版《斐波那契数》在 1951 年初版，曾引起数学界的极大兴趣，产生过巨大的影响，被译为多种语言，多次再版。1989 年出版的美国数学家瓦伊达教授的著作《斐波那契与鲁卡斯数和黄金分割》，更是吸引了数学家的广泛关注，成为在这一领域的最佳数学书之一。



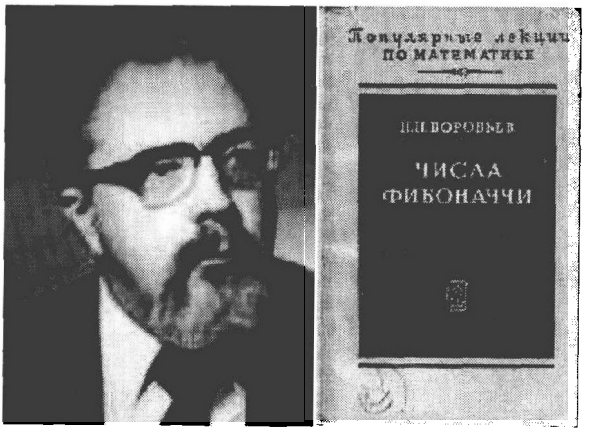
霍加特　　布鲁索

优选法中的“斐波那契法”，是 20 世纪绽开的新花，至今依然在广泛应用。

进入 21 世纪，2003 年出版的《达·芬奇密码》风行一时。在这本书中，由 F 数得到的 ϕ 被称为“美丽的 PHI”（PHI 是 ϕ 的读音）。

2005 年，在英国举办了托布里奇威尔斯音乐节。登台演绎德国著名作曲家巴赫的乐章的一个交响乐团的名字，就叫“斐波纳契数列”。那为什么这个当今英国最重要的室内乐团之一的交响乐团的名字，要攀附在 700 多年前已经进入天堂的意大利人呢？原来，1964 年的一期《斐波那契季刊》，就从数学角度剖析了《赋格的艺术》的精确性背后的数学奥秘——在这件作品中，巴赫开拓出了新的手法，接近他为之倾注了毕生心血的“和声”，其结果是完美而神秘的 F 数列。所以，聆听巴赫的《赋格的艺术》的第一对位曲，是一种无法用言语描绘的悦耳感。音乐简洁地开始，清晰而纯净，然后迅速地重叠，形成精美的螺旋

形的主旋律，让你不由自主地想到盘旋上升的阶梯，或者——海贝壳的纹络。这个乐队有感于《赋格的艺术》之美和“*F* 数列情结”而这样命名。



伏洛别也夫和他的俄文本《斐波那契数》封面

……

由此看来，在历经七八百年的岁月之后，斐波那契和他播下的种子“现在还好”，而且——到处枝繁叶茂。于是，我们要把一句名言送给他：“两粒种子，一片森林。”

2. 伟大的“愚人”——依然闪光的雕像

有时，斐波那契在他的作品上署名 Leonardo Bigollo，这里的 Bigollo 一语双关——既是“旅行者”，也是“愚蠢的人”。他当初署名时，也许意指旅行者（这名副其实）。但另外的一种传说是，同时代的一些人认为他愚蠢（因为他对当时在欧洲“非主流”的印度－阿拉伯数字情有独钟），所以才如此署名，借此对那些批评者反唇相讥——一个“愚人”竟然可以取得这样伟大的成就。

也许是因为批评者的诟病，斐波那契这位“上流社会的儿子”（Fibonacci 的意译），才“被迫”大智若愚，这使人想起了英国数学家和哲学家罗素的慨叹：“在这个变化无常的世界上，没有什么比死后的声誉更变化无常了。死后得不到应有的评价的最显眼的牺牲品莫过于芝诺

了。他虽然发明了 4 个无限微妙、无限深邃的悖论，但后世的大批哲学家却说他只是一个聪明的骗子，而他的悖论不过是一些诡辩。遭到两千多年的连续批评之后，这些‘诡辩’才得以正名……”罗素提到的芝诺，是古希腊数学家和唯心主义哲学家，以提出多个“悖论”而青史留名。

比芝诺幸运的是，地下的斐波那契应该感到欣慰——在当时已经得到许多鲜花和掌声，而之后也大体风光无限。而他在比萨那座依然闪光的雕像，则俯瞰着人间的世事沧桑，目睹近年有人计算出的 F 数列的第 5 000 项——一个 1 045 位数。



坐落在意大利比萨的斐波那契雕像

说“曾一度湮灭在历史长河之中”或者“大体风光无限”，就是指有一段时间曾“被冷落”。在意大利那不勒斯的卡波迪蒙美术馆中，陈列着一尊帕奇奥里的肖像。肖像中的他，被刻画成古代数学家的理想形象——占星家。由于他的神圣比例在其后几世纪影响了整个西方科学界，而斐波那契的 F 数列就逐渐被人遗忘或摒弃——直到 1876 年鲁卡斯重新发现了它的重要意义。于是，“斐波那契风”吹红了整个世界的玫瑰……

4.1.4　探索正未有穷期

1. “仿 F 数列”——F 数列也有“克隆品”

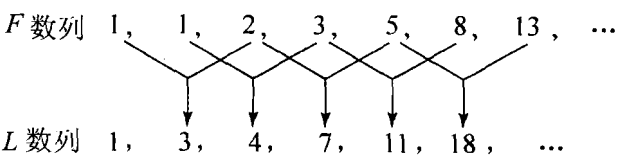
设 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ $(n \geqslant 2)$，而且 $F_0 = 2$，$F_1 = 1$，就得到数列：(2)，(1)，3，4，7，11，18，29，47，76，123，199，…。这个数列被称为“第二类 F 数列”。对这里的初始值 $F_0 = 2$ 的意义，历史上曾是一个不解之谜，有学者给出了一个“优化组合”方面的解释。

其实，从它的通项公式 $F_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ 也可以看出 $F_0 =$

2的意义（这里的$n=0$，1，2，3，…）。

把第二类F数列中的$F_0=2$去掉，就得到“第三类F数列”：(1)，(3)，4，7，11，18，29，…。这个数列为法国数学家鲁卡斯所发现，所以被称为“鲁卡斯数列”或“斐波那契－鲁卡斯数列”。显然，它是第二类F数列的一个特例。不过，也有人把第二类F数列和第三类F数列统称为鲁卡斯数列——简称“L数列”，还有人把F数列看成是L数列的特殊情况。

和F数列一样，这两类L数列也各有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{L_n}{L_{n+1}}=\phi$的性质，而且分别与$F$数列有如下所示的对偶关系$L_n=F_{n-1}+F_{n+1}$（$F_0$即$L_0=2$除外）：



对偶关系$L_n=F_{n-1}+F_{n+1}$（$F_0=2$除外）：L数列和F数列

F数列和L数列还有另外一种美妙的对偶关系（$L_0=2$除外）：$F_n=\dfrac{1}{5}(L_{n-1}+L_{n+1})$ ——例如$F_6=8=\dfrac{1}{5}(L_5+L_7)=\dfrac{1}{5}(11+29)$。

此外，F数列和L数列还有一个很奇妙的平方关系（$L_0=2$除外）：$L_n^2-5F_n^2=(-1)^n$。例如，当$L_6=18$，$F_6=8$时，$18^2-5\times8^2=4(-1)^6$。

更奇妙的是，(L_n, F_n)恰好是不定方程$x^2-5y^2=\pm4$的整数解！

F数列和L数列的关系还有：$F_{2n}=F_nL_n$。例如，当$F_{2n}=F_{2\times4}=21$，$F_4=3$，$L_4=7$时，就有$21=3\times7$。

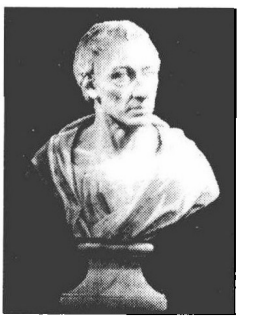
L数列中的“第三类F数列”自身也有许多有趣的关系。$L_{2n}=L_n^2-2(-1)^n$就是其中的一个。例如，当$L_{2\times4}=47$，$L_4=7$时，就有$47=7^2-2(-1)^4$。

L数列中的“第三类F数列”也有通项公式：$L_n=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+$

$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$，但这里的 $n=1$，2，3，…。用无理数$\sqrt{5}$就能把一个个“乱七八糟”的、属于 L 数列的自然数表达出来，实在让人惊叹不已！

惊叹之余，我们自然联想起英国著名诗人蒲柏的“明知故问”：“噢，上帝，为什么二加二等于四?”

有人认为，这两类 L 数列的重要性，丝毫不逊于 F 数列——例如它们都在优化组合和研究梅森数与费马数中得到应用。这里提到的费马，是一位法国律师——对数学贡献卓著的“业余数学家之王”。费马数，是指样子像 $2^{2^n}+1$（整数 $n\geqslant 0$）的数，费马猜想它们都是素数（实际不完全是）。



蒲柏

人们的探索还在继续。一次次任选两个数，也按 F 数列的构成规律，仍然可以构造出一个个的新数列。这些新数列统称“仿 F 数列”即“广义 F 数列”——包括前面提到的第二类 F 数列和第三类 F 数列。

2. “反 F 数列”和“巴都万数列”——F 数列也“转世”

后来还出现了一种“反 F 数列”——例如（1），（-1），2，-3，5，-8，13，…。这类数列的构成规律是 $F_{n+2}=F_n-F_{n+1}$。

反 F 数列也有许多类似 F 数列的性质——例如$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}}=-\phi$。

此外，还有一种巴都万数列——简称“P 数列”：1，1，1，2，2，3，4，5，7，9，12，16，21，28，37，…。P 数列是一个整数数列，由起始数值 $P_0=P_1=P_2=1$ 和 $P_n=P_{n-2}+P_{n-3}$来构成，可形成由巴都万数为边长的等边三角形螺旋。

由此可见，F 数列和 P 数列相似但又有区别：前者可以用一个接一个的正方形来表现（图 4-2），后者则是用一个接一个的等边三角形来表现（图 4-3）。

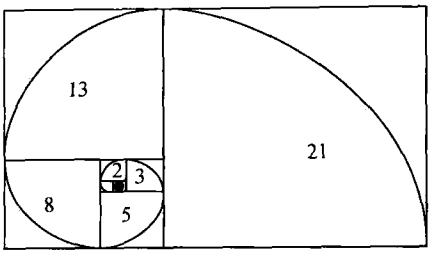


图 4-2　用一个接一个的正方形来表现 F 数列

P 数列也是一个奇妙的数列，可用它构造成一个有趣的立体螺旋（图 4-4）。

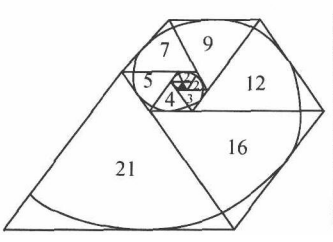
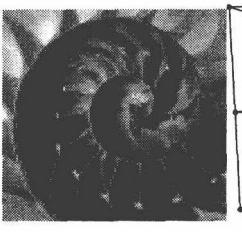


图 4-3　用一个接一个的等边三角形来表现 P 数列



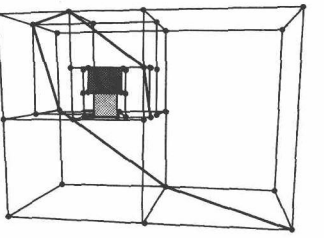


图 4-4　用 P 数列构造的立体螺旋

P 数列以英国建筑师巴都万命名。他于 1994 年写的论文 Dom，提到荷兰本笃会（天主教的一个隐修会，又译本尼狄克派）修士、建筑学家拉恩把“银数”用于建筑方面。1996 年 6 月，史都华在《科学美国人》杂志上提到这个数列。

英国名牌大学之一的沃里克大学教授史都华，是一位英国生物数学家、科普作家，《科学美国人》的数学专栏作家，《新科学家》杂志的顾问，美国《科学》杂志和《发现》杂志的定期撰稿人。由于他对科普的贡献，曾于 1995 年荣获法拉第奖章。迈克尔·法拉第是一位享誉全球的英国物理学家。

用递归关系 $P_{-n}=P_{-n+3}-P_{-n+1}$ 将 P 数列推广到负数项，就得到也有许多奇妙性质的“反巴都比数列”——简称“反 P 数列”：…，-7，

4，0，-3，4，-3，1，1，-2，2，-1，0，1，-1，1，0，0，1，0，1，1，1，…。这与把 F 数列推广到反 F 数列相似。不过，反 F 数列取绝对值就和斐波那契数列相等，但反 P 数列却没有这种相等的关系。

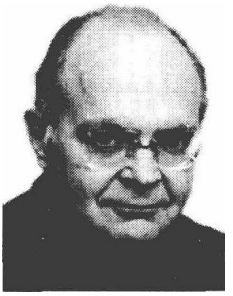
从以上 F 数列和反 F 数列，L 数列和反 P 数列的相似性可以看出，法国著名物理学家、数学家庞加莱所说的数学是“给不同的事物以同样的名称”很有道理——纯数学的观念让数学家们把具体事物抽象出来，归纳成“万物皆数”。

3. F 数列的余波——莫道君行早

在西方，最先实际研究 F 数列的是斐波那契，但在东方，却自有早行人。根据高德纳的名著《计算机程序设计艺术》一书说，约 1150 年，印度数学家戈帕拉和金月在研究箱子包装物件长宽刚好为 1 和 2 的可行方法数目时，首先描述了这个数列。这套预计为七卷本的书，据说与爱因斯坦的《相对论》等，被评为“20 世纪科学界最重要的 12 本书”。不过，从 1968 年出版第一卷到 70 年代出第三卷以后，至今未见第四卷。

这里提到的美国著名计算机科学家高德纳，英文名唐纳德·欧文·克努斯，是斯坦福大学电脑系荣誉教授，被誉为现代计算机科学的鼻祖，与荷兰计算机科学家埃兹格尔·怀伯·戴克斯塔并称为当今最伟大的计算机科学家。他还是排版软件 TeX 和 Metafont 的发明人，也是一个有趣和“三件事不离本行”的人。其中的一件趣闻轶事是，他奖励给发现他书中任何一处差错的人的奖金是 2.56 美元——因为“256 美分刚好是十六进制的 1 美元”。高德纳这个中文名，是姚期智的夫人、2004 年开始担任香港城市大学计算机科学系主任的姚储枫，在 1977 年高德纳访问中国之前取的。

金月的音译是阿恰雅·赫玛缠德拉或阿恰雅·酰摩战达罗，是印度耆那教的一位学者、诗人和“通才”，有语法、哲学、韵律和历史方面著作。他生于古吉拉特邦的滕图加（位于艾哈迈巴德西南约 50 千米），



高德纳

在希达拉王及其继任者库马尔帕王在位期间（1143～1172年或1173年）享有很高的地位。

从高德纳书中的记载可以看出，戈帕拉和金月比斐波那契早大约半个世纪就发现了 F 数列。然而，与斐波那契声名远播不同，“先行者”戈帕拉和金月却消弭在历史的苍茫云烟之中而鲜为人知。于是我们不由得发出感叹：人生不知道有多少机缘！

这种机缘随处可见。出生在法国的英国数学家棣莫弗和他的朋友——苏格兰数学家斯特林，在1722年各自为一个计算阶乘近似值的公式作出了贡献，但这个公式却只是命名为“斯特林逼近”。

4.2 奇妙的 F 数列

4.2.1 递推公式和通项公式——从吉拉德到比内

1. 吉拉德发现递推公式

人们发现，如果按图4-1的方法来解决兔子问题，显然是事倍功半的；而且，越往后越复杂。那么，是否有简便的方法呢？答案是肯定的。



吉拉德

在斐波那契死后近400年的1630年左右，出生在法国的荷兰数学家和音乐家吉拉德发现，如果用 F_n（或 f_n）代表 F 数列中的第 n 项，则 F 数列规律是，从第3项起，每一项都是前两项的和，即 $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$（自然数 $n\geqslant 2$）。这个关系，称为兔子问题“递推关系式”或“递推公式”——我们把它称为“吉拉德公式”。有了这个关系，就比较容易得到兔子问题的答案。

吉拉德是一位对数学贡献巨大的数学家：他在 1626 年发表的“三角学论文”中，用已有和他新发现的定理和新发明的三角函数符号（sin，cos，tan，sec），首先把三角学组成了一个严密的逻辑体系；他在 1629 年出版的《代数新发现》一书中，首先发现代数基本定理（n 次方程有 n 个根）；最早把开方次数写在根号的开口处；最先在研究虚根时引入符号 $\sqrt{-1}$ 和用减号表示负数；首创 4 种括号（大括号“｛｝”、中括号“［］”、小括号“（）”和比较少用的括线“－”）的用法。

其实，这个递推关系并不难理解。第 $n+1$ 个月时的兔子可分为两类：一类是 n 个月时的大兔；一类是 $n+1$ 个月时的小兔，而这些小兔恰好是 $n-1$ 个月时的兔子总数。

1876 年，法国数学家鲁卡斯还发现，方程 $x^2-x-1=0$ 的两个根 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 和 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 任何次方幂的线性组合都满足 $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$（自然数 $n\geqslant 2$）。这一发现，丰富了这个递推关系式的数学内容。

2. 从斐波那契到吉拉德的启示

从吉拉德在 1630 年左右才得到递推公式可见，当年斐波那契并没有得到这个今天看来似乎并不复杂的递推公式。显然，斐波那契是用算术方法求解兔子问题而得到 F 数列的，由此可见算术的重要性。怪不得德国数学家高斯要说：“数学是科学的女皇，而算术则是数学的女皇。”

在我们学习了代数之后，往往就“忘记”了算术——常用列方程来“代数求解”。其实，有时用算术方法比代数方法解题更简单。美籍匈牙利数学家波利亚巧解“鸡兔同笼”问题，就是一个典范。



波利亚

著名的鸡兔同笼问题是，现在有若干只鸡和兔，关在一个狭小的笼子里边，不容易数清它们各自的数目，就数了总数，一共有 50 个头和 140 个脚，问：各有几只鸡和兔？

“请抬起一半的脚来！”面对这群鸡和兔，

波利亚对它们说。

现在，只算站在地上的脚的数目。显然，鸡头数目和鸡脚数目是相等的；而兔脚数目是兔头数目的两倍，也是原来兔脚数目的一半。所以，现在脚的总数 140/2 = 70 减去头的总数 50 得到的差 20，就是兔的数目。答案出来了：鸡 30 只，兔 20 只。

你看，算术方法多么巧妙！“不信！”请用列方程的方法解一下。

这是我们从当年斐波那契并没有得到递推公式，但仍然能用算术方法把兔子问题“OK”得到的第一个启示——有时用算术方法也能巧解问题。

活了 98 岁的波利亚，在函数论、变分学、数论、组合数学等领域都有重要贡献，对教学也很有研究。他提出了今天仍然很有现实意义的教学“三原则”：学生主动学习原则——主张思想应从学生的头脑中产生出来，老师仅仅是“助产婆”；最佳动机原则——主张最佳的学习动机是学生对学习内容感兴趣，并在学习中找到乐趣；阶段序进原则——主张学生学习要先探索，再依次进入形式化阶段和同化阶段。

还有第二个启示——“求比证难”。

由上可见，理解吉拉德公式并不困难，但吉拉德发现它却历经近 400 个春秋。由上还可见，证明比内公式并不特别困难（比如我们用的数学归纳法）——从棣莫弗发现到比内证明仅约 1 个世纪，但发现它却历经 600 个冬夏。这两个各自对比鲜明的数学事实，证明或验证了一个数学真理——求比证难。于是，数学界开玩笑说，数学是什么——是一位名叫“邱比郑楠”的公主。

“邱比郑楠”公主是谁呀？没听说过。原来，这是数学家们的一个“童话”——“邱比郑楠”是“求比证难”的谐音！“邱比郑楠公主”告诉我们一个数学真理：发现某个真理比证明它更困难，建筑满足某种性质的数学结构比证明或验证它更困难。这个真理对许多领域都适用。

那么，如何发现真理呢，如何走向成功呢？这个人们常问的问题并不好回答——因为没有一定的模式。不过，以下成功者的名言却能给我

们有益的启示——“条条大路通罗马”。

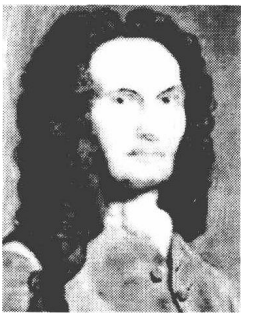
俄国－苏联生理学家巴甫洛夫说：“问号是开启任何一门科学的钥匙。”

牛顿认为：“把简单的事情考虑得很复杂，可以发现新领域；把复杂的现象看得很简单，可以发现新定律。”

“幻想是诗人的翅膀，假设是科学的天梯。”德国诗人歌德离不开翱翔天空的浪漫。

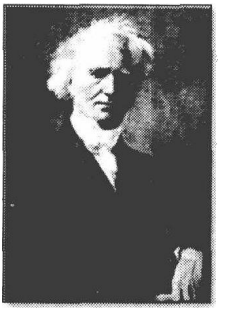
爱因斯坦似乎有更胜一筹的高瞻远瞩：“没有想象力的灵魂，就像没有望远镜的天文台。”

不过，“邱比郑楠”并不是普适真理和唯一真理——“郑比邱楠”是另一个真理。举例来说，当年费马“邱”得费马大定理（未证明时称为猜想）并不“楠”，但“郑”它却历经 300 年；在哥德巴赫“邱”得哥德巴赫猜想之后 200 多年之后的今天，数学家们依然在为它的“郑”一筹莫展——虽然成功的终点似乎近在咫尺，实际却远在天涯。



棣莫弗

3. 通项公式——棣莫弗和比内的接力棒



比内

然而，要求得任意的第几个月的兔子数，显然递推公式并不完美——要知道 F_{n+1}，就必须知道 F_n 和 F_{n-1}，而 F_n 和 F_{n-1} 又只能从前面依次递推。例如，要求得第 14 个月的兔子数，就必须知道第 13 个月的兔子数和第 12 个月的兔子数，而第 13 个月的兔子数和第 12 个月的兔子数就只能从前面依次递推。结果是——必须从第 1 个月开始；

于是，寻求比递推公式更简捷的公式，来求得任意的第几个月的兔子数的问题，就摆在数学家们的面前。

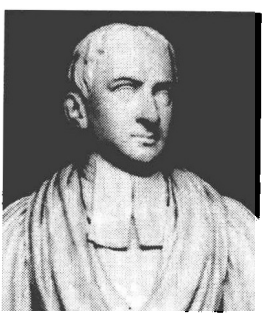
“弹指一挥又百年。”到了1730年，法国－英国数学家棣莫弗在他的大作《数学集锦》一书中，终于给出了一个“奇怪的”公式——F数列的一种通项公式：

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]\quad(n\text{为自然数})。$$

也有人把它写成

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]\quad(n\text{为非负整数})。$$

其实，这两个公式的本质一样，只不过n的取值范围和F数列的起始项不同而已。这两个公式，都称为“封闭形式”。有了这个公式，就可以立即求得任意的第几个月的兔子数了。



科特斯

但是，棣莫弗并没有证明这个通项公式。到了1843年，他的法国同胞、数学家比内才首先证明了这个公式——所以称为“比内公式”。

得到比内公式的思路之一是，设法将既不是等差数列也不是等比数列的F数列分解为两个等比数列之和，然后把这两个等比数列的第n项分别相加，从而得到比内公式。

比内公式可以用数学归纳法证明。

当$n=1$时，比内公式显然成立。

设当$n=k$时成立，则当$n=k+1$时，就有

$$\begin{aligned}F_{k+1}&=F_k+F_{k-1}\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right]+\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right]\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right]\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right]。$$

由此可见，当 $n=k+1$ 时，比内公式也成立。

由以上两个步骤可知，比内公式得证。

比内公式还有多种证法。例如，在 18 世纪，瑞士数学家欧拉给出了 F 数的母函数定理 $\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2}$，并用它证明了比内公式。

比内公式是一个有趣的、耐人寻味的等式——F_n 是一个自然数，但却能用无理数$\sqrt{5}$来表达。音乐和诗一般的比内公式，让人对数学之美赞叹不已！于是，我们想起了英国数学家哈代的另一段名言：“现在也许难以找到一个受过教育的人，对数学美的魅力完全无动于衷。数学之美虽然难以定义，但它的确是一种真实的美——和任何其他的美一样。比如对什么是一首美丽的诗，虽然我们不很清楚，但这并不妨碍我们去欣赏它。”

当然，比内公式并不是 F 数列唯一的通项公式。例如，下面的 n 阶行列式就是另一种通项公式：

$$F_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}。$$

又如，F 数列还有组合数和的形式（见 4.3.5 小节），矩阵、向量积形式等表示的通项公式。

4.2.2　和谐的乐章——F 数列的奇妙性质

F 数列的奇妙性质非常之多——好似游历名山大川能看到的许多自然和人文美景。但就像山川的丽色美不胜收一样，这里只能挑重要而有趣的，做挂一漏万的“蜻蜓点水”。

1. 卡西尼公式

1680年，出生在意大利的乔凡尼·多美尼科·卡西尼发现了连续三个 F 数的一个奇妙关系：$F_{n-1}F_{n+1}=F_n^2+(-1)^n$ $(n\geqslant 2)$。这就是说，相邻的3个 F 数，两边两个数之积，与中间这个数的平方相差1。例如，当 $n=5$ 时，$8\times 3=5^2+(-1)^5$。这个奇妙的性质，使人联想到所有的三个连续自然数组的奇妙关系：例如，$6\times 4=5^2-1$。



乔凡尼·多美尼科·卡西尼

卡西尼公式也可以用数学归纳法和其他数学方法证明。

卡西尼，是在1669年应法国皇帝路易十四之邀，从意大利到法国皇家科学院工作的法国天文学家和数学家。后来巴黎天文台成立，他当了首任台长。著名的卡西尼家族，是17～18世纪法国四代相继的天文学家族。

“类似”卡西尼公式，有“内外积公式”：$F_nF_{n+3}=F_{n+1}F_{n+2}-(-1)^n$。这就是说，$F$ 数列中相邻的4个 F 数，中间两个数之积（内积）与两边两个数之积（外积）也相差1。例如，当 $n=5$ 时，$5\times 21=8\times 13-(-1)^5$。

2. F 数列与 φ

两者的关系密切，现写出以下几方面。

（1）当 $n\to\infty$ 时 F_n/F_{n+1} 的极限是 φ，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{F_n}{F_{n+1}}=\phi$。这个结论，在3.6.2小节中已经证明。而且，显然 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{F_{n+1}}{F_n}=\dfrac{1}{\phi}$。

据说，最早在1753年发现 F 数列中随着数字的增大，两数间的比值越来越接近 φ 的是苏格兰格拉斯哥大学的数学家西姆森。另一种说法是，开普勒比他更早发现。

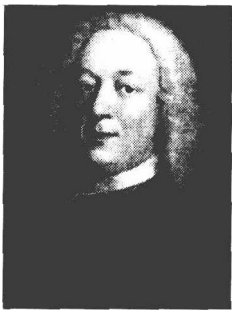
（2）F_n 可以用 φ 来表达：$F_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}[\phi^{-n}+(-1)^{n+1}\phi^n]=\dfrac{\phi^n}{\sqrt{5}}-$

$\frac{(1-\phi)^n}{\sqrt{5}}$。这两个表达，本质上都是比内公式，只不过形式变了。

（3）$F_n-\phi F_{n+1}=(-\phi)^{n+1}$。例如，当 $n=4$ 时，$F_4=3$，$F_5=5$，则 $3-\phi\times5=(-\phi)^5$。

（4）$\frac{1}{2}=\frac{F_2}{F_3}<\frac{F_4}{F_5}<\cdots<\frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}<\cdots<\phi<\cdots<\frac{F_{2n+1}}{F_{2n+2}}<\cdots<\frac{F_3}{F_4}<\frac{F_1}{F_2}=1$。

（5）ϕ 的大小在 $\frac{F_n}{F_{n+1}}$ 和 $\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$ 之间，更靠近 $\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$。显然，由此可知，在分母不大于 F_{n+1} 的分数中，$\frac{F_n}{F_{n+1}}$ 的值最接近 ϕ。



西姆森

3. *F* 数列与渐近分数

F 数列的前后两项之比（即 F_n/F_{n+1}）是无穷连分数 $\frac{1}{1+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{1+\cdots}$ 的第 n 个渐近分数。这个规律，也是西姆森在 1753 年发现的。这个无穷连分数是数学中所有无穷连分数中最“简单”的一个。

4. 奇妙的数论性质

（1）互素性质——F_n 和 F_{n+1} 互素。

（2）整除性质——$m \mid n \Leftrightarrow F_m \mid F_n$，其中 $m\neq2$。

1876 年，法国数学家鲁卡斯证明了一个被称为“漂亮结果”的定理：如果 (m, n) 为 m 与 n 的最大公因子，则 $(F_m, F_n)=F_{(m,n)}$。上述整除性质就是这个定理的一个推论。

这个定理也可以这样叙述：一个数整除 F_m 和 F_n 的充要条件是，这个数是 F_k 的因子。这里的 $k=(m, n)$。

（3）平方性质：

①$F_n^2+F_{n+1}^2=F_{2n+1}$，如 $8^2+13^2=233$；

②$F_{n+1}^2-F_{n-1}^2=F_{2n}$（$n\geqslant2$），如 $13^2-5^2=144$，据说这两个平方性

质是俄罗斯著名数学家韦罗斯利夫发现的；

③$F_1^2+F_2^2+F_3^2+\cdots+F_n^2=F_nF_{n+1}$，如$1^2+1^2+2^2+3^2+5^2=5\times8$；

④$F_n^2+(-1)^n=F_{n-1}F_{n+1}$，如$5^2+(-1)^5=3\times8$。

（4）乘积性质——$F_{n-1}F_n+F_nF_{n+1}=F_{2n}$，如$3\times5+5\times8=55$。

（5）立方性质——$F_{n+1}^3+F_n^3-F_{n-1}^3=F_{3n}$，如$5^3+3^3-2^3=144$。

5. 奇妙的求和性质

（1）前n项求和——$\sum_{k=1}^{n}F_k=F_{n+2}-1$；

（2）前n项的奇数项求和——$\sum_{k=1}^{n}F_{2k-1}=F_{2n}$；

（3）前n项的偶数项求和——$\sum_{k=1}^{n}F_{2k}=F_{2n+1}-1$；

（4）前n项正负交错求和——$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}F_k=(-1)^{n+1}F_{n-1}+1$；

（5）前n项的三倍数项求和——$\sum_{k=1}^{n}F_{3k}=\frac{1}{2}(F_{3n+2}-1)$；

（6）前n项的平方求和——$\sum_{k=1}^{n}F_k^2=F_nF_{n+1}$；

（7）前n项的立方求和——$\sum_{k=1}^{n}F_k^3=\frac{1}{10}[F_{3n+2}+6(-1)^{n+1}F_{n-1}+5]$。

6. “11倍性质”

前10项的和（143），等于第7项（13）的11倍。不仅F数列有这个性质，而且前面提到的仿F数列，也都有这种性质。下面是验证。

设任选的两个数为a和b，则接下来的项为：$(a+b)$，$(a+2b)$，$(2a+3b)$，$(3a+5b)$，$(5a+8b)$，$(8a+13b)$，$(13a+21b)$，$(21a+34b)$，…。容易算出这前10项的和为$(55a+88b)$——正好是第7项$(5a+8b)$的11倍。

利用这个性质，可以玩一个速算游戏：您请朋友任取两个自然数，然后把它们相加得到第3个数，再把第2个数和第3个数相加得到第4个数……依此类似进行下去，得出第10个数为止，并把得到的这10个

数告诉您（如 1，3，4，7，11，18，29，47，76，123）；此时，您可以立即告诉它们的和是 319（等于第 7 个数 29 的 11 倍）。

7. 倒数性质——$\dfrac{1}{F_n}=\dfrac{1}{F_{n+1}}+\dfrac{1}{F_{n+2}}+\dfrac{1}{F_nF_{n+1}F_{n+2}}$（$n$ 为偶数）

前三个实例分别是当 $n=2$，4，6 时，

$$\frac{1}{1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{1\times2\times3},\quad \frac{1}{3}=\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{3\times5\times8},$$

$$\frac{1}{8}=\frac{1}{13}+\frac{1}{21}+\frac{1}{8\times13\times21}。$$

一个数列中的任意一项的倒数，竟然与紧邻它后面两项各自的倒数的“和”与“积”，有如此奇妙的关系，真是奇妙得让人一步三叹！

8. 循环小数性质

把 F 数像图 4-5 那样逐个“向后”退 1 位“加”起来，并添上小数点，就得到 0.011 235 955…。这个小数，就是分数 1/89 化成的小数，它有 44 位循环节($\dot{0}11\ 235\ 955\ 056\ 179\ 775\ 280\ 898\ 876\ 404\ 494\ 382\ 022\ 471\ 9\dot{1}$)。有趣的是，这 44 位循环节的前 22 位与后 22 位各对应数字之和分别都是 9！

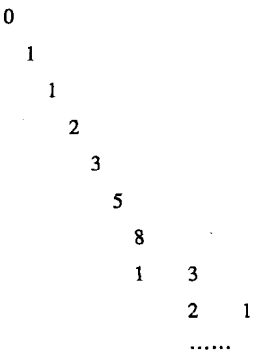


图 4-5

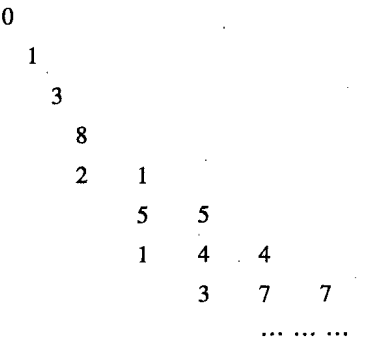


图 4-6

把 F 数像图 4-3 那样每隔一个取出来，再像上面那样逐个“向后”退 1 位“加”起来，并添上小数点，就得到 0.014 08…。这个小数点后共有 70 位循环节的小数的值，就是 1/71。

……

9. 尾数循环性质

各 F 数的尾数（即个位数）如下：1，1，2，3，5，8，3，1，4，5，9，4，3，7，0，7，7，4，1，5，6，1，7，8，5，3，8，1，9，0，9，9，8，7，5，2，7，9，6，5，1，6，7，3，0，3，3，6，9，5，4，9，3，2，5，7，2，9，1，0，*1*，*1*，…。

这些数总是两个奇数和一个偶数交替出现，其中前 60 个是各 F 数的尾数的一个循环。后面两个斜体数字 *1*，*1* 表示已经开始第二个循环。

10. 与三角形和四面体无缘

从 F 数列的递推关系和三角形的边长关系可知，不存在以 F 数为边长的三角形和四面体。

11. “迷雾”之下还有宝藏吗

通过上面对奇妙的 F 数列的“蜻蜓点水”，可见它的确是数学中最优美的和谐乐章——F 数就是这和谐乐章中的一个个“音符”。



弗拉马利翁

然而，对 F 数列的奇妙、奥秘和“迷雾”的探索，还远远没有完结。例如，“迷雾”之一是，为什么其中只有两个平方数即四角数（1 和 144）而不是更多呢？据说，这个问题是罗莱特最早提出来的，在 1964 年和 1965 年被科恩、威勒和中国数学家柯召解决。又如，至今人们知道 F 数列中有 11 个素数，那么其中的素数是否无限多以及它们的分布有无规律？这 11 个素数是当 $n=3$，4，5，7，11，13，17，23，29，43，47 时对应的 F_n——其中最小的是 $n=3$ 时的 $F_3=2$，最大的是 $n=47$ 时的 $F_{47}=2\ 971\ 215\ 073$。再如，在 F 数列中只有 1 和 144 这两个四角数，而三角数则有 1，3，21 等出现在 F 数列中；那么，F 数列中的三角数是有限个还是无限个呢？这个问题，至今也没有解决。

云蒸霞蔚的巍峨名山，往往岩烟笼罩；紫气东来的雄阔大川，常常云遮雾障。正如在这些山川的下面，有更多美景丽色还没有发现一样，

更多的 F 数列的“宝藏”，还等待我们去挖掘。

于是，我们想起了 100 多年前法国著名诗人弗拉马里翁诗一般的名言：“你以为一切都已经发现了吗？那真是绝顶的荒谬；这无异把有限的天边，当做了世界的尽头。”这位诗人还是一位天文学家（曾是法国天文学会第一任会长）和优秀科普作家。他的畅销书《大众天文学》再版 20 多次和译为多种语言，影响着包括中国人在内的一代代“地球人”。而他为这本书定下的座右铭更值得回味：“科学知识应该大众化，而不应该庸俗化。”

4.3　F 数列的数学应用

F 数列是在研究兔子问题中发现的，那么它是不是“绣花枕头——中看不中用”呢？如果不是，那它在纯数学中有价值应用有哪些呢？

4.3.1　数学领域初显身手

1884 年，法国数学家拉梅证明了一个重要的结论：用辗转相除法（即欧几里得除法）求两个自然数的最大公因子所用除法的次数（即辗转相除的次数），不大于较小那个数的位数的 5 倍。有人认为，这是“F 数列第一次有价值的应用”。

《原本》卷 7 中谈到一种求两个自然数的最大公因子的方法：用较小的那个去除较大的那个，然后用所得余数去除上一次的除数，再这样继续下去，直到余数为 0；此时，最后一次的除数就是这两个自然数的最大公因子。这就是所谓辗转相除法。显然，为了求得最大公因子，我们就自然很关心“工作量”——预先知道这种除法最少要做多少次。而用拉梅的结论就能立即解决问题。而他的证明，就用到 F 数列。这是 F 数列在纯数学领域中精彩



拉梅

的“处女秀”。

当然，*F* 数列在数学领域中的应用远远不止这个“处女秀”。

4.3.2 *F* 数列与“*F* 数列长方形”

把一个边长为 1 的正方形“始”加上一个大小相等的正方形Ⅰ，就得到了一个 2×1 的长方形；以它的长边为边长做一个 2×2 的正方形Ⅱ，就得到了一个 3×2 的长方形；再以它的长边为边长做一个 3×3 的正方形Ⅲ，就形成一个 5×3 的长方形……继续这个过程，就会得到一连串的长方形（第一个是正方形，图 4-7）：1×1，2×1，3×2，5×3，8×5，13×8，…。将它们的长边和短边分别列出来，就是——长边：1，2，3，5，8，13，…；短边：1，1，2，3，5，8，…。也就是说，这一连串图形的长边和短边分别形成了 *F* 数列——我们称它为“*F* 数列长方形”。

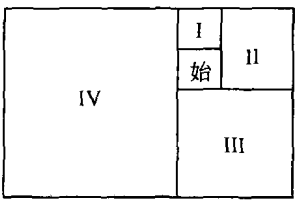


图 4-7

F 数列长方形非常有趣：一直可以做到无穷多个，边长始终是 *F* 数列中的某两项，必然“紧密连接”。这三点无须证明。

4.3.3 *F* 数列与“完全正方形”

1. “完美正方形”

完美正方形又叫“完全正方形”——怎么个“完美”法呢？

把一个整数边长的正方形分割成为互不相等边长的整数正方形，这个正方形就是完美正方形。

1926 年，俄国－苏联数学家鲁金最早猜想，有可能存在完全正方形。不过，4 年以后的 1930 年，他就认为完全正方形并不存在。

1936 年，英国剑桥大学三一学院的 4 位学生布鲁克斯（Brooks）、史密斯（Smith）、斯托尼（Stone）、塔特（Tutteru 或 Tutte）对找出完全正方形的问题，产生了浓厚的兴趣。1938 年，他们终于发现了一个

可分割为 69 个小正方形的完全正方形，称为 69 “阶” 完全正方形。此时，距鲁金“完全正方形并不存在”的话音仅仅 8 年。



鲁金

不过，这不是鲁金没有数学水平——他是莫斯科数学学派的创始人和中心人物、现代实变函数论的开创者、奠基人之一，在函数等领域有许多重要贡献；他还是“数学最牛”的莫斯科大学的著名教育家。而是这个问题太难了。他的问题在于思想方法上——凭猜测把话说绝了。

可不是么，至今数学家们还不能完全判断哪些正方形是不是完全正方形，而且难以用“人工方法”解决——许多完全正方形都是用电子计算机构造出来的，等等。当然，在研究过程中，数学家们也取得了许多具体的成果。

不过，剑桥的 4 位学生发现的 69 阶完全正方形太大了，可不可以更小一些呢？数学家们继续前进，向着目标——更小的完全正方形。

1939 年，柏林的斯帕拉格构造出一个 55 阶完全正方形，边长是 4 025。剑桥的 4 位学生也再接再厉，在同年晚些时候，找出一个 28 阶完全正方形，边长是 1 015。

1948 年，英国业余数学家威尔科克斯构造出一个 24 阶完全正方形，边长是 175。据说，至今构造出的 24 阶完全正方形已经超过了 2 000 个。而此前他曾构造出一个 37 阶的完全正方形。1967 年，他又分别构造出 26 阶和 25 阶完全正方形。

2. “完美矩形”

在比威尔科克斯更早的 1940 年，剑桥大学的数学家布鲁克斯利用完美矩形即“完全矩形”（分割为若干个不等正方形的矩形），也构造出了 26 阶完全正方形。他还证明了完美矩形的最低阶数是 9——这个（33 × 32）的完美矩形（图 4-8），是前述剑桥三一学院那 4 位学生，在 1936 年研究完美正方形时意外发现的。他们还意外发现了一个（177 ×

176）的11阶完美矩形。而世界上第一个完美矩形（10阶），是数学家莫伦在1925年首先发现的。

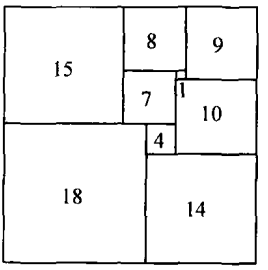


图4-8　最低阶的完美矩形33×32被分解为9个正方形

9阶完美矩形不止一种，有学者用它们求解电学中要用基尔霍夫定律来解答的电路，取得了成功。基尔霍夫是一位德国物理学家，以发现电学中最重要的定律之一——基尔霍夫（第一和第二）定律闻名于世。

3. 大捷报传来

又过了大约10年，大捷报终于传来——荷兰端迪大学的数学家杜伊杰斯廷，在敲打一番大型电子计算机的键盘之后，得到了一个21阶完全正方形（图4-9）。杜伊杰斯廷得到它的时间有1978年和1976年两种说法。发现者和发现年代的另一种说法是，由前述剑桥三一学院的4个学生在1976年完成。这是迄今为止已知最小的一个完全正方形——边长是

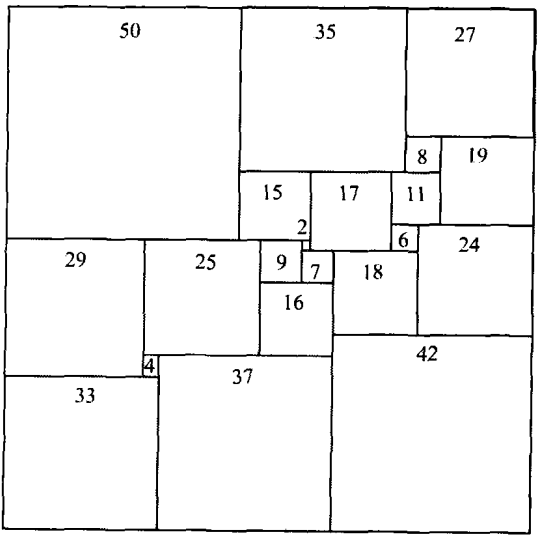


图4-9

112。更加奇妙的是，它还是一个“简单完美正方形”——其中最小的正方形（边长为 2，在图 4-9 中部）不能再分割成任何边长是整数的矩形。

1978 年，杜伊杰斯廷还证明 21 阶以下的完全正方形不存在。而在此之前的 20 世纪 40 年代末，鲁金也证明了这个论断，但有人说他的结论未被证实。

这个 21 也很有“来头”——“毗邻”魔方的“上帝之数”22。原来，人们曾提出过一个难题：最少要转动多少次，才能确保还原无论颜色被弄得多乱的魔方？1995 年，美国中佛罗里达大学的数学家迈克尔·里德，得到了 30 的结果。而在 2008 年，研究了这个问题达 15 年之久的美国电脑高手托马斯·罗基奇，给出了“上帝之数”的最新答案——22。据说，有种种迹象表明，最终的“上帝之数”是 20——也与 21“毗邻”！


鲁比克和他发明的魔方

这里所说的魔方，是指那种风靡全球的 3×3×3“可转动小方块”。它由匈牙利布达佩斯应用艺术学院的建筑学教授、发明家、雕刻家鲁比克·艾尔内，在 1974 年春发明。

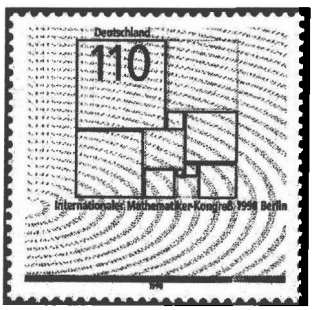
4. *F* 数列和完全正方形

那么，*F* 数列和完全正方形有什么关系呢？原来，*F* 数列可用于解决“分割难题”——包括分割完美正方形、完美矩形的正方形分割、正方形的三角形分割（把一个正方形分为若干个不相等但相似的三角形）。伊夫斯著的《数学史上的里程碑》，就指出了 *F* 数列这个“出人意料”的应用。他还在这本书中说，分割完全正方形这个“困扰人的问题，也已经用计算机成功处理了，取得了某些结果，只是回避了非计算机过程。”

5. 分割难题余兴未尽

分割难题的确是一个“困扰人的问题”，数学家们至今兴趣盎然。

例如，一个至今没有解决的问题是：能否用边长为1，2，3，…的正方形去铺满整个平面？



1998年德国发行的邮票

在研究这个问题时，数学家们就用到了*F*数列——以*F*数列为边长的一系列正方形能铺满直角坐标平面的第四象限，而以“仿*F*数列”的（4），（5），9，15，24，…为边长的正方形可铺满第三象限，以“仿*F*数列”的（7），（11），18，29，47，…为边长的正方形则可铺满第一象限。而没有在这三个数列中出现的（4），（6），10，16，26，…为边长的正方形可放在第二象限。这就表明，用边长为1，2，3，…的正方形能至少铺满整个平面的3/4。

为了探索分割难题的解法，1998年在德国柏林（和德国德累斯顿）召开的第23届国际数学家大会，设计了包括这个“矩形求方”问题的一种解法的邮票，由德国在当年发行。

4.3.4 *F*数列与幻方

*F*数列和幻方的研究者们发现，*F*数列与幻方有一定的联系。一个例子如图4-10的两个表格所示。

4	9	2
3	5	7
8	1	6

13	144	5
8	21	55
89	3	34

图4-10

把*F*数列中从3开始的连续9个数3，5，8，13，21，34，55，89，144依次代替图4-10左边3阶幻方中的1～9，就成了右边的方阵。这个方阵虽然不是一个通常的幻方，但却有一个有趣的性质：每一行的3个数的乘积之和（即9 630 +9 240 +9 078），等于每一列的3个数的乘积之和（即9 256 +9 072 +9 350）=27 678。

4.3.5　*F* 数列与贾宪三角

1. *F* 数列诠释贾宪三角

图 4-11 被称为“贾宪三角形”（两斜边都由 1 组成，其余的数等于它肩上的两数之和）。中国北宋著名数学家贾宪约于 1050 年完成的《黄帝九章算经细草》一书，记载了这个三角形（共 7 层，可得到二项式的 6 次幂的系数），所以得名。贾宪的这本原书已经佚失，但中国南宋著名的数学家杨辉在 1261 年所著的《详解九章算法》一书中载有“开方作法本源”图（因为最初用来开方，也叫“平方求廉图”），注明“贾宪用此术”，所以也叫“杨辉三角（形）”。

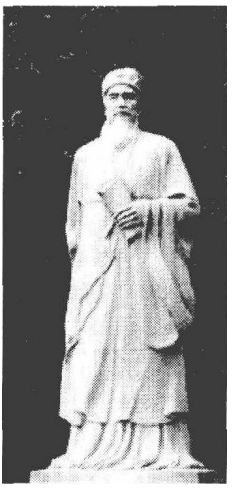
1
1　1
1　2　1
1　3　3　1
1　4　6　4　1
1　5　10　10　5　1
…　…　…　…　…　…　…

图 4-11

中国数学家对贾宪三角形还有后续研究。例如，元代著名数学家朱世杰在 1303 年的《四元玉鉴》一书中，把贾宪三角形扩充成了“古法七乘方图”（比贾宪三角多了两层，可得到二项式的 8 次幂）。又如，在 1846 年，清代数学家戴煦（1805—1860）“通过本土化的算学发展途径”，用古法七乘方图成功地求得“二项式定理”。

当然，最早发现完整的二项式定理的是英国数学家牛顿，所以它又被称为“牛顿二项式定理”——1665 年，他把二项式定理推广到指数为分数与负数的情形，并给出了展开式的公式：$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} + \cdots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + b^n$。二项式定理在组合理论、开高次方、高阶等差数列求和，以及差分法中有广泛的应用。

把图4-11变形为图4-12，就能看到各条斜虚线方向的数的和（在实线左侧），恰好是F数列的各项。这样，我们就可以认为，贾宪三角可以用F数列来诠释，或者说F数列可用组和数和的形式来表达。而知道这个结论并非“得来全不费工夫”——按帕帕斯在《数学趣闻集锦》中的说法，大概在19世纪后期之前还没有人注意到。



贾宪

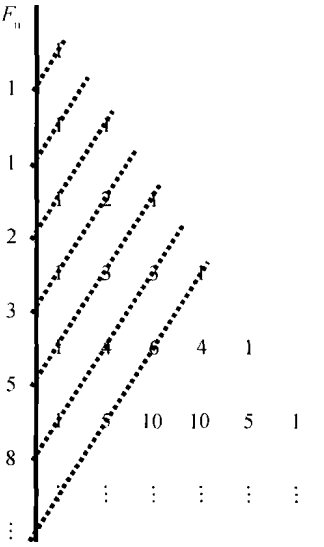


图4-12

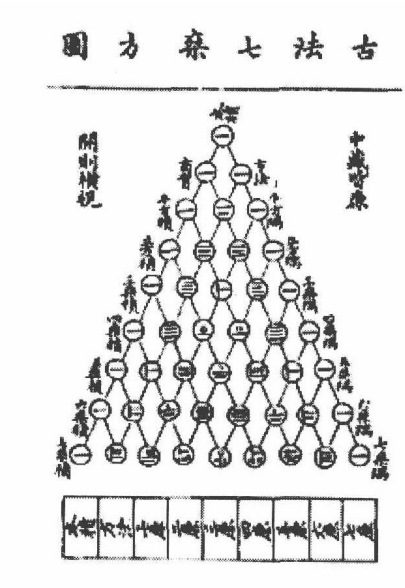
2. 贾宪三角在西方

在西方，贾宪三角被称为“帕斯卡三角形”——因1654年法国物理学家兼数学家布帕斯卡写的《论算术三角形》一书（在他死后的1665年出版）中记载。但是，由于帕斯卡是在13岁时（1636年）发现的，比贾宪晚了500多年，所以帕帕斯依然称它为“中国三角形”。

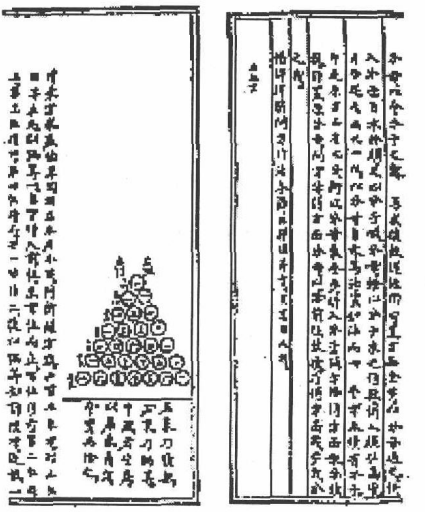
其实，比帕斯卡更早发现这个三角形的大有人在。在西方最早公开发表这个三角形的，是德国天文学家、数学家阿皮安努斯——1527年在因戈尔施塔特出版的一本算术书的封面上，就有他的这个图。比阿皮安努斯更早的发现者是德国数学家尼莫尔——约于1220年写的但未完成的《算术》一书中，他就对这个三角形的构造方法做了清楚的说明。

在阿皮安努斯和帕斯卡之间的 100 来年，还有不少人研究过这个三角形。例如，两位德国数学家斯蒂菲尔、朔伊贝尔等。

不过，上述三角形都流传不广，所以意大利数学家塔尔塔里亚在得到这个三角形的时候，还以为自己“捷足先登”。与他同时代的另一位意大利数学家卡尔丹也得到同样的三角形。法国数学家佩尔蒂埃、意大利数学家邦别利、英国数学家奥特雷德等，都在帕斯卡之前得到过这个三角形。



古法七乘方图



杨辉《详解九章算法》中的“开方作法本源”

此外，在中世纪的阿拉伯，巴格达的数学家阿尔－卡拉吉在 11 世纪的一篇长文中，以及曾在撒木尔罕的鲁伯克天文台工作的阿尔－卡西在 1427 年所著的《算术之钥》一书中，也各自得到这个三角形。

3. 名垂青史的贾宪三角

由于贾宪三角有许多用途和趣味，所以名垂青史和常被人们津津乐道。

贾宪三角的许多用途中包括：①求二项式的展开式各项的系数；②求某些自然数的方幂和；③求概率；④研究某些自然界的不规则现象。

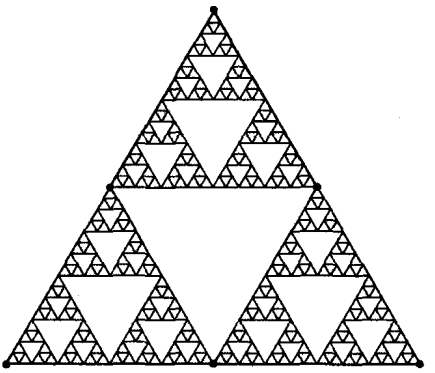


图4-13　经5次迭代的谢尔平斯基三角形

一个求概率的例子是，求投掷3枚硬币同时出现正面（或同时出现反面）的概率，就可以从贾宪三角的第4行得到——1/（1+3+3+1）=1/8。这个问题的答案是：投掷n枚硬币，就把$n+1$行的数字加起来，再取倒数就行了。上面的例子是$n=3$，所以把第3+1行=4行的数字相加后取倒数。实际上，第4行就是3次二项式的展开式各项的系数。

研究某些自然界的不规则现象（如海岸线的性状、大气运动、海洋湍流、野生生物群体涨落）的例子是，把贾宪三角中的所有偶数去掉，剩下的图形就类似于“分形几何”中的“谢尔平斯基三角形”（图4-13）。这种三角形由一个大的正三角形经过一次次的迭代变换而成，理论上可以无限迭代下去。谢尔平斯基是一位波兰数学家，以对集合论、数论、函数理论和拓扑学的出色贡献闻名，“谢尔平斯基地毯”、“谢尔平斯基数”和“谢尔平斯基问题”等，以他的名字命名。

贾宪三角的许多趣味中包括：①这些数排列的形状像等腰三角形，腰上的数字都是1；②第$n+1$层的数字之和是2^n；③从右往左斜看（或者从左往右斜看），第一列都是1，1，1，1，1，1，1，…；第二列都是1，2，3，4，5，6，…。

被人们津津乐道的一个例子，是文艺复兴时期意大利著名画家拉斐尔的名画《雅典学院》。在这幅画台阶下面左侧坐在地上专注地书写的，是古希腊数学家毕氏。在紧靠他的右边，是一个用手给他扶着木牌



《雅典学院》展现古代七种艺术：语法、修辞、逻辑、数学、几何、音乐、天文

的少年。木牌上画的是“和谐”的数目比例图，图上就有一排类似贾宪三角的白色字迹。但是，没有证据表明毕氏已经发现了这种三角形。由此可见，虽然拉斐尔把发现这种三角形的人弄错了，但是可以看出他对它的“念念不忘”；而他所知道的这个三角形，很可能是由中国经中亚或直接由中亚传入意大利的。

被人们津津乐道的又一个例子是，今天还有人在互联网上公布了贾宪三角形第 50 行的数字。

在数学的许多重要领域中，中国古代都处于遥遥领先的地位，有着无数光辉灿烂的篇章——贾宪三角就是其中十分精彩的一页。

4. 有趣的调和三角形

谈了贾宪三角之后，应该说一说数学中另一个有趣的三角形——调和三角形。

图 4-14 是一个调和三角形，它有如下趣味性质：

（1）第一行的项形成发散的调和数列，而其他行的数列收敛；

（2）第二行的项是三角形数的倒数的一半，总和为 1；

1/1 1/2 1/3 1/4 1/5 1/6 …
1/2 1/6 1/12 1/20 1/30 …
1/3 1/12 1/30 1/60 …
1/4 1/20 1/60 …
1/5 1/30 …
1/6 …
…

图 4-14

（3）第三行的项是“金字塔数”（以三角形数为底的锥形）的倒数的三分之一；

（4）每一项都等于它正上方与右上方两项的差（如 1/3 = 1/2 - 1/6）；

（5）每一项都等于它正下方项起与右边所有的项的和（如 1/2 = 1/3 + 1/12 + 1/30 + 1/60 + …）。

4.3.6 *F* 数列与“线段数列”

如图 4-15 所示，*CDEF* 是半圆的内接正方形，边长为 1。如果 $AC = a$，$CB = b$，由此可以得到数列：

$a - b$，

$a^2 - ab + b^2$，

$a^3 - a^2b + ab^2 + b^3$，

……

$a^n - a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 - \cdots + (-1)^n b^n$。

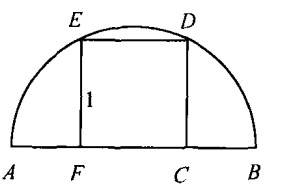


图 4-15

那么，这个数列就是 *F* 数列。我们把这个数列称为“线段数列”，原因是其中的各项都是用线段 *a* 和 *b* 表示的。

只要求得 *a* 和 *b* 的长，就容易证明上面的结论。事实上，很容易由图 4-15 中的关系求得 $a = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$，$b = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$。余下的证明留给读者。

4.3.7 *F* 数列与方程的近似解

对方程 $x^2 + x - 1 = 0$ 和它的解，我们并不陌生。这里的问题是，它的近似解有什么规律？

由于当 $x = 0$ 和 $x = 1$ 时，$x^2 + x - 1$ 的值分别是小于 0 的 -1 和大于 0 的 1，所以它在区间（0，1）必有解。

现在，用迭代式 $x_{n+1}=\frac{1}{x_n+1}$ 求它的近似解。

当 $x_0=1$（第 0 次迭代）时，$x_1=\frac{1}{x_0+1}=\frac{1}{2}$，所以第 1 次迭代的近似解 $x_1=\frac{1}{2}$。由此迭代下去，可得：第 2 次迭代的近似解 $x_2=\frac{1}{\frac{1}{2}+1}=\frac{2}{3}$，第 3 次迭代的近似解 $x_3=\frac{1}{\frac{2}{3}+1}=\frac{3}{5}$，第 4 次迭代的近似解 $x_4=\frac{1}{\frac{3}{5}+1}=\frac{5}{8}$，第 5 次迭代的近似解 $x_5=\frac{1}{\frac{5}{8}+1}=\frac{8}{13}$，…。

于是，我们看到各次迭代后得到的近似解为：$\frac{1}{1}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{5}{8}$，$\frac{8}{13}$，…。

这些分数的分子和分母，恰好符合 F 数列。

4.3.8　F 数列与概率

多次抛投一个硬币，直到两面（分别用“正”和“反”表示）都是硬币正面为止。从下面的表可以看出，各次抛投的所有可能排序的数目符合 F 数列。这个结论，可以用数学归纳法证明（表 4-1）。

表 4-1

第几次抛投	可能的排序	排序的数目
2	正正	1
3	反正正	1
4	正反正正，反反正正	2
5	反正反正正，正反反正正，反反反正正	3
6	正反正反正正，反反正反正正，反正反反正正，正反反反正正，反反反反正正	5
⋮	⋮	⋮

通过这个例子，可以看到 F 数列与概率也有密切关系。

4.3.9 每一项都含 φ 的“仿 F 数列”

这里的题目是：求一个完全是正数的“仿 F 数列”：第一项是 1，从第二项起，使每一项的平方都等于它前后相邻两项的乘积——即 $F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1}$，其中 $n \geqslant 2$。

设这个数列的第二项是 x，显然第三项应为 $x+1$，第四项应为 $2x+1$，…。由题意知 $x^2 = 1\ (x+1)$，由此解得 $x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi \approx 1.618$（已舍去负根）。所以，要求的数列是

$$1;\quad \phi,\quad \phi+1,\quad 2\phi+1,\quad 3\phi+2,\quad 5\phi+3,\quad \cdots。$$

那么，后面的项是否满足 $F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1}$ 呢？这里来验证一个：

$$F_3^2 = (\phi+1)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}+1\right)^2 = \frac{3\sqrt{5}+7}{2},$$

而

$$F_2F_4 = \phi(2\phi+1) = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\left(2\times\frac{\sqrt{5}+1}{2}+1\right)$$

$$= \frac{3\sqrt{5}+7}{2}。$$

这就验证了 $F_3^2 = F_2F_4$。

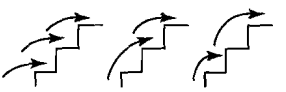
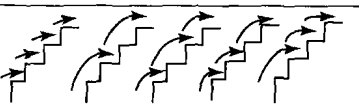
显然，这样的数列是唯一的。

每一项都含 φ 的“仿 F 数列”有很多（如 φ，φ，2φ，3φ，5φ，8φ，…），而上面说的“仿 F 数列”是其中非常有趣的一个。

4.3.10 F 数列与登楼梯

登楼梯时，只能一步登一级或两级，问登 1，2，3，4，…级楼梯，各有多少种登法？答案是：各有 1，2，3，5，…种登法（表 4-2）。

表 4-2

楼梯级数	上楼方式	方式数目
1		1
2		2
3		3
4		5
⋮	⋮	⋮

如果继续下去，就会得到登 5，6，7，…级楼梯的登法数目分别为 8，13，21，…种。也就是说，登楼梯的规律也遵守 F 数列。

4.3.11　F 数列与蜜蜂的道路

一只蜜蜂从蜂房 A 出发，要分别爬到 1，2，3，4，…，n 号蜂房，但大方向只能从左到右，即不许走“回头路”，问他爬到这些蜂房的路线数各是多少？

从图 4-16(a)显然可以看出，从 A 爬到 1 号蜂房的路线数为 $F_2=1$。

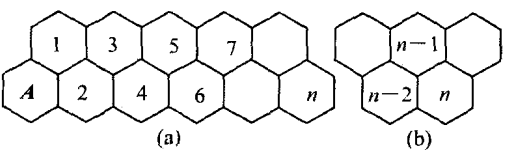


图 4-16

从 A 爬到 2 的路线数为 $F_3=2$：经过 1 从 $A\rightarrow1\rightarrow2$；不经过 1 直接从 $A\rightarrow2$。

从 A 爬到 3 的路线数为 $F_4=3$：经过 1 从 $A\rightarrow1\rightarrow3$，$A\rightarrow1\rightarrow2\rightarrow3$；不经过 1 而是直接经过 2 从 $A\rightarrow2\rightarrow3$。

从 A 爬到 4 的路线数为 $F_5=5$：经过 1 从 $A\to1\to2\to4$，$A\to1\to3\to4$，$A\to1\to2\to3\to4$，不经过 1 而是直接经过 2 从 $A\to2\to4$，$A\to2\to3\to4$。

……

那么，这些路线数有什么规律呢？

从图 4-16（b）可以看出，A 爬到 n 的路线只有两类：经过 $n-1$ 到 n，不经过 $n-1$ 直接经过 $n-2$ 到 n。显然，从 A 爬到 $n-1$ 的路线数为 F_n，从 A 爬到 $n-2$ 的路线数为 F_{n-1}。这样，从 A 爬到 n 的路线数为 $F_{n+1}=F_{n-1}+F_n$。也就是说，这些路线数符合 F 数列。

4.3.12 尼罗河畔的余香

1. “天书”中的埃及分数问题

“啊，怎么在这里——看不懂的‘天书’，棒极了！”

世界第一长河尼罗河，一条生长出世界上最古老的书写材料——植物纸莎草的河，一个把几何学作为给人类的“赠礼”的河……

为了这条河及其他胜景，爱尔兰古董商兰德因病来到埃及旅游。1858 年的一天，他惊喜地购买到了在埃及特贝的一座废墟上发现的这宝贝“天书”。这部大约在公元前 1700 年用纸莎草写的、长 544 厘米、宽 33 厘米的“天书”——后来称为兰德纸草书，从此彰显于世，后来一直保存在伦敦的大英博物馆内。那么，兰德纸草书上究竟记载着什么“秘密”呢？

兰德纸草书的“秘密”之一，就是用很大的篇幅叙述把真分数分解成单位分数即单分子分数的问题。所谓单位分数，是指分子是 1 的分数。例如，把 2/3 分为 1/2 + 1/6，但不允许分为 1/3 + 1/3——因为加数中有相同的。一个真分数有时有多种分法，如 19/45 就至少有以下 5 种分法：19/45 = 1/3 + 1/12 + 1/180，19/45 = 1/3 + 1/15 + 1/45，19/45 = 1/3 + 1/18 + 1/30，19/45 = 1/4 + 1/6 + 1/180，19/45 = 1/5 + 1/6 + 1/18。当然，在这些分法中有“优”“劣”的区别：加数个数少的比加数多的

“优”；个数相同的最小的分数越大越好。根据这个标准，19/45 = 1/5 + 1/6 + 1/18 这种分法最“优”。

古埃及人将两个物品平均分给 3 个人，是这样分的：先把“2”分成 4 个 1/2，分给每人 1 个 1/2；再把剩下的 1/2 分成 3 等份，每人得到 1 个 1/6。结果是每人平均分得 1/2 + 1/6 = 2/3。后来，大家就把单位分数称为埃及分数。



阿基米德

埃及分数问题，历来是一个数学家们感兴趣的问题。例如，像阿基米德这样的数学巨匠，就研究过埃及分数。不过，埃及分数并没有给埃及人带来好运。几千年来，数学史家一直坚持认为，“不懂分数”的古埃及人之所以没能把算术和代数发展到较高水平，其分数运算之繁杂也是原因之一。

关于埃及分数，还有一个属于古老传说的“脑筋急转弯”故事。一个老人在弥留之际，将 11 匹马分给 3 个儿子，老大 1/2，老二 1/4，老三 1/6。11 的 1/2 是 5.5，但总不能杀马呀！正在一筹莫展之际，邻居把自己家的 1 匹马“奉献”进去。于是老大得了 6 匹，老二牵走了 3 匹，老三拥有 2 匹。分完后，邻居把自己的马牵了回去。你看，11/12 被分成了埃及分数 1/2 + 1/4 + 1/6！

2. 真分数拆分和 *F* 数列

那么，埃及分数和 *F* 数列又有什么瓜葛呢？原来，用 *F* 数列可以证明数论中的一个重要定理——“拆分数目定理”：如果 m 和 n 都是自然数，而且 $n < m$，那么任何真分数 n/m 都可以表示为不超过 n 个埃及分数之和。遗憾的是，由于这个定理的证明比较繁杂和枯燥，所以遗憾地略去。

把真分数拆分成单位分数的方法之一是“贪心算法”。

那么，数学家们究竟是怎么分的呢？方法之一是用以下两个步骤。

①找出仅小于真分数 $n = a/b$ 的最大单位分数。这个单位分数的分

母的计算方法是：用 a 除 b，并舍去余数，再加 1。如果没有余数，则新的 n 就是其中最后的 1 个单位分数。

②把新的 n 减去步骤①得到的单位分数，再以所得更小更新的 n 重复步骤①。

下面用 $a/b = 19/20$ 这个具体实例，看是如何用上述两个步骤来分的。

①用 a 除 b，即 $20 \div 19 = 1$（舍去余数 1），由此得到第 1 个单位分数的分母是 $1 + 1 = 2$，这就得到第 1 个单位分数 1/2。

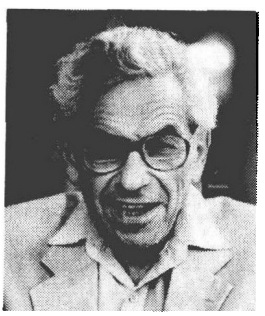
②$19/20 - 1/2 = 9/20$，由 $20 \div 9 = 2$（舍去余数 2），得到第 2 个单位分数 1/3；$9/20 - 1/3 = 7/60$，再由 $60 \div 7 = 8$（舍去余数 4），得到第 3 个单位分数 1/9；最后是 $7/60 - 1/9 = 1/180$，已是最后 1 个单位分数。

所以，最后得到 $19/20 = 1/2 + 1/3 + 1/9 + 1/180$。

可别小看了这似乎笨拙的方法——斐波那契和英国著名数学家西尔维斯特都曾用过它。当然，除了这两位数学家之外，至今还有许多人在为这个或这类问题绞尽脑汁呢！

3. 埃及分数和厄尔多斯猜想

这话得从 1950 年说起。在这一年，1983/1984 年度沃尔夫数学奖得主、美籍匈牙利数学家厄尔多斯，提出了有关埃及分数最著名的猜想——“厄尔多斯猜想”：当自然数 $n > 1$ 时，不定方程 $4/n = 1/x + 1/y + 1/z$ 总有自然数解 x，y，z。研究这个猜想的热潮，从他的中文译名之多可见一斑（都略去“猜想”二字）：欧德斯、厄多斯、爱多士、爱尔特希、艾尔特什、埃尔德什、爱尔多希、艾狄胥……



厄尔多斯

这个可与哥德巴赫猜想媲美的猜想，难倒了世界上第一流的数学家和业余数学高手，至今也没有解决。只是有人验证了当 $n < 10^8$ 时猜想成立。所以，包括顶尖数学家和“下里巴人”在内的“全世界”，现在都在为它忙碌着。例

如，中国新疆且末县一位研究了 21 年的玉店经理——据说他的有关论文已经在某大学学报上发表，但有不同意见。不过，比这些“成败得失”更为重要的是一种态度：有一种失败叫放弃，有一种胜利叫坚持……

接下来，数论专家们又盯上了 $5/n=1/x+1/y+1/z$。据说，有人验证了当 $n<10^6$（一说 10^9），或者 n 不是样子像 $278\ 460k+1$ 的数时，这个方程都有解。

……

4. 尼罗河的余香

对于埃及分数和由它涉及的素数，虽然已经取得了一些研究成果，但至今还有许多未解之谜。用厄尔多斯话来说就是：“至少还再过 100 万年，我们才可能理解素数。”由此，当我们蓦然回首之时，就会对 20 世纪抽象艺术的开创者、俄国画家康定斯基的哲言若有所思：“最古老的也是最现代的。”

那么，还有那些未解之谜呢？下面举出其中的一个。

“拆分数目定理”只能解决把一个真分数拆分成某一组埃及分数时，这一组埃及分数的个数——不能解决共有多少种不同的拆分法的问题。所以，研究埃及分数的一个未解之谜是：目前还不知道把任意一个真分数拆分成埃及分数时，究竟共有哪些不同的拆分法？实例之一是小册子《单位分数》中的一个“低级遗漏”。

《单位分数》在 1981 年由人民教育出版社出版，作者是中国数学家柯召等。在《单位分数》中，有将 5/121 表示成三个不同的单位分数之和的一个式子：$5/121=1/25+1/759+1/208\ 725$。在这个式子下面还有这样一句话：“还不知道 5/121 是否能表（示）成三个不同的单位分数之和，它们当中最大的分母比 208 725 小。”

其实，5/121 完全可以表成三个不同的单位分数之和，且其中最大的分母比 208 725 小：

$$5/121=1/25+1/770+1/42\ 350$$

$=1/26+1/363+1/9\,438$

$=1/25+1/825+1/9\,075$

$=1/27+1/242+1/6\,534$

$=1/25+1/1\,089+1/2\,745$

$=1/25+1/1\,100+1/2\,420$

$=1/33+1/121+1/363$,

其中的 $5/121=1/33+1/121+1/363=(1/11)(1/3+1/11+1/33)$ 的因式 $(1/3+1/11+1/33)$，是将 5/11 表成三个不同的单位分数之和的一个表示式。这由 $121=11^2$ 很容易看出来，以柯召这样的著名数学家，不应该看不出来，但竟然——看漏了！

柯召这个“低级遗漏”的原因之一是，任意一个真分数（如 5/121）究竟共有多少种不同的拆分法，目前还没有计算的公式——或者说还是一个未解之谜。

其实，对于这些未解之谜，柯召了解得很深刻，但又无可奈何，所以他写道：“埃及分数所产生的问题，有的已成为至今尚未解决的难题和猜想，它们难住了许多当代数学家。”例如，他曾研究的厄尔多斯猜想，也取得一些成果，但最终也没能攻克，直到撒手人寰……

尼罗河不停地奔流，泛滥着潋滟的欲望和缭绕的红香。看来，这欲望和红香的余味泛滥如昔、缭绕依然——在当代数学家的脑际与心中……

“世界上只有两个地方———一个是我们去过的，一个是我们要去的。”读者朋友，你有“潋滟的欲望”去埃及分数、去厄尔多斯猜想和素数这类“要去的”地方吗？不过，在作出决定之前，可不能忘记“系春情短柳丝长，隔花人远天涯近”啊！

4.3.13 *F* 数列“无所不能”

F 数列在数学中可以说是“无所不能”，下面再举几个实例。

1. “希尔伯特第十问题”

希尔伯特是享誉世界的德国哥廷根大学的数学家。1900 年在巴黎举行的第 2 届国际数学家大会上，他提出著名“希尔伯特 23 问”。由于这 23 问“问倒了”数学界，所以在 20 世纪初流行着一句对数学专业学生的著名忠告：“打起你的背包，到哥廷根去!”23 问中第 10 问是，“丢番图方程”（系数、指数和解都是整数的不定方程）有没有一般解法?

1970 年，年仅 23 岁的苏联数学家马提雅塞维奇在前人工作的基础上，用“不存在判定任一整数多项式方程是否有整数解的有限步算法”，给出了否定的答案。F 数列在其中起到了重要作用。

上面提到的丢番图，是著名的希腊数学家。

2. 在集合论和数值积分中

例如，中国著名数学家华罗庚就指出 F 数列与数值积分的关系，他还和中国著名数学家王元用 F 数构造出了二重积分的最佳计算公式。

3. 支付货款问题。

用一分和二分的两种硬币——分别用①和②代表，支付 1，2，3，4，5，6，…分货款，支付的方法数就构成 F 数列。这里所说的方法数要考虑顺序，例如，支付 3 分货款时，用①②和②①支付，要看作两种不同的方式。这样，就有以下结果：

支付 1 分货款有 1 种方法：①；

支付 2 分货款有 2 种方法：①①，②；

支付 3 分货款有 3 种方法：①①①，①②，②①；

支付 4 分货款有 5 种方法：①①①①，①①②，①②①，②①①，②②；

……

由此可以看出，支付的方法数构成 F 数列。

4. 覆盖方格问题

用 n 张 1 ×2 的长方形纸片，覆盖住 2 × n 的方格的方法数也构成 F

数列。

5. 集合的子集问题

集合 $A=\{1, 2, 3, 4, \cdots, n\}$ 中不含相邻元素的子集数为 F_{n+2}。例如，$A=\{1, 2, 3, 4\}$ 的子集数为 $F_{4+2}=8$：∅，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{4\}$，$\{1, 3\}$，$\{1, 4\}$，$\{2, 4\}$（这里的∅代表空集）。

6. 在组合中的应用

当 n 为自然数时，$\sum_{n=0}^{\frac{n}{2}} C_{n-k}^{k} = F_{n+1}$。例如，$C_5^0 + C_4^1 + C_3^2 = 1 + 4 + 3 = 8 = F_6$。

7. 与矩阵有联系

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}。$$

8. 象棋“马步”与 F 数

国际象棋的棋子“马”是走“马步”——从“日”字的一角跳到另一角。



齐肯多夫

那么，从任意一点出发的“马”，能否走遍棋盘上的每一点而且每点仅经过一次呢？答案是：“能”。这个有趣的古典问题，叫“骑士旅游”或“棋盘上的马步哈密顿路线”。这个问题的解答过程也与 F 数有关。而这个问题的推广，则是至今没有完全解决的难题。

其实，对中国象棋也存在类似的问题。

9. 投入自然数的“怀抱”

在20世纪，比利时医生、业余初等数论家齐肯多夫发现并证明了齐肯多夫定理：任何自然数都可以表示成若干个不连续的 F 数之和。这种和式称为“齐肯多夫表述法”。

对于任何自然数，齐肯多夫表述法都可以用贪心算法选出每次最大

可能的 F 数。贪心算法的基本思路是，从问题的某一个初始解出发逐步逼近给定的目标，以尽可能快的地求得更好的解。当达到某算法中的某一步不能再继续前进时，计算就停止。贪心算法存在问题是，不能保证求得的最后解是最佳的，只能求满足某些约束条件的可行解的范围；不能用来求最大或最小解问题。

4.4　植物与 F 数列

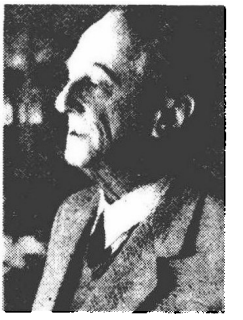
4.4.1　树枝增长的奥秘

“一棵小树苗在第 1 年发芽，如果它在第 2 年长大，从第 3 年起每年长出一根新枝，并且每一根新枝都按这个生长规律长出一根。那么这些树枝的总数量有什么规律呢?”

在一次国际数学大会上，出生在俄国的美国数学家泽林斯基提出了这个树木生长的问题。这个问题最早是由波兰数学家斯坦因豪斯在他于 1938 年出版的名著《数学万花筒》一书中最早提出来的。



泽林斯基



斯坦因豪斯

这个问题的答案和“斐波那契兔子问题”类似——枝条数如图 4-17遵循 F 数列。例如，一种名为珠蓍的花草的枝叶就是这样。

其实，生物学中著名的鲁德维格定律，就是 F 数列在植物生长中的应用。用它可以描述许多植物的生长规律。

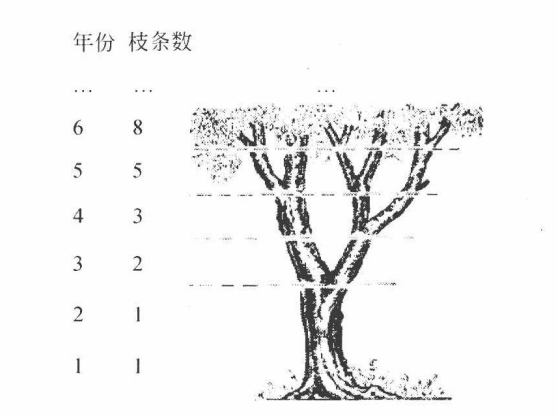


图4-17 树枝的数目按斐波那契数列增长

4.4.2 叶序中的 F 数列

对植物叶子的研究，发现最神奇的现象之一是它的“叶序”。叶序源自希腊词，意思是叶子在茎上的排列——有时还泛指花瓣、果实的排列。很多植物的花瓣及叶子，都是沿着一个称为“生成螺线”的曲线生长的，一面长新叶（或花瓣）一面旋转。

在17世纪，德国天文学家开普勒也研究过叶序问题。在他的研究结果中，出现了 F 数——尽管当时还没有给相关名称加上“斐波那契”。

开普勒经过研究发现，同一种植物的叶子在茎上的排列是有规律的：如果把位于茎的周围同一母线位置的两片叶子称为一个周期（或一个循回）。那么，“叶序分数” m =（每个周期中叶子绕茎的圈数）/（每个周期中的全部叶子数），是一些特定的数——只随植物的品种不同而异。以下是一些实例。

榆树叶子对称排列在茎的两边，一个周期中有两片叶子，一个周期叶子仅绕一圈（图4-18），所以榆树的 $m=1/2$。山毛榉（丹麦的两种国树之一）、郁金香等，叶子从第三片开始循环，所以 $m=1/3$。樱桃（图4-19）、橡树等，$m=2/5$。梨树等（图4-20）的 $m=3/8$，而柳树等的 $m=5/13$……

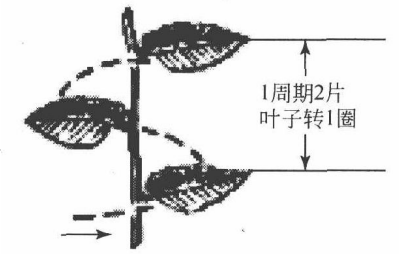


图 4-18　榆树的叶序

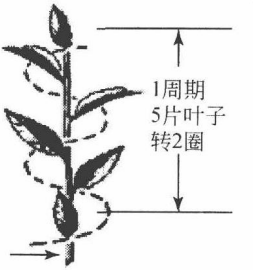


图 4-19　樱桃树的叶序

乍一看，这些分数似乎没有什么吸引眼球之处，但把它们写在一起就容易发现规律：$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{3}{8}$，$\frac{5}{13}$，…。

啊，原来这些分数的分子和分母都恰好分别是 F 数列中的一个个成员！更确切地说，它们分别是 F 数列中的第 n 项和 $n+2$ 项之比。

当然，人们还发现了叶序分数为$\frac{8}{21}$，$\frac{13}{34}$，$\frac{21}{55}$，…的植物，也符合 F 数列。

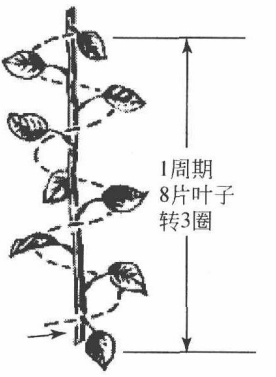


图 4-20　梨树的叶序

其实，不但树木的叶序有上述规律，而且其他植物也有类似规律——只是有的不容易观察清楚，顺逆螺旋的数目也并不固定（但并不随机）而已。例如，莴苣、包心菜、芹菜的叶子，洋葱的层状“鳞片”……

4.4.3　从菠萝到向日葵

1. 菠萝中的奥秘

菠萝又名凤梨——因一端有形似凤尾的绿叶一簇，果实形状像梨而得名，原产南美洲，是许多人喜爱的热带水果。那么，它的不规则六边形的鳞片状表皮（图 4-21），又有什么奥秘呢？

以菠萝底部中心为原点，把竖向中心轴设为 Z 轴，如图 4-22 建立空间坐标系。再以某一个适当的单位长度，量一下菠萝每个六边形鳞片状表皮的中心距离 XOY 平面的距离，并按距离的远近在每一个鳞片上从小到大编上数字（图 4-21）。初看，这些编号杂乱无章，其实不然——细看就会发现规律。

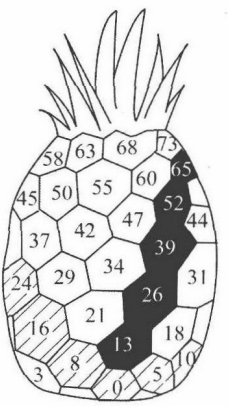


图 4-21

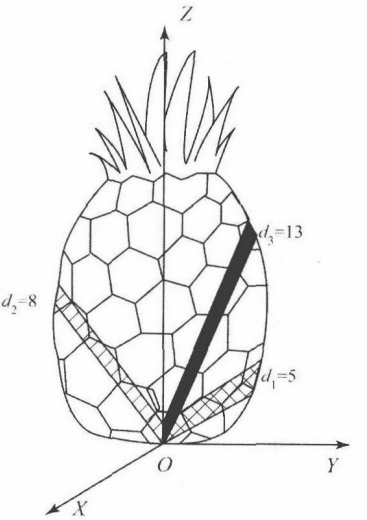


图 4-22

原来，这些鳞片数字沿三个方向构成了三个系统，各自按如图4-22的等差数列方式排列。不但如此，而且与这三个方向平行排列的鳞片也是这样：①1 0，5，10，15，20，…，公差 $d_1=5$；②0，8，16，24，32，…，公差 $d_2=8$；③0，13，26，39，52，…，公差 $d_2=13$。你看，这三个公差 5，8，13 正好是 F 数列的三项。

啊，原来“斐波那契”就隐藏在菠萝表面的花纹之中！

2. 波斯菊中的玄机

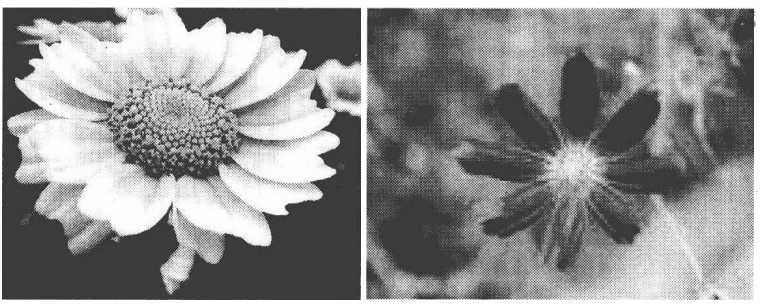
波斯菊又名大波斯菊或秋英、秋樱、帚梅，为菊科一年生草本植物，原产墨西哥。1799 年，一位西班牙神父把它取名为 Cosmos，是希腊文“饰物”或“勋章”的意思，但在英文里正好是“宇宙”。在生

日，人们常用“花语”寄托情感，于是送花就要精心选择。那么，波斯菊的花语是什么呢？是“学术”（science）——这里还有一个“典故”呢。据说，英国牛津的一位尼僧院的院长——圣菲利迪斯卫德对牛津地区和牛津大学的发展都有很大的贡献，可以说是学问的守护神。因此，人们就选波斯菊来献给他，波斯菊的花语就这样成了“学术”。

那么，波斯菊中有什么玄机呢？

著名的英国生物学家达尔文曾耐心地数过一朵波斯菊外沿的花瓣，正好 144 瓣，其中 55 瓣和 89 瓣在形态上有明显差异：一种长丝卷曲向内，一种平展舒放向外；这三个数也正好是 F 数列的三项。当然，由于波斯菊的种类和大小不一定完全相同，所以花瓣并不都是达尔文的那个数目，但都符合 F 数列。

不但如此，波斯菊的花蕊的排列也与 F 数列有关——类似后面要说的向日葵盘的花蕊或籽粒的排列。

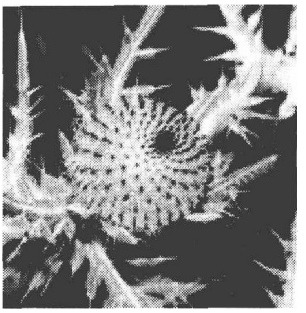


形态各异的两种波斯菊

3. 蓟草花盘的秘密

“剑外忽传收蓟北，初闻涕泪满衣裳……”这是唐代杜甫的诗《闻官军收河南河北》。这里的“剑外”指唐都城长安“以外”即四川剑阁以南的梓州（今三台县）一带。那“蓟北”又是哪里呢？

自西周燕国算起，北京距今已有三千多年的历史。这一带肥沃之地，盛产一种奇异之草——蓟草。尤其是西北隅的山丘，蓟草十分繁茂，人称蓟丘。所以从西周到唐代，北京称为蓟。此外，唐代“燕云十

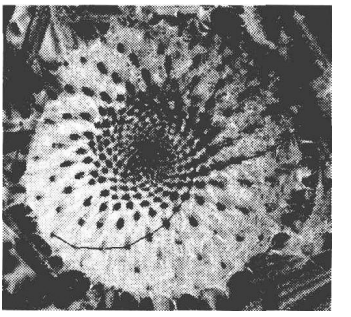


球状的蓟草花

六州”即“幽云十六州”或“幽蓟十六州”中的蓟州（现天津之北燕山脚下的蓟县），也因“蓟”得名。所以，“蓟北”大致就是指今天的京、津、冀的一部分——中国唐代安史之乱时安禄山和史思明叛军的老巢。

蓟草也是苏格兰的国花——它和英格兰的蔷薇、威尔士的韭菜花、爱尔兰的“萨姆劳克”（三叶草或类似的植物），分别是英国（即大不列颠和北爱尔兰联合王国）属下四国的国花。

蓟草花的头部大致呈球形。在蓟草花俯视图上，从中心标出了两条两个不同方向的螺旋：顺时针方向有 13 条，逆时针方向则有 21 条。这 13 和 21 恰好是 F 数列中的相邻两项。当然，由于蓟草花的大小和种类不一定相同，所以这两个方向的螺线数目不一定都是 13 和 21，但都是 F 数列中的相邻两项，也因此把这些螺线统称为“斐波那契螺线”。每一条斐波那契螺线都是黄金螺线——但不是平面的，而是盘旋在花球上的。分布世界各地的蓟草花都是按这种方式生长的——例如有名的朝鲜蓟草。



蓟草花俯视图上的两种螺线

4. 向日葵盘上的螺线

向日葵又叫太阳花、日头花或望日莲。

向日葵被选为秘鲁的国花的原因，是它的向光性——被南美崇拜太阳的印加人视为“神花”，有“印加魔花”的美誉。为什么印加人崇拜太阳呢？在传说中，印加族起源于太阳神在喀喀湖的岛上创建了一个女人和一个男人，并让他们俩结为恩爱夫妻，后来子孙满堂，繁衍成一个种族。再后来，太阳神叫他俩带着子孙们迁居到另一个有发展前途的地

方定居，就成了印加人。所以“印加”在印第安语中的意思就是——“太阳的子孙”。

当然，向日葵的神话、美谈和趣事还不止这些。在希腊神话中，那些因为暗恋太阳神而变成向日葵的女神的忧伤，在中国人的“梁祝情结”之中共鸣。在荷兰著名画家凡·高的画笔下，有在 1888 年创作的名画《向日葵》（图 4-23），现存于伦敦国家画廊。在中国歌星、“十亿个掌声的天籁女王”邓丽君的歌声中，有“谁留意向日葵，已为谁人摘去”的哀怨，让一些人空掬一抔泪水。美国早期拓荒者的摩门教徒，为了让他们的妻儿最终找到他们，就不断在拓荒的路上小心翼翼地撒播向日葵种子，以绽放出花的路标、希望和亲情……

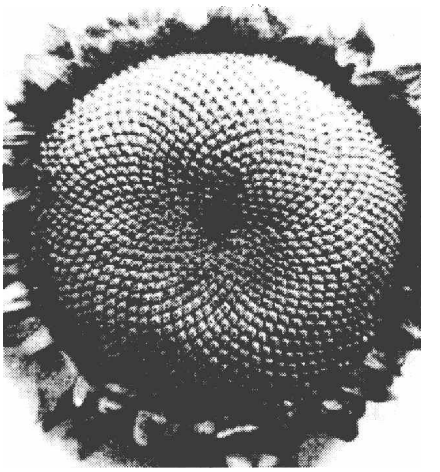


图 4-23

向日葵的种子盘上的籽粒密密麻麻。从图 4-23 可以看到，从葵盘中心辐射出来的两种方向的螺旋线，把葵盘分割为含有籽粒的近似菱形的小块。也就是说，向日葵的籽粒也按螺线排列——一组顺时针，一组逆时针。再仔细数一数，这两组螺线的条数并不相同——这一点常被忽略。令人惊奇的是，两组螺线的条数也是 F 数列中相邻的两项（图 4-24 左）。不过，对不同大小的向日葵，这两种螺线的数目并不相同：小的向日葵有 21 和 34 条；普通大小的有 34 和 55 条螺线，或有 55 和 89 条；大向日葵有多达 89 和 144 条的，甚至还有 144 和 233 条的。

当然，我们知道，这些螺线的每一条都是黄金螺线——大致分布在同一个平面上。所以，黄金螺线也称为“生长螺线”。显然，这些葵籽的前身——许多果花的分布也是这样。

更令人惊奇的是，向日葵花盘上每一朵管状小花或果花上，也有两

条黄金螺线。不但如此，葵盘的外缘两圈花瓣（见图4-23周边）的数目，也分别是*F*数列中的相邻两项——例如55瓣和89瓣！

所以有人说，“斐波那契”“在向日葵生长上体现得最为出色”——管状小花、果花、葵籽、外缘花瓣都与*F*数有关。

那么，自然界还有没有像蓟草、向日葵这样“钟情”*F*数的植物呢？如果还有——甚至很多，原因又是什么呢？

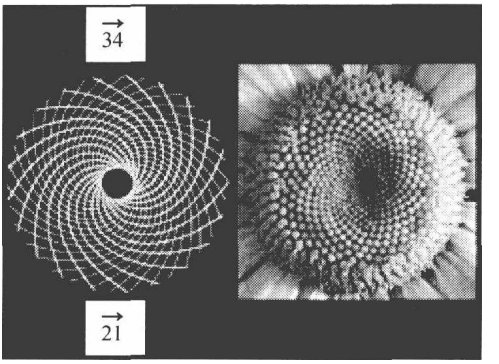


图4-24　向日葵盘上两条螺线数21和34，符合*F*数列

对前一个问题的回答是肯定的，雏菊、翠菊也有几乎相同的形式——任何菊科植物（如波斯菊）的花盘都是如此，只不过也属于菊科植物的向日葵的籽粒和葵盘较大，所以更容易看到和验证而已。此外，某些果实（如松果，见图4-25）、某些花瓣（如瑰和荷花）、某些树枝（如梨树枝）、某些叶片（如柏树）的排列，也有类似的形式。这里提到的松果，它的黄金螺线的数目也符合*F*数列，但每一条螺线却没有像向日葵那样几乎分布在同一个平面上，而是圆锥形地盘旋。有的仙人掌花头也有这类黄金螺线。

对后一个问题，我们将接着回答。在回答之前，我们要披露一个植物体内的“*F*数秘密”。

把苹果的果实横向切开，你将看到一个熟视无睹，但又引人思考的“惊人”现象：内核的种子呈五角星放射状排列。这个“5”，就是*F*数

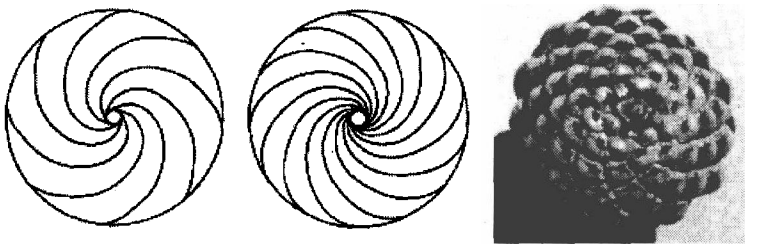
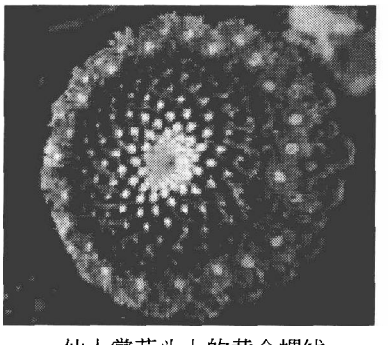


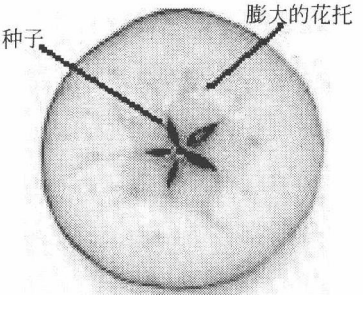
图 4-25　松果上的黄金螺线：顺时针方向 8 条（左），顺时针方向 13 条（中）

中的一员——F_5。

当然，这类研究的历史和文献可列出一大串。在 18 世纪中叶，就有两位数学家研究过冷杉球果的螺线——瑞士的卡兰德利尼和庞内。而在 1872 年，沉迷于数学奇特事物的苏格兰数学家泰特，则利用晶格的几何结构（即平行四边形不断重复的模式），证明了每当某个螺线系统一出现时，就一定会看到其他相关的螺线。这就是为什么我们会在相邻的种子中看到两组螺线的原因。



仙人掌花头上的黄金螺线

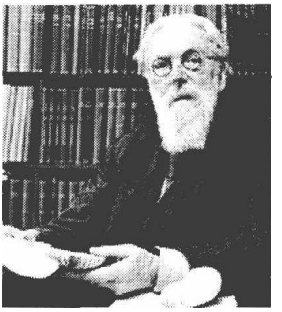


横切的苹果

4.4.4　法国数学家揭开的植物奥秘

从蜜蜂建筑的蜂巢上，人们学到了节约材料的“经济学”，于是生物的形态、如何节约材料，就一直被重点研究。例如，——英国数学家、自然史学家、博物学家达尔西·温特沃思·汤普森爵士就是其中之

一。他在1917年出版的《生长与形态》一书，就用独特的方法来研究生物的形态学问题，也用了相当大的篇幅来说蜂房问题。



汤普森

汤普森被誉为“20世纪最博学的人”。而他的不朽巨著《生长与形态》更是得到广泛赞誉：1960年诺贝尔医学或生理学奖得主、英国医学家梅达沃，称它为“有史以来英语科学典籍中无与伦比的文学作品”；英国－美国生态学家、生物学家哈钦森，则说它是“20世纪少数传世科学著作之一，只要人类文明一息尚存，它将与之同在”。这些赞誉并非言过其实。从研究手法和视野的角度来说，它绕开基因学说、生物化学乃至达尔文的自然选择理论，另辟蹊径，完全从数学和自然界中起普遍作用的力学角度理解生物形态及生长发育；用“变换”来解释同一种属内部的差异——无论是植物还是动物。从写作手法和文采的角度来说，它完美地体现了汤普森在古典文学、数学和动物学等方面的修养；内容涉猎广泛，字里行间回响着历史巨人的警句、格言，闪烁着智慧的光辉。



《生长和形态》的一种中译本

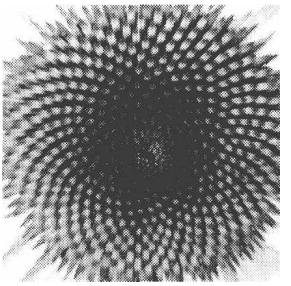
当然，《生长与形态》不仅仅是一本生物的形态学方面的书。例如，5位近现代结构主义大师中的“百岁老人”、在布鲁塞尔出生之后移居巴黎的法国民族学家和语言学家列维－斯特劳斯就读过这本书，并且还用它充实和完善了自己的思想工具。他还认为，德国著名诗人歌德的植物学研究，以及德国著名画家和数学家丢勒4卷本的《论人体比例》一书中，已经有了《生长与形态》所说的“变换”概念的直觉。这里所说的结构主义，起源于19世纪下半叶，是20世纪下半叶最常用来分析语言、文化与社会的研究方法之一。它的鼻祖是“结构主义之父”——出生

在瑞士的语言学家索绪尔。

好，再回到植物奥秘的问题上来。事实上，向日葵盘、蓟草花、波斯菊、松果、菠萝等都符合斐波那契螺旋排列，是因为遵循蜂房那种节约材料的“经济学”。对此，法国巴黎高等师范大学的两位数学家、物理学家伊夫·库代和斯特凡尼·杜阿迪在 1992 年创立了植物生长动力学，给出了迄今为止的最好解释和证明——这种排列使花朵顶端的种子数最多。他们在这一年做的实验是：把磁化的铁磁流体液滴，滴进一个装着硅油、边缘被磁化的盘子中；结果在这些液滴的相互排斥和盘子边缘吸引的双重作用下，这些液滴形成了旋转的斐波那契螺线！至此，植物“知道”深奥螺旋的原因，在科学家们苦苦思索了几个世纪之后得到初步解答。不过，植物为什么具有这种“才能”，倒是一个还没有完全揭开趣味谜题——是亿万年的进化过程中演变成的模样吗？



丢勒

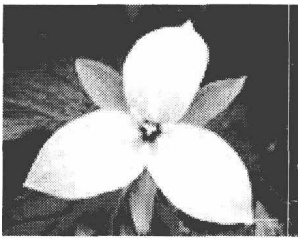


理想完美的向日葵盘

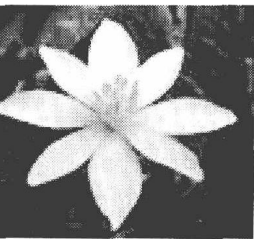
其实，植物的这种“螺线布局”，还能使生长疏密得当、最充分地利用阳光和空气、尺寸长大后只有这种方式才能保持基本形状。于是，包括松树在内的许多树叶，都是沿螺旋前伸分布。当然，受气候或病虫害等因素的影响，真实的植物往往没有那种用电脑绘制的理想完美的斐波那契螺旋。

事实上，许多植物都“懂得”节约材料的 F 数列：三叶草、鸢尾花、百合花、蝴蝶花、延龄草、菠萝花、球花、冬青花、牛眼菊是 3 瓣，金凤花有 3 瓣和 5 瓣，梅花、桃花、李花、樱花、杏花、苹果花、梨花、野玫瑰、蓝花耧斗菜花、飞燕草花和毛艮属植物花有 5 瓣，翠雀花、飞燕草、血根草和翠雀属植物有 8 瓣，金盏草、瓜叶菊和万寿菊属植物有 13 瓣，紫菀属植物有 21 瓣（斐波那

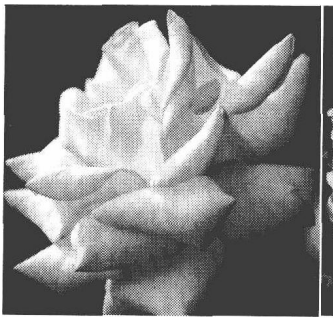
契曾数过的一朵月季花也是21瓣），雏菊属植物为34或55或69瓣……一种重瓣芍药花有233瓣；有人观察了180种球状仙人掌及110种柱状仙人掌，发现其中大约1/3仙人掌“肋”的数目，符合F数。


延龄草

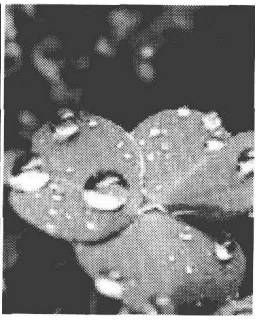

野玫瑰


血根草

这里再次提到的三叶草，还和娱乐与文化有关呢！原来，扑克牌上的“梅花”并非梅花，而是三叶草。在西方，三叶草的3叶分别代表希望、信心和爱情。如果你找到了4叶的三叶草，就会交上好运，得到幸福。西方儿童的一种游戏，就是在野外寻找难找的4叶三叶草——估计每一万株中才有一株4叶的突变型。


月季花


重瓣芍药花


三叶草

不过，生物节约材料的方式多种多样，也存在个体差异——这使它们多姿多彩，以致世界上芸芸众生当中没有两张完全一样的面孔。例如，水稻、小麦、竹子等的秆是空心的——在使用相同的材料时，受弯强度更大而不易在狂风暴雨中倒伏。但是，它们又“空”得不完全相同。此外，有人研究过小麦和水稻等禾本植物的茎节，发现各自相邻两

节之比约为 1:0.618 或 2.472:1（依品种不同而异）。这个 2.472，还是离不开黄金数——$2.472 \approx 4\phi$，而这是否与节约材料有关呢？

4.5　动物与 *F* 数列

蜂的性别非常奇特。蜂王（又叫蜂后或后蜂）是蜂群中唯一有生育能力的雌蜂，每天的主要任务就是不停地产卵。蜂王与雄蜂交配产卵后，绝大多数是受精卵，它们被工蜂（又叫职蜂）孵化后成为雌蜂——其中只有一只因吃的是营养丰富的蜂王浆（又叫蜂乳），才可能成为新的蜂王（在老蜂王死去后才能“继位”）；其余的雌蜂因吃的是营养相对较差的蜂蜜，全部成为没有生育能力的新工蜂，负责采花、酿蜜、筑巢等而劳碌终生。蜂王与雄蜂交配后产出的卵中，还有少数是未受精卵，它们孵化为新雄蜂——与蜂王交配后就被赶出“家门”，不久就客死他乡。我们熟悉的蜜蜂群，就是如此。

那么，一只雄蜂的家系中的祖先的数目，有什么规律呢？由于一只雄蜂只有一个母亲，所以这两代的数目都是 1；而这只雄蜂必有父母，所以上溯第 3 代的数目是 2；这一代雄蜂（即原来那只雄蜂的祖父）仅有母亲，而雌蜂（蜂王）则有一父一母，所以上溯第 4 代的数目是 3。由此推算下去，就得到图 4-26——这一代的数目是 1，上溯第 1 ~ 第 6 代的数目是分别是 1，2，3，5，8，13。

如果继续推算下去，就会发现这只雄蜂和它的祖先的数目，就是 *F* 数列——雄蜂祖先的繁衍也遵循兔子繁殖的规律。

在著名的《达·芬奇密码》一书中，有下面的一段关于雄蜂和雌蜂数目内容。

“等一下，”一名坐在前排的女生说，“我是生物专业的学生，我从来没有在自然界中见到黄金分割。”

“没有吗？”兰登咧嘴笑了，“研究过一个蜂群中的雌蜂和雄蜂的关系吗？”

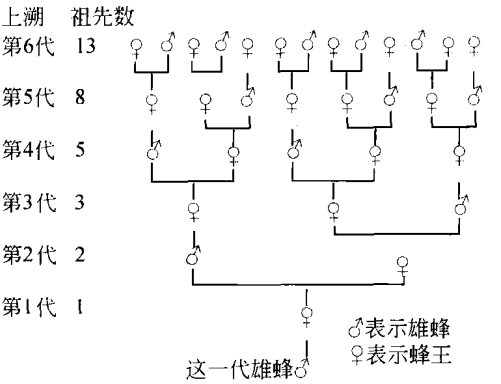


图 4-26

“当然。雌蜂总是比雄蜂多。”

“对。你知道吗？如果你将世界上任何一个蜂巢里的雌蜂数除以雄蜂数，你永远得到一个相同的数值。”

“真的吗?”

“是的，就是 PHI（φ）。”

女生目瞪口呆：“这不可能。”

看来，*F* 数列也可用于对动物的研究。

当然，也有人把高等动物人类与 *F* 数列联系起来——每只手和脚各生 5 指，除大拇指外每指都是 3 节。

最意味深长的是，在人的 DNA（脱氧核糖核酸）双螺旋分子结构中也有 φ——每个双螺旋单位的长和宽分别约 34 埃（1 埃 = 10^{-10} 米）和 21 埃，而 34 和 21 则是 *F* 数列中的相邻两项。

4.6 电子显微镜下的奇观

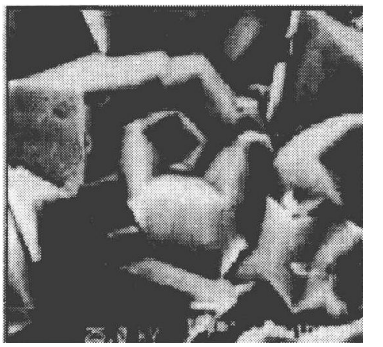
4.6.1 *F* 数列与准晶体

1. 远方来客大驾光临

2006 年 9 月 26 日，西安理工大学第二接待室热闹非凡——一位副

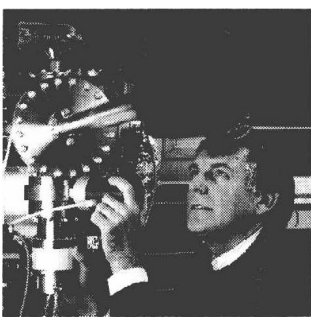
校长在这里接待一位远方来客。他是谁，为什么有劳副校长？

1984 年 11 月，世界著名的以色列理工学院的科学家谢克特曼和卡恩等联合发表论文宣布，他们在急冷凝固的 Al-Mn（铝-锰）合金中得到了一个晶体中的 10 次对称电子衍射图，发现了呈五边形状的准晶体。



电子显微镜下的准晶体呈五边形

这一发现，是谢克特曼在美国国家标准局工作期间的 1982 年 4 月 8 日，用电子显微镜完成的。不过，此时却没有人去企图解释他的发现，甚至一些同事还嘲笑他的 10 次对称性的结果，建议他“再去读一读晶体学教科书”。不过，他不为所动，继续进行实验，又分别在 Al-Fe（铝-铁）和 Al-Cr（铝-铬）合金中也发现了同样的对称性，还用 X 射线和中子衍射得到了相符合的结果。



实验室中的谢克特曼

1983 年 10 月，谢克特曼回到以色列。在他的同事中，只有一位 X 射线专家布利赫相信他的结果，并和他一起用电子计算机进行模拟验证。但他们投寄的论文却被退回——理由是“物理学界不会感兴趣”。1984 年初将论文送到另一家杂志之后，才在 1984 年 11 月发表出来。

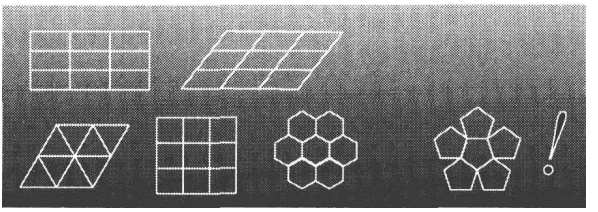
准晶体的发现，最终轰动了科学界。谢克特曼也因此荣获 1999 年沃尔夫物理学奖。

2006 年 9 月，谢克特曼应邀来中国西北工业大学参加亚洲准晶体研究会。26 日，西安理工大学就请他大驾光临——作准晶体的学术报告。

2. 晶体轴次定理和“骡子”

为什么准晶体的发现会轰动科学界呢。这得从“晶体轴次定

理”——晶体的对称轴（旋转轴、反轴、螺旋轴）只有1，2，3，4，6个谈起。这个定理可以这样比方，拼成无缝隙的地板只有用三角形、四边形和六边形——不可能是五边形和七边形等，因此也就不可能有五边形的晶体。而这可以追溯到当年开普勒的“陈年老账”——没有五边形和七边形的雪花。



五边形不能拼成无缝隙的地板

像三角形、四边形和六边形镶嵌的无缝隙地板那样，在人们的眼睛往垂直或水平方向移动时，会出现规则的重复——这被称为“（匀称）周期镶嵌”，否则叫“非周期镶嵌”。数学家们相信，如果一种非周期镶嵌能够用特殊形状做出来的话，那么一种周期镶嵌也能用同样的形状做出来。例如，用直角三角形做出的非周期镶嵌，就可以通过整理成为周期镶嵌。

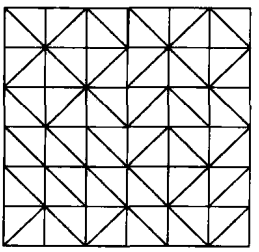
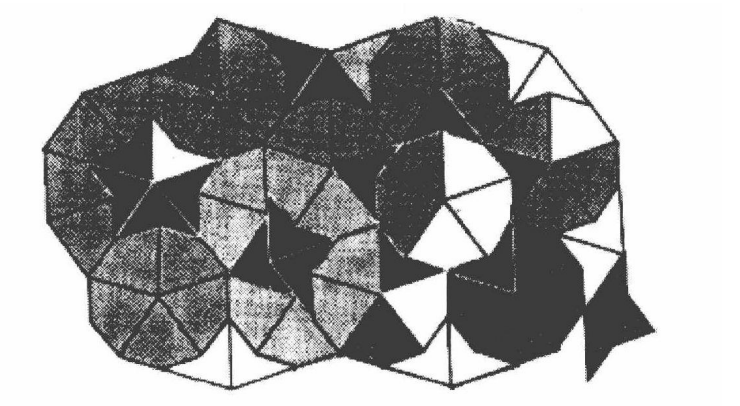


图4-27　用直角三角形做出的非周期镶嵌

然而，在1964年，人们却发现了一套只能用于非周期镶嵌的瓷砖——含有两万种不同的形状。受此鼓舞，人们就开始追求形状数目更少的瓷砖。功夫不负有心人，在1974年，牛津大学著名数学家兼天体物理学家、1988年沃尔夫物理学奖二得主之一的罗杰·彭罗斯，终于发现了一套能产生无数不同的平面非周期镶嵌的瓷砖（图4-27）。这套瓷砖只有两种形状——“标枪”和“风筝”。而它们则由菱形（用“标枪”和“风筝”各一个组成）、φ和黄金三角形等要素构成。



只用“标枪”和“风筝”的非周期镶嵌

除了“标枪”和“风筝”的非周期镶嵌以外，用菱形也可以进行非周期镶嵌——这种菱形由“标枪”和“风筝”结合而成。

这样，罗杰·彭罗斯就从数学上预言了准晶体的结构。而他的“标枪”和“风筝”的镶嵌，也就有了专门的名字——“彭罗斯镶嵌”。彭罗斯镶嵌具有“五折对称”——如果把它复制在一张透明纸上，只要旋转 1/5 圈，就会和原来的图形重合（图 4-28）。

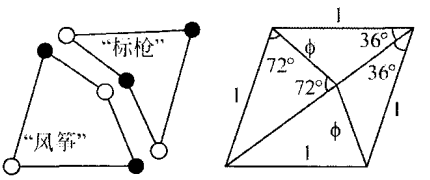


图 4-28　“标枪”、“风筝”构成菱形，体现 ϕ 的黄金三角形

人们知道晶体和非晶体，没想到还有它们“杂交”的“骡子”——准晶体。所以，罗杰·彭罗斯和谢克特曼的发现引起轰动，也就不足为奇了。

准晶体的发现，并没有否定晶体轴次定理，但拓宽了人们对固体结构的认识。

3. 准晶体和 F 数列

人们发现，谢克特曼发现的这种准晶体呈环状分布的亮点在直线方向上，或相间或重叠，而结点的分布令人惊奇——符合 F 数列。

从1974年罗杰·彭罗斯在数学上预言准晶体的结构之后，仅仅过了近10年，就有谢克特曼的实验证实。虽然这一打破传统理论的发现曾遭到非议——例如1954年诺贝尔化学奖（与1962年诺贝尔和平奖）得主、著名的美国化学家鲍林就斥责“准晶”一词是“胡说八道”。不过，“不依古法但横行，自有风雷绕膝生。”——中国清代诗人袁枚的这一诗句，激励着开拓进取的科学家们。例如，中国材料学家、晶体专学家郭可信，就以自己的实验观察结果为依据，批驳了“准晶”实际是“孪晶”的观点；他领导的研究组的有关成果——包括1985年发现的“五重旋转对称”（图4-29），以及Ti-V-Ni（钛－钒－镍）二十面体准晶体（被称为“中国相”），在国际学术界产生过重要影响，得到国内外同行的高度评价。

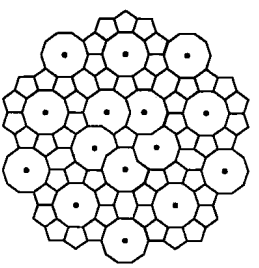


图4-29 准晶体的五重旋转对称结构

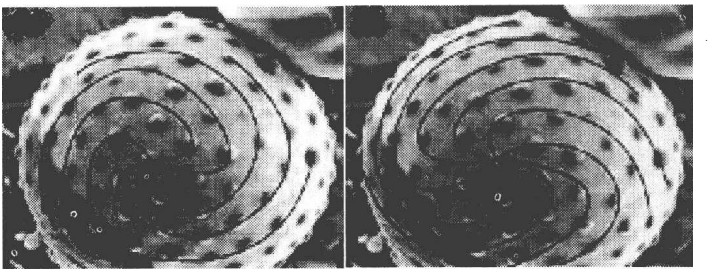
“在科学上，一千位权威也比不上一个卑贱者的充分论据。”对比鲍林的失误与罗杰·彭罗斯、谢克特曼和郭可信等人的成功，证明意大利科学家伽利略这句话的确精彩而经典。而被同事嘲笑的谢克特曼和“物理学界不会感兴趣”的准晶体，则将造福社会并扬名立万！

上述科学家们的新发现，开阔了科学家们的新视野，又一次把传统理论“挑落马下”，实现了创新和超越，也发人深省。那么，我们又可不可以“让翅膀卷起风暴，心生呼啸”去完成下一个创新和超越呢？我们等待着豪情天纵的您的回答！

至今，科学家们已经发现了几百种准晶体，有的已被开发为有用的材料。例如，有一种铝－铜－铁－铬的准晶体，具有低摩擦系数、高硬度、低表面能和传热性，正被开发为炒锅的镀层。又如，一种铝－铜－

铁的准晶体十分耐磨，可用于高温电弧喷嘴的镀层。

4.6.2　中国科学家的“大力神杯”



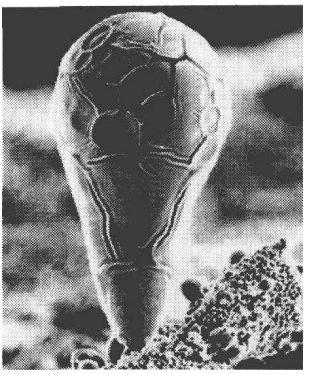
8条顺时针方向螺线　　13条逆时针方向螺线

李超荣等发现的无机材料生成的斐波那契花样

1. “大力神杯”“来到”中国

2005 年 8 月 5 日出版的美国《科学》杂志，发表了中国科学院物理研究所李超荣等 3 位研究员的研究成果：发现了人类第一次用无机材料生成的斐波那契花样。在约 1 000℃的高温条件下，以银为内核、氧化硅为外层，形成了约 10 微米大小的“液滴”。当这个“液滴”冷却时，由于内外两种物质应力分布不均匀，就形成这种花样。用电子显微镜从顺时针和逆时针螺旋数来看，他们观察到了（5，8），（8，13）和（13，21）三组不同的“斐波纳契数花样”。

“在整个过程中，应力是产生花样的唯一驱动因素。这个结果支持了学术界关于叶序学的一个大胆设想。”研究者之一曹则贤说，“它恰恰验证了达尔西·温特沃思·汤普森的设想——这只是一个物理问题和数学问题。”曹则贤还说，这个“设想”，是汤普森作为硕士论文写成、后来成为经典著作的《生长与形态》中的一个假说：有关生物体的许多生长与形状发生的现象，尽管花样繁多，但在本质上必定只是数学问题和物理问题。他们的实验结果，让李超荣等联想到：植物中斐波纳契数花样的发生，可能也是由于同样的原因——为了在一定形状的范围内让应力引起的应变能最小。



微观结构“长出”“大力神杯”

李超荣等的实验结果，成了汤普森设想的佐证。而两位《科学》杂志的审稿人，都惊叹实验结果中“惊人的美”。其中一位说：“在我35年研究细小颗粒及材料科学，包括高温过程及热力学的生涯中，从未看到过如此迷人的结构。”据说，这项研究也是材料学上的重要进展，有望对利用应力工程设计制作各种光子学、等离基元电子学，特别是可折叠电子学所需要的微纳米结构，带来重要启示。

第二年，32个国家为争夺“大力神杯”在绿茵场上拼搏的时候，媒体说李超荣等已经捧走了这个足球世界杯——只能在电子显微镜下才能看到的只有10微米大小的花样，很像大力神杯。

2. 发现准晶体和“大力神杯”的三个启示

像《斐波那契季刊》那样永无休止地研究 F 数列，显然主要是一个纯数学问题——纯数学中的数论问题。

“祝纯数学永无用处!”在一次酒会上，曾是英国数学界领袖之一的哈代有这样一句也许是调侃的祝酒词。

那么，纯数学——甚至整个纯科学是否“永无用处”呢？在回答这个问题之前，首先要回答什么是“有用”和“无用”的问题——莎士比亚有什么用，《红楼梦》有什么用，哥德巴赫猜想有什么用？要回答这类“无穷多”个问题，我们只能用德国诗人海涅于1854年在组诗《拉撒路》中的诗句：“我们不停地问，一次又一次，直到一抔黄土堵住我们的嘴——难道这就是答案吗?”

其实，从发现准晶体到它的开发利用，从“大力神杯”用于材料学，这两个事实都可以看出，纯数学并非“永无用处”——在崇尚“可持续发展”的今天，我们切不可像这位“领袖”那样放弃包括纯数学在内的“基础科研”！这是第一个启示。



海涅

在著名的《自然哲学的数学原理》中，牛顿曾说："自然界不做无用之事，因为它喜欢简单化，而不爱用什么多余的原因炫耀自己。"在准晶体和"大力神杯"上，都有共同的"简单化"——F 数或 F 数列。

那么，在"微观"（和"巨观"）世界中，还有多少未知的这种"简单化"呢？当我们再次发现这种惊人的"简单化"时，又会有什么意想不到的重大突破呢？此时，我们想起了 19 世纪末发现 X 光和放射性之后那激动人心的"向原子进军"的口号。在这个口号下，原子能尽显威力，集成电路从幽雅书斋来到千家万户，电子计算机横空出世并走进寻常巷陌，基因工程"时髦"地摆上我们的餐桌，纳米技术已不仅仅停留在实验室中……因此，在抓"稻谷"、"棉花"和"汽车"、"房屋"的同时，切不可忘记要抓好"另外那一些"，不能停下"向原子进军"的脚步。这是第二个启示。



数学之美无处不在

第三个启示是，数学是美丽的，而且——无处不在。

有感于数学之美，世界著名的美籍华裔数学家陈省身，在 2003 年底制作的向公众普及数学知识的 2004 年挂历，就直截了当地命名为"数学之美"。

正如那两位《科学》杂志的审稿人都惊叹"大力神杯"有"惊人的美"一样，开普勒也说："对外部世界进行研究的主要目的在于发现上帝赋予它的秩序与和谐之美——这些正是上帝用数字语言透漏给我们的。"而美籍匈牙利数学家厄尔多斯对数学之美的看法则更超凡脱俗："数学从纯理论角度看是有序而美好的，这种秩序超越了物质世界。"

4.7 F数列用于艺体和建筑

由于F数列相邻两项之比接近φ，而且数列中的各项都是整数，便于实际操作，所以许多艺术家都在艺术图形中用到它。

图4-30是一种用到F数列的图形——各矩形的宽度依次与F数列的各项对应。这些矩形所有线条形成的线群，构成了一个优美的比例造型——秩序活泼，对比鲜明。用它来构成的各种图形，富于变化，在“构成艺术”中得到广泛运用。

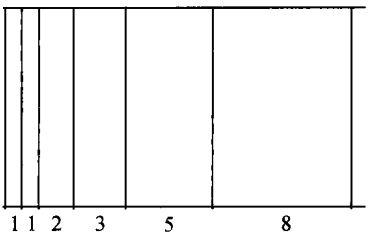


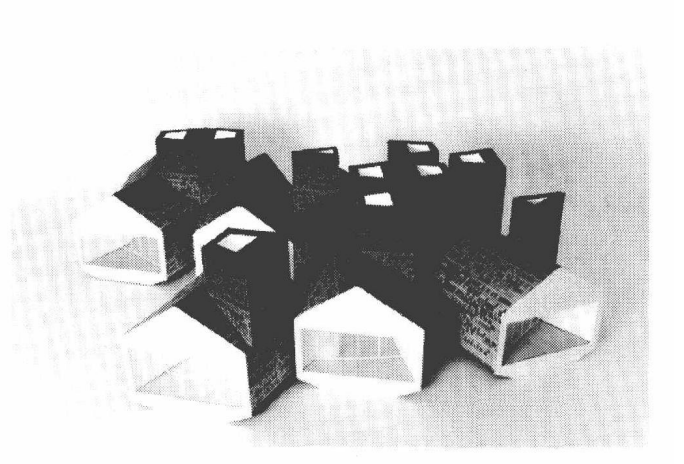
图4-30

人们把F数列用于艺术图形，很有点有意而为的牵强附会，然而自然界的很多现象都符合F数列。这样看来，很多自然现象都包含F数的F数列，既是大自然的“英明”选择，也是人类数学思维的必然结果和在艺术中的一种明智选择。

当然，等差数列、等比数列、“方根矩形数列”等，也可构成优美的比例造型。

在2009年中国的第十一届“全运会”上，火炬最后的点火仪式采用了F数列：火炬手从1人、2人到3人、5人……最后到千人、万人，体现了全民全运和重在参与的理念，更凝聚了所有中国人的爱国深情和民族豪情，显示出“全运会”圣火生生不息并和谐发展。这是F数列用于体育的实例。

F数列还被用于创作诗歌。2006年4月初，美国剧作家格雷戈里·



按照 F 数列展开的“元素屋”

品克斯用 F 数列的方式创作了一首诗，贴在其博客上。这种“F 数列诗”每行的音节数目，必须等于上面两行音节数目的总和，特点是简洁、严谨。据说，品克斯的原诗已被全世界 100 多个网站转帖，跟帖的诗有几千首。不过，一位女性却对他说“莫道君行早”。1981 年，公认的丹麦最重要的实验女诗人、诺贝尔文学奖的有力竞争者克里斯滕森，在她最著名的诗作《字母表》中，也运用了 F 数列。

F 数列用于建筑的实例是“元素屋”。它是一种预制（能提高施工效率）的、能实现“新生态”（描述生物体的发展模式）的模块化房屋，由 MOS 建筑师设计，按照 F 数列展开。

4.8　F 数列的“娱乐无极限”

4.8.1　魔术师的“斐波那契地毯”

1. 卡罗尔的“魔术拼块”

一个边长为 8（个长度单位）的正方形地毯，面积是 64（个面积单位），把它按图 4-31 切成 4 块之后，照图 4-32 拼成一个矩形。但这一拼却使人大吃一惊——面积由原来的 64 变成了 $5 \times 13 = 65$！

这就是卡罗尔的杰作——一个著名的数学“魔术”。冒牌“魔术师”卡罗尔宣称，他发现了一个“一般原理”：几何图形被分割成有限块以后，面积不一定保持不变。

以前见过耍把戏，但没有见过这“卡罗尔把戏”的读者，应当暂停往下看，试着找出其中的“捣蛋鬼”，以锻炼你的智力。

就是卡罗尔的这个“一般原理”，已经被用来创作诸如此类图形的“分割悖论”——或者叫“拼块悖论”、“拼图悖论”。由于图4-31貌似似棋盘，所以又叫“棋盘格悖论”。

那么，这个“棋盘”变化后，面积为什么会多出1呢？

我们还是用“放大镜”来看一看吧。

把图4-31和图4-32分别放大成图4-33和图4-34，并进行对照，你就不难看出卡罗尔的“阴谋诡计”了。

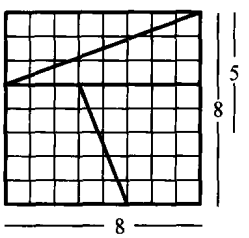


图4-31

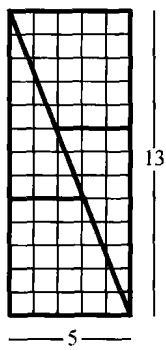


图4-32

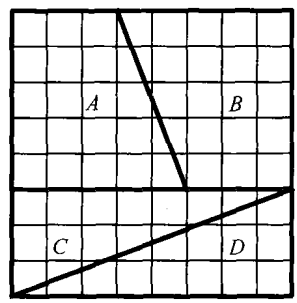


图4-33

原来，卡罗尔故意把图画得较小，而且线条很粗，以便在图4-32中把图4-34中间那块两头尖的“空地”——实际是一个狭长的平行四边形，“偷梁换柱”成粗大的“对角线”的中段。

啊！明白了，原来图4-32之所以多出面积1，是因为加了图4-31原来并没有的“空地”——它的面积刚好是1！

从图4-31可以看出，8被分成了3和5——为什么不是其他数

字呢?

由此思考，这里提出 3 个问题：为什么卡罗尔偏偏要选择边长是 8 的正方形来演这个把戏呢，8 为什么要被分成了 3 和 5（我们很“眼熟”的三个数）呢，边长是其他数值的正方形或者其他图形又可不可以演类似的把戏呢?

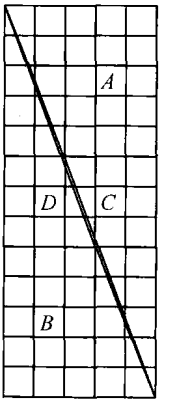
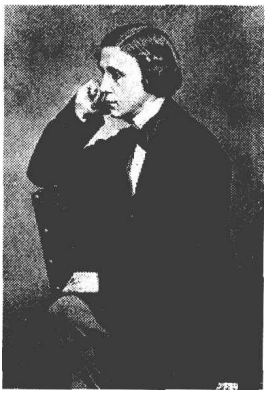


图 4-34

还是歇一会儿吧——我们接下来将陆续回答这些问题。

卡罗尔（笔名）是一位英国作家、数学家、逻辑学家和摄影家——真名叫查尔斯·勒特威奇·道奇森。他的姐妹篇经典童话大作《爱丽丝漫游奇境记》与《爱丽丝镜中奇遇记》曾风行于世。其中前者被改拍成 3D 电影《爱丽丝漫游仙境》，于 2010 年 3 月初在北美公映以后，风靡全球，曾在 3 月下旬抢滩中国。


卡罗尔

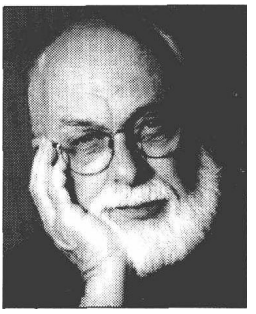
2. 兰迪的“魔术地毯”

在回答上面的 3 个问题之前，我们来看一看另外一位“资格”魔术师的冒牌“魔术”表演。

“我的朋友，我想请您把边长是 13 的正方形地毯分成 4 块，再把它们缝合在一起，成为长 21、宽 8 的地毯。”一天，出生在加拿大的美国魔术师詹姆斯·兰迪对地毯匠奥马尔说。

“很遗憾，”奥马尔两手一摊，双肩一耸，回答说，“兰迪先生，您是伟大的魔术家，但是您的算术实在太差了！$13\times13=169$，而 $21\times8=168$，这怎么可能呢?”

“我亲爱的奥马尔，我——伟大的兰迪是从来不会错的。就劳驾您按图中的 3 条粗线把它裁成 4 块吧。”（图 4-35）啊，原来兰迪早已成



兰迪

竹在胸。

奥马尔照兰迪的吩咐把地毯剪成4块以后，重新摆放成了图4-36的样子。

你看，奥马尔“魔术”般地把图4-35变成图4-36之后，面积由169变为168——又是减少了1！霎时，奥马尔目瞪口呆。

这个有趣的故事，曾刊登在美国著名的《科学美国人》科普杂志上。

这里，我们还注意到图4-35中的13是按8和5来分的——这三个数我们也很“眼熟”。

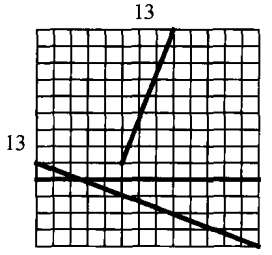


图4-35

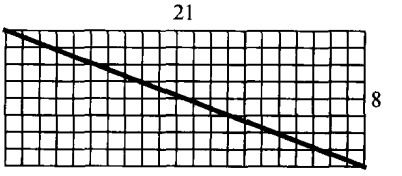


图4-36

3. 斐波那契指挥“魔术地毯”的旋律

我们再把卡罗尔和兰迪的“魔术”推广一下——分别减小边长和增大边长。

把卡罗尔的地毯边长减小到5（分为2和3）就得到图4-37和图4-38的结果——面积减少1。请注意这两个图中的5，3，2这三个数字。

把兰迪的地毯边长增大到21（分为13和8），就得到图4-39和图4-40的结果——面积增加1。也请注意这两个图中的21，13，8这三个数字。

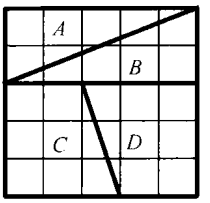


图 4-37

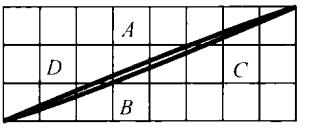


图 4-38

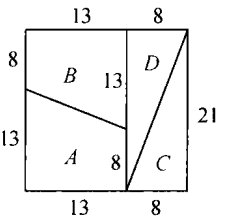


图 4-39

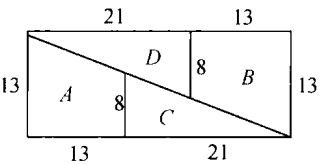


图 4-40

当然，我们还可以继续增大地毯的边长来研究。

好，有了前面的数据，规律就得出来了：

对边长是 5 的正方形，按 2 和 3 来分，可拼成 3 × 8 的长方形，面积减少了 1，减少了 4.0%；

对边长是 8 的正方形，按 3 和 5 来分，可得到 5 × 13 的长方形，面积增加了 1，约增加了 1.6%；

对边长是 13 的正方形，按 5 和来 8 分，可得到 8 × 21 的长方形，面积减少了 1，约减少了 0.6%；

对边长是 21 的正方形，按 8 和 13 来分，可得到 13 × 34 的长方形，面积增加了 1，约增加了 0.2%；

……

从这个规律可以看出以下两点。

（1）在玩这类“魔术”时，为了尽可能避免漏出“破绽”，应选择边长较大的“F 数正方形”。例如，图 4-36 中的缝隙就比图 4-34 的要

小。这里所说的“破绽”，就是指这种“空缝隙”，或者像图4-38那样的“重叠缝隙”。

（2）我们始终在和2，3，5，8，13，21，34，…这些数为边长的图形打交道；而且，不管正方形的面积大小，由它变成的长方形面积都是减少（或增加）1。那么，这奥妙在哪里呢？在F数列——因为它的一个奇妙性质$F_{n-1}F_{n+1}=(F_n)^2+(-1)^n$（$n\geqslant 2$）（我们提到过的卡西尼公式）。例如，在兰迪的地毯中，$8\times 21=13^2+(-1)^5$。所以，这样的“魔术地毯”有无穷多个——完全能铺满大地。

由此看来，“魔术师”之所以有“魔术地毯”，“全靠”斐波那契。所以我们说，这类拼图悖论的主角是斐波那契，后人按他当年的固定“旋律”，在表演着一个个大同小异的“魔术”……

当然，这类“魔术”的发明人并不是斐波那契，也不是卡罗尔，而是出现于斐波那契之后600多年后的1868年——在雷普芝格出版的一份数学杂志上。

这时，前面那3个问题中的前两个就可以由读者——你来回答了。而且，你也可以按斐波那契的“旋律”来“演唱下一曲”——分割边长是34的正方形（面积1 156），看是否得到面积是$21\times 55=1\ 155$的长方形。此时面积减少1，即约减少了0.1%。

任取两个数（如2，4）相加后得到后一个数，并依此加下去，就得到一种“仿F数列”的“山寨版”：（2），（4），6，10，16，26，…。如果也用它们玩“魔术地毯”，就会多得或丢失4个单位面积。如果用数列（1），（3），4，7，11，18，…玩“魔术地毯”的“得”或“失”，则是5个单位面积。不过，由于这种玩法有“风险”——拼接前后面积相差较大，所以也应选取边长较大的“仿F数正方形”。

4. 另一种玩法

卡罗尔的魔术的另外一种玩法是，把图4-41左边面积为64的正方形地毯分割后按右边的图拼接，就会发现面积只有63——比原来少了

1！怎么会呢？

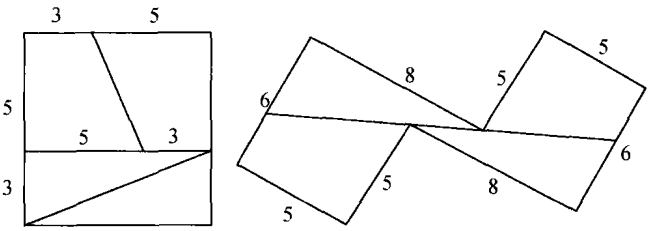


图 4-41

其实，只要实际动手分割和拼接，就会发现其中的奥秘。原来，右图中间那条最长的线有重叠的部分——重叠的面积正好是 1。当然，你也可以通过计算得到这个结论。

当然，这种玩法也“听”斐波那契指挥。

5. “魔术地毯”的启迪

“魔术地毯”不但好玩，而且给了我们深刻的启迪。

在苏联学者杜布诺夫于 1953 年出版的《几何证明中的错误》一书中，就引用了图 4-31 与图 4-32 所示的图形，来作为说明注意力和几何证明的联系的例子。由此可见“魔术地毯”问题会给我们带来非同寻常的启迪。

那么，是什么启迪呢？

“有意义的不仅是注意力的程度，而且是起着更重要作用的注意力倾向哪里。”另一位苏联学者乌耶莫夫在 1958 年出版的《逻辑错误怎样妨碍正确思维》一书中说，“幻术家和‘魔术家’都深知这一点。他们的成功决定于他们怎样引导观众的注意力从一些细节集中在另外一些细节上。”对此，我们在对比看了魔术表演和其后的“揭秘”之后，一定深有体会。

兰迪出生在加拿大多伦多市，1987 年成为美国公民，是一位世界著名的魔术大师。人称“神奇的兰迪”，同时也是作家和演说家。自从发现有些人打着“特异功能”的幌子四处招摇撞骗后，他就高擎反伪

科学大旗，到世界各地巡回演讲，现场揭穿“特异功能”等的骗局，曾悬赏100万美元征集“特异功能”现象，但至今没有碰到对手。由此看来，他也在不遗余力地告诫人们，应随时警惕“起着更重要作用的注意力倾向哪里”。

其实“转移注意力”已经成为一种被普遍运用的计谋。军事家、政治家要用到它，小偷、骗子也要用到它。所以，要“借我一双慧眼”把这世界“看个清清楚楚、明明白白、真真切切”。这是第一个启迪。

一个著名的“注意力倾向”不当引出失误的平面几何实例是，按图4-42画任意△*ABC*各内角平分线和各边中垂线，“就能证明”△*ABC*是正三角形。这个“证明”的提示是，证明三组小三角形各自全等之

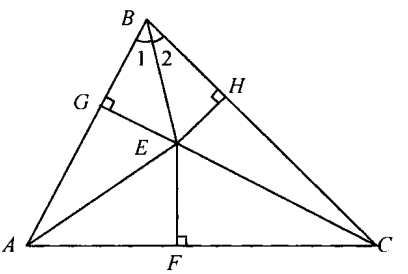


图4-42

后，再把对应边相加。1984年，普利高津和斯唐热合写了一本著名的书——《从混沌到有序：人与自然的新对话》（原1979年法文版《新的联盟》的英文增订版）。“热力学诗人”普利高津教授，是出生在俄国的比利时物理化学家、1977年诺贝尔化学奖得主（因创立热力学中的耗散结构理论），斯唐热博士是他的学生兼同事、法国－比利时女哲学家、化学家。1980年出版名著《第三次浪潮》的美国未来学家、社会思想家托夫勒，在为《从混沌到有序》所写的前言中说：“在当代西方文明中得到最高发展的技巧就是拆零，即把问题分解成尽可能小的单位。我们非常擅长此技，以至我们竟时常忘记把这些细部重新组装到一起。”借此来看，“能证明任意三角形都是正三角形”的失误，除了

“注意力倾向”不当之外，还有“拆零”时忘了注意“全局”。事实上，任意三角形的 E 点，根本就不在三角形内，而是在三角形外。由此得到的启发是，我们在念念不忘“细节决定成败”而“低头拉车”时，还要“眼观六路、耳听八方”而“抬头看道”！

自幼聪慧、才智超凡的明代绍兴才子徐渭“并吞六国”的故事，很能说明“拆零”不忘“全局”的思维和智慧。一天，有六位比徐渭年长的文友，事先约好要捉弄少年徐渭。七人饮酒时共摆上六个菜，规矩是按年龄从大到小的顺序行酒令，每个酒令要说一个和菜有关的典故，才能吃这个菜，否则不能吃。在文友们依次分别说出“姜太公钓鱼”、“时迁偷鸡”、“张飞卖肉”、“苏武牧羊”、“朱元璋杀牛”和“刘备种菜”的典故之后，已经没有菜了。正当他们说“酒令行过，各吃各的”，准备大快朵颐时，徐渭不慌不忙：“且慢！我还没有说呢。”接着两袖一拂，说：“秦始皇并吞六国。”一下子就把六个菜都移到自己面前。这六位文人先是怔了一下，接着连连赞叹：“佩服！佩服！”

另一个著名的实例见图 4-43——A 图的三角形被切割成 4 块拼成 B 图之后，怎么在下边多出一块空洞呢？在 1961 年 5 月的《科学美国人》杂志上，美国“数学游戏大王”马丁·加德纳给出了这样一个奇怪的图形。从这个例子可以看出，和正方形一样，其他图形也可以“演类似的把戏”。

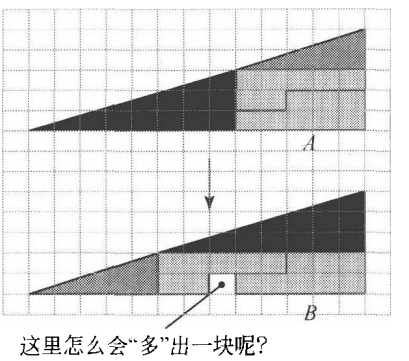


图 4-43

这两个实例，作为献给读者锻炼注意力和思维的脑力体操。

如果你不能完成第二个脑力体操，就请从下面的题目中得到启发吧！图 4-44 右边的“正方形”，是由左边的正方形分割成 5 块拼合而成的。但是，右边的“正方形”的正中却多出了 1 个边长为 1 的小正方形的孔！

这个奇妙的事实以“卡瑞正方形”的名字为大家所熟知——它的

发明者是一个名叫保罗·卡瑞的美国业余魔术师。这种悖论还具有好几种其他表现方式，图4-43的卡瑞三角形也是其中之一。要想探讨卡瑞正方形或卡瑞三角形的奥秘吗，请阅读马丁·加德纳所著《数学，魔术和奇迹》一书的第八章，以及《科学美国人》杂志中的《数学新分支》一书的第十一章吧！而这位加德纳也是世界上最有名的卡罗尔研究专家——因为他在1960年出版了名著《注释版爱丽丝》，完成了对卡罗尔的《爱丽丝漫游奇境》的出色研究。

其实，要揭开卡瑞正方形的奥秘并不难。准备两个图4-44左边那样

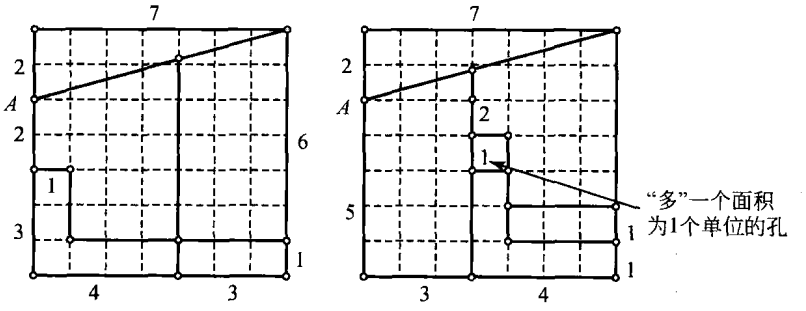
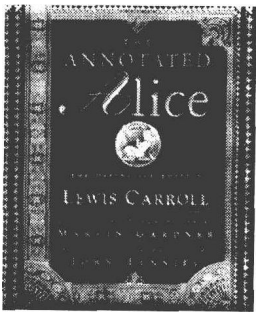


图4-44

的正方形，其中一个按图中的尺寸精确地剪成5块，再把它们拼成右边那个正中带正方形孔（边长为1）的“正方形”。最后，把拼成的带孔“正方形”覆盖在未经剪切的正方形上。这时，你就会发现带孔的“正方形”实际上是个长方形，比正方形高出1/12——底部多出一个$12\times1/12=1$的长方形窄带，其面积恰好与带孔的“正方形”正中的孔洞面积一样。而“正方形”高度增加的秘密在于：它的直角三角形斜边上那个顶点A并不在整数网格点上，而左边的正方形上那个顶点A则在整数网格点上！类似的方法可以揭开图4-43的秘密，而图4-42的秘密在于E点的位置。



《注释版爱丽丝》封面

于是，我们用华罗庚的明断作为第二个启迪：“数缺形时少直观，形少数时难入微。”

4.8.2　钢琴键盘上的 *F* 数列

美国学者帕帕斯在《数学趣闻集锦》中，记录了“钢琴键盘上的斐波那契数列”：“如果我们广为搜寻，那么有时我们有时还会发现，斐波那契数竟会出现在一些特殊的对象中，就说一台钢琴，在一个音阶中白色的键数为 8，黑色的键数为 5，这不正符合前面讲到的情形吗？莫非它是斐波那契数列触及的又一个领域？”

图 4-45 中的钢琴键盘，虽然只画了一部分，但的确在一个音阶中有 8 个白键（从 C 到 C，跨 12 个“半音”）和 5 个黑键。那么，钢琴键盘上的这两个 *F* 数意味着什么呢？

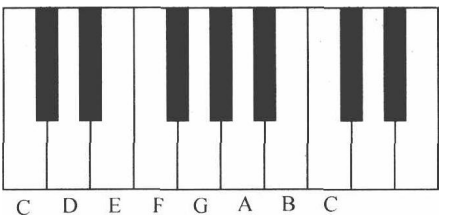


图 4-45　钢琴键盘上的斐波那契数

有趣的是，钢琴键盘上从 C 到 C 的这种白黑相间的排列，正好是 1 只雄蜂上溯第 6 代祖先们共 13 只蜂的排列（图 4-46）！这一点，可参见 4.5 节。

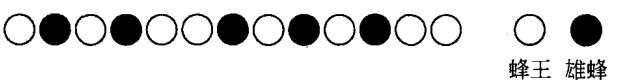
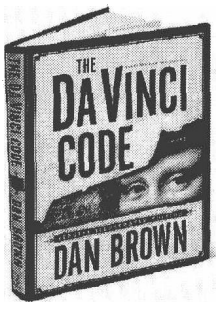


图 4-46　排列似琴键：1 只雄蜂上溯第 6 代祖先的 13 只蜂

4.8.3　《达·芬奇密码》中的 *F* 数列

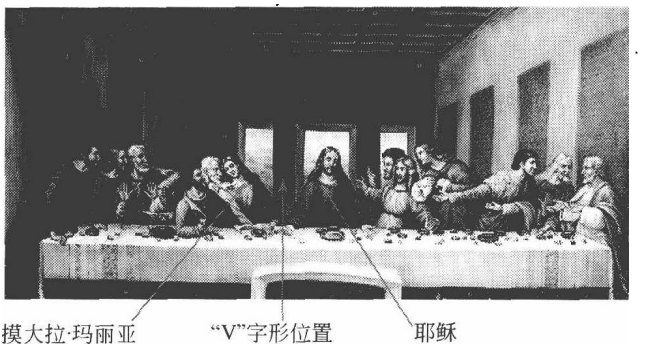
在 2006 年到 2008 年间，一本“密码”曾轰动一时。它就是 2003



《达·芬奇密码》

年3月18日由兰登书屋出版的小说《达·芬奇密码》。索尼旗下的哥伦比亚制片公司把它改编成同名好莱坞大片，于2006年5月19日在全球同步上映。由于电影的热播，这本小说旋即风靡全球。

在《达·芬奇密码》中，开场时卢浮宫馆长雅克·索尼埃临死前留下了一串数字：1，1，2，3，5，8，13，21，34，…。不用说，这是 F 数



《最后的晚餐》中的“V”字形

列。后来，他又将身体摆成的维特鲁维人图案。这本书也谈到基督教认为的“异教徒”符号——古老宗教中代表宇宙和谐之美的五角星。这本书还谈到《最后的晚餐》中出生在今巴勒斯坦的、象征基督教的创始人耶稣和他的妻子摸大拉·玛丽亚之间象征圣杯图案的“V”字形（象征圣杯）位置。而他们的坐姿，也形成一个巨大而完美的“M”形轮廓——代表婚姻（matrimony 中有 M）或摸大拉（Magdalene 中有 M）。这些内容，都无一例外诠释了 φ——大自然最为神秘的“达·芬奇密码”。

4.8.4 “仿 F 数”的“怪蛋”

“朋友们，请任意挑选两个数，较小的排在前面，较大的横排在后

面，”魔术师对观众说，“把它们相加，就得到另一个新数，把这个新数横排在较大的数后面。再把新数和与它相邻的数相加，又得到第二个新数……如此继续——就像 F 数列中的数等于前面两个数之和那样。”

“排好了！”观众们陆续回答。

“请用一条竖线把任意两个数隔开，并算出这条线之前所有的数之和，再加上第二个数。”等所有观众都排好之后，魔术师说，“只要把这两个数告诉我，我就知道这条竖线之后的第二个数是多少。”

……

“和是 318，第二个数是 4。”一位观众抢先发言。

“318 + 4 = 322。”魔术师立即回答。

“啊！这么快。”观众们惊讶不已。

“拿出来看，”魔术师说，“让我们共同来检验吧。”这位观众拿出任意挑选的两个数是 3 和 4，于是得到 3，4，7，11，18，29，47，76，123，｜199，322，511，…。

大家一看，这条竖线之后的第二个数，果然是 322！

那么，魔术师怎么知道这条线之后的第二个数是观众所告诉的那两个之和的呢？

原来，这是 F 数和“仿 F 数”（像这位观众所排的数那样）的一个性质。下面给予说明。

设所挑的两个数为 a，b，显然后面的数就是 $(a+b)$，$(a+2b)$，$(2a+3b)$，$(3a+5b)$，$(5a+8b)$，$(8a+13b)$，｜$(13a+21b)$，$(21a+34b)$，$(34a+55b)$，…。这条线之后的第二个数是 $(21a+34b)$，恰好是这条竖线之前的所有数之和即 $[(a)+(b)+(a+b)+(a+2b)+(2a+3b)+(3a+5b)+(5a+8b)+(8a+13b)]$ 与第二个数 b 之和。

通过这个“魔术”，我们可以看到形形色色的“仿 F 数”（包括我们说过的 L 数和 P 数）都有这样的性质，真让人不可思议！于是，我们把这个性质称为“怪蛋”。



哥德尔

“逻辑有时生出怪蛋。”法国科学家庞加莱这样说。其实，在数学史上，逻辑生出的“怪蛋”还非常之多：古希腊数学家希帕索斯发现无理数$\sqrt{2}$，对于毕氏学派的“数只有自然数和正有理数两种”是“怪蛋”；牛顿用不严密的推理得到正确的微积分结论，也是“怪蛋”；英国数学家罗素提出的“理发师悖论”还是“怪蛋”……

虽然这些“怪蛋”和千奇百怪的“仿F数”的上述“怪蛋”不同，然而，我们对待它们确应“一视同仁”——想一想，再想一想，切莫把“婴儿”扼杀在“摇篮”之中！

要知道，在希帕索斯、牛顿、罗素生出那三个“怪蛋”之时，就分别引出了三次“数学危机”。而克服这些“危机”之后，数学就高歌猛进；而且20世纪又有了新的“危机”——例如奥地利数理逻辑学家哥德尔证明的“不完全性定理”，就意味着“任何所谓严密的形式体系，都不是天衣无缝的”。

4.8.5 火柴游戏稳操胜券

在中国古代，有一种用筷子来玩的“筷子游戏”，19世纪传入欧洲后用火柴代替，成了“火柴游戏”，被“老外”称为“尼姆”（Nim，“机智”的意思）游戏。

一种“尼姆”的玩法是，两人轮流从一堆火柴中取出至少1根火柴，甲方先取的数量不限（但不能一次取完），乙方后取的数量不得超过甲方所取数量的两倍，然后甲方再取的数量不得超过乙方刚取数量的两倍，如此继续，谁取到最后一根，谁就获胜。这种玩法叫“斐波那契尼姆”。美国著名计算机科学家高德纳在他的名著《计算机程序设计艺术》中，就提到过斐波那契尼姆。

我们用总共8（第6个F数）根火柴，让对方先拿，来说明玩斐波

那契尼姆的取胜方法。

按照游戏规则，对方不能把 8 根一次取尽，只能拿 7，6，5，4，3，2，1 根中的某一种。如果对方如果拿 5 根，那么自己就把剩下的 3 根全部拿走。由于最后一根包括在内，所以自己马上就赢了。

于是对方考虑了一个“比较好的办法”——第一次只拿 2 根，这时自己不能一下子就取胜（因为只能拿 1，2，3，4 根中的某一种）。那么，自己又将如何应对呢？此时，自己应拿 1 根，使剩下来的火柴是 5 根——注意，5 是一个比 8“小一号”的 F 数，即“下了一层楼”。接下来，对方只能拿 1 根或 2 根：

（1）如果对方拿 1 根，自己也拿 1 根——此时还剩 3 根（依然是 F 数）。接下来，对方不管拿 1 根或 2 根，自己都能全部拿走而取胜；

（2）如果对方拿 2 根，自己就拿 3 根而取胜。

当然，读者还可以分析对方第一次拿 7，6，4，3，1 根中的某一种时，自己的应对方法——要么能全部拿走（对方拿 7，6，4，3 根的某一种时），要么始终使剩下来的火柴数始终是 F 数（对方拿 1 根时）。

这就是说。通过这种“层层下楼”（始终使剩下来的火柴数是 F 数）的方法（这叫掌握了“奇异局势”），就可以稳操胜券。

显然，这种稳操胜券要有 3 个条件：火柴总数是 F 数（但不小于 2），对方先拿，自己知道制胜的方法。如果不是这样，就不一定稳操胜券了。当然，如果对方不知道诀窍的话，那么自己不论先拿还是后拿，都可以取胜。如果双方都懂得诀窍，那么就取决于双方开局时的火柴数和谁先拿。

高德纳在他《计算机程序设计艺术》中问道：如果开局时有 1 000 根火柴。那有没有什么窍门可以使先拿的人稳操胜券？由于 1 000 不是一个 F 数，但是按照 F 数列的构成规律，不难算出 1 000 前面的 F 数为 987：由…，55，89，144，233，377，610，987 得到。

按照上面的方法，先走的人只要拿掉 13 根火柴，使得剩下的火柴根数为 987 根，然后“层层下楼”，就能稳赢。

1907年，荷兰数学家威索夫发明了另外一种类似而不同的斐波那契尼姆：有两堆火柴（数量可等可不等），两个人轮流从某一堆或同时从两堆中取出同样多的火柴，每次至少取1根，也可多取（数量事先约定），最后取光者得胜。它被称为威索夫游戏或威索夫博弈，也是其中懂得“F数诀窍”而掌握“奇异局势”的人获胜（如果双方都懂得诀窍，则获胜者取决于双方开局时的火柴数和谁先拿）。

当然，斐波那契尼姆还有多种——例如火柴有三堆。

4.8.6 颜色调配与F数列

在自然界中，有无数不同的颜色——据说，一般人的眼睛可直接分辨100多种颜色，如果有不同颜色的相互衬托，有经验的人可分辨13 000多种颜色。但是，画家（或油漆工等）手中却只有几十或上百种颜色的颜料，那么他们又是用什么办法来得到“五彩缤纷”的呢？

红、黄、蓝三种颜色，被称为绘画中的“（颜料）三原色”即“一次色”——画家们就是用这三原色，通过绝妙的“混色原理”调配出所需颜色的。例如，红色与黄色混合，调出橙色（称为“间色”或“二次色”）；红、黄二色所占的比例不同，呈现出橙色的深浅就不同。显然，为了调配出一种间色所使用的两种原色是不等量的。

画家们习惯采用的调配比例往往是：黄3∶红5→橙8（即3份黄色+5份红色混合成8份橙色），或者黄3∶青8→绿11，青5∶红8→紫13。这个调配比例正好符合F数列。为什么会按这个比例呢？据说，这样调出来的颜色比较合适、自然，看起来给人一种美感。当然，三种原色的混合，两种间色的混合，原色与黑色的混合，间色与黑色的混合，原色与其补色的混合等等要产生美丽的复色，其比例更为复杂。但是，据说只要找出各自的符合F数列的比例来，就不难达到令人满意的程度——这个结论是否正确，还需要大量实践来检验。

4.8.7 神奇的5

“一个一般的5次代数方程，没有根式解。”这个数学家们花了300

多年都没有得到的成果，刊登在 1826 年第 1 卷的《纯粹与应用数学杂志》（1826 年创刊，是世界上至今仍在发行的最早的数学期刊）上。而它的最早发现者，仅仅是一个不起眼的“小青年”阿贝尔——发现和发表时，分别年仅 22 岁（此时是大学生）和 24 岁，真是“自古英雄出少年”。从此，我们知道：5 次以下的一般代数方程有根式解，而不小于 5 次的一般代数方程没有根式解。

那么，“没有根式解”的代数方程，为什么次数的起点是 5 这个 F 数而不是 4 或者 6——又有没有“玄机”呢？



阿贝尔

当然，这位挪威数学家的数学成果远远不止这点——例如创立椭圆积分理论等，“足以让后世的数学家们忙碌 150 年”，以他的名字命名的数学名词达到 20 多个。

事实上远不止 150 年——人们一直“忙碌”至今，例如研究“阿贝尔群”的国际会议，至今依然定期召开。

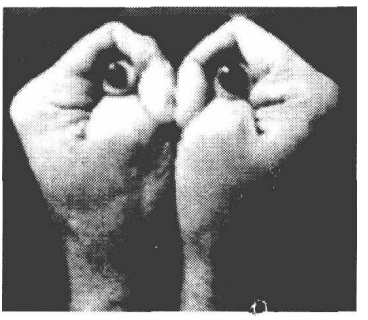
1829 年 4 月 6 日清晨，贫病交加的阿贝尔凄凉悲惨地离开人世。3 天以后，一封信到了，信中附有柏林大学请他担任数学教授的聘书——而在此前，他用两年时间游历了德国和法国，宣介他的新成果、希望得到数学权威们的认同，得到的却是多次冷落……

“天尽头！何处有香丘？”想起《红楼梦》第二十七回中《葬花辞》的这一哀问，对阿贝尔这颗耀眼数学新星的过早陨落，我们要多说两句话。

第一句是：“劝君不用镌顽石，路上行人口似碑。”2001 年 8 月 5 日，挪威政府宣布从 2003 年起，每年 6 月 3 日前后在奥斯陆颁发“阿贝尔奖”——也是必须“忙碌”的一件大事。设立阿贝尔奖，既纪念了仅“三九”就英年早逝的阿贝尔诞生 200 周年，也弥补了菲尔兹奖奖金少、获奖人数少和只限于纯粹数学的不足，真正成了和诺贝尔奖媲美的科学界最高奖。

第二句是："对阿贝尔的早逝，数学权威们负有一定的责任。"他们无数次冷落阿贝尔的事实表明，科学权威不一定是评价、发现、培养科学人才的权威——尤其是权威们评价陌生的新领域时……

也许更有"玄机"的是，5正好是最小的两个素数2和3的和。而2和3不但是F数的相邻两项，而且分别是自然对数的底e和圆周率π"取整"（[e] =2和[π] =3）之后的和，还是一对最小的"素数双胞胎"——孪生素数。当然，在数学上，还有5点确定一条平面上的圆锥曲线，5阶以下的有限群一定是可交换群……



握紧的拳头呈五边形

不过，有些5也许没有"玄机"，算盘的1枚上珠代表5——十进制的"10"的一半，算起来很方便。华人统计选票（或其他场合）时，喜欢画"正"字来代表5（票）。这样做的原因，除了容易书写以外，更重要的是我们常用十进制。

包括人在内的一些生物的指头、海星肢体的分叉数都是5，我们说过的某些花的花瓣数、海胆形状的多边形边数、苹果内种子的伸展方向数，也是5。人有五官和五脏六腑。甚至人把拳头握紧时，呈现的多边形的边数也5。

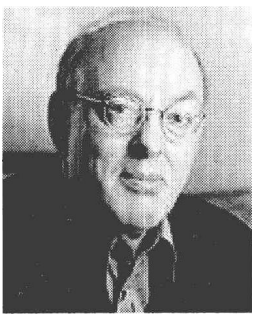
在中国的成语中，有5的成语比比皆是：学富五车、五湖四海、五洲四海、五彩缤纷、五昌其世、五日京兆、五体投地、五方杂处、五花八门、鼫鼠五技、折腰五斗……有关词语也多如牛毛：五子登科、五福临门、九五之尊、十恶五逆、三纲五常、五谷丰登、五马分尸……

在西方人玩的塔罗牌（由22张图画牌即大阿卡那牌和56张数字牌即小阿卡那牌组成）中，就用五角星花色来象征女神。在《达·芬奇密码》第二十章中就有这样的描写："兰登想道，如果索尼埃通过洗牌作弊来和小孙女逗乐，选择五角星真是再合适不过了。"

美国"数学游戏大王"马丁·加德纳笔下的"美国科学人"——

“矩形博士”更加有趣。“他”的日本妻子亡故之后，带着相依为命的混血种女儿伊娃，漂洋过海来到印度的加尔各答，大谈“无处不在的5”：印度的金刚教的教义一共有 5 条；金刚教的轮回说认为，宇宙经过 500 亿年的膨胀之后，必然要经过 500 亿年的收缩，如此不断轮回。“矩形博士”还预言圆周率小数点之后第 100 万位是 5——结果确实如此。

在当今“市场经济”的大潮中，“管理”无疑是最时髦的词语之一，所以我们在这里介绍一位在全球管理界享有盛誉的加拿大管理学大师、经理角色学派的主要代表——明茨伯格的“5 趣事”。



明茨伯格

在中国的“五行理论”中，“元素”是 5 个：金、木、水、火、土。而这个理论，被明茨伯格“克隆”进了他在 1983 年出版的大作《卓有成效的组织》中。不过，在这本书中，他把“五行”的概念主要“偷换”成了“5 个 5”：①5 种主要协调机制；②组织的 5 个关键组成部分；③5 种基本的分权类型；④结论性的 5 种结构配置；⑤5 个关键组成部分各自对组织施加的引力。这 5 个 5 都各有具体的内容。例如，5 种主要协调机制是：相互调节，直接监督，工作流程标准化，工作输出标准化，员工技能标准化。令人啧啧称奇的是，这些不同的“五行”之间，还有一一对应的关系！

有趣的是，这本书的书名，直译就是《五之中的结构》——或者更干脆的《五行结构》。他还引用《象征辞典》来解释 5：5 是联合的标志，毕氏学派心目中的婚姻数字；5 是中心、和谐和平的数字；5 是人的象征，也是宇宙的象征和“神的意志”；5 是对秩序和完美的追求。

更有趣的是，明茨伯格在这本书中设计的案例之一，是一个叫拉库的女士进入制陶业之后，把办公室放在“制陶大厦”的第 55 层……

在梅德韦杰夫当选俄罗斯总统的 2008 年，5（пять）成了“红

星”。这是因为5有“超凡”和“完美”等含义，所以学习成绩中的“5分”是最高等级。他在大选期间的一次讲话中说：“俄罗斯具有在今后10年或16年里成为世界5大经济强国。”由此，俄罗斯媒体就把“пять”作为“5大经济强国”的专用名词了。

第5章　从华尔德、基弗到华罗庚
——优选法中的 ϕ

推理建立起来的公理不足以产生新的发现，因为自然界的奥秘远胜过推理的奥秘。

——弗朗西斯·培根

做馒头的碱放少了，会是酸的；放多了，将是黄色而且对身体有害。放多少才合适？就有一个选择“最优”碱量的问题。炼钢要考虑加入某种化学元素增加强度，加多少最合适呢？研制满足某个性能的新材料，还是要考虑原料的比例……

为了解决这类问题，数学家们创立了一门数学的分支学科——“优选学”。这门学科所研究的内容之一是“最优化方法”（也叫“运筹学方法”）。“优选法”（简记为 OSM）就是运用数学原理，尽量减少试验的次数来实现最优化目标的方法，是最优化方法的一部分。OSM 被广泛用于生活、生产、科研以及经济、社会等领域。例如，用于化学反应器的设计、机器结构的力学设计、电磁系统的设计、微波网络及数字滤波器的设计、透镜设计、宇宙飞船设计、生产工艺中，以及经济管理等。

5.1　从华尔德、基弗到华罗庚

美国数学家华尔德和皮特勒在1967年出版的《优选法基础》一书，系统地介绍了各种优选法。而在此前的1964年，华尔德就出版了专著

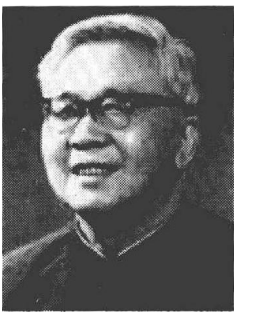
《优选法》。



基弗

优选法涉及的问题，分为单因素和多因素两类。单因素问题常用的主要有“黄金分割法”——近似等同于“0.618法”、“分数法”即“斐波那契法”。

0.618法和分数法，是美国数理统计学家基弗首先初步创立的。他的论文《求极大值的一个序贯极小化极大寻优法》，发表在1953年的一期《美国数学会纪事》上。1953年和1956年，基弗与美国的“工作排程研究者”约翰逊先后从不同思路证明了这两种方法在减少试验次数方面是“最优”的。美国数学家华尔德等，则对斐波那契法“最优”给出了严格证明。与此同时，各国科学家开始探索它的实际应用和推广。



华罗庚

中国数学家华罗庚对优选法在中国的推广应用，作出了重要贡献。1970年，中国广大数学工作者在国务院总理周恩来的支持下，开始推广优选法。他就在此前理论研究和开发研究工作（例如1965年6月6日在《人民日报》上发表整版的《统筹方法平话》）的基础上，选定了几种靠得住、又易于应用的方法，编写了《优选法平话》（署名齐念一，1971）和《优选法平话及其补充》（1971）等通俗小册子。他还带领优选法工作小分队到全国各地推广应用优选法，取得了大量的成果——包括人才培养和经济效益等。例如，他曾到重庆钟表公司讲解优选法。1980年8月，华罗庚还在第四届国际数学教育会议上作了题为《在中华人民共和国普及数学方法的若干个人体会》的报告。1984年，他又出版了《优选学》一书。

5.2　单因素问题的黄金分割法

5.2.1　理论上的0.618法

解决单因素问题，在完全不知道试验次数时，用与黄金分割法近似等同的0.618法最好。

可以把华罗庚的0.618法话概括为："一个原则一个数，两个公式要记住；前式用一遍，后式不停步。"这里的"一个原则"指"抓主要矛盾"即确定一个主要的"单因素"。"一个数"指0.618。"两个公式"中的前式，指"（大点－小点）×0.618＋小点"（式①）来确定第一个试验点；后式指"（大点＋小点－前点）"（式②）来确定第二个试验点。这里的"前点"指前一个试验点。"不停步"照此继续——直到试验满意为止。

下面是用0.618法解决炼钢时要加入一种化学元素，要多少才能使钢材强度最优的问题。

假设已知在每吨钢要加的量在1 000（小点）克与2 000克（大点）之间，就用式①，得到（2 000－1 000）×0.618＋1 000克＝1 618克。所以第一个试验点是加入1 618克。

用式②就得到（2 000＋1 000－1 618）克＝1 382克。所以第二个试验点是加入1 382克。

比较这两次试验的结果，如果第一个试验点的钢材强度较优，就不再做小于1 382克的试验；如果第二个试验点的钢材强度较优，就不再做大于1 618克的试验。

以下确定第三个、第四个……试验点，只需反复用后式，就能得到了钢材强度最优的点。

0.618法包含着数学上一个十分重要的、运用广泛的方法逐步逼近法——首先根据问题的条件，来确定解决问题的解所在的大致范围，然

后一步步缩小这个范围，直到最后求得问题的解。

不过，这种计算比较麻烦，于是就演化成了对折法。

5.2.2 便于操作的0.618法

图5-1是一根长2 000个单位的纸条，先找出它的1 618克点（第一个试验点），再沿中点的虚线对折，就得到这个点的对称点即1 382克点（第二个试验点）。

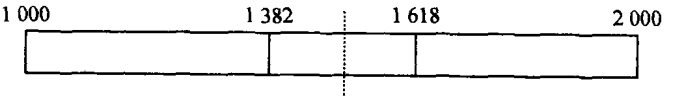


图5-1

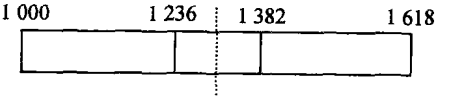


图5-2

如果1 382克点比1 618克点较优，就把1 618克点右边的纸条剪掉，得到图5-2（如果1 618克点比1 382克点较优，就把1 382克点左边的纸条剪掉）。再继续把纸条沿中点的虚线对折，就得到1 382克点的对称点即1 236克点（第三个试验点）。

如果1 382克点比1 236克点较优，就把1 236克点左边的纸条剪掉，得到图5-3（如果1 236克点比1 382克点较优，就把1 382克点右边的纸条剪掉）。

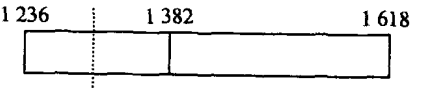


图5-3

如此继续，一直试验到“最佳点”为止。

这种“折纸法”的理论基础，就是我们在3.6.1提到过的对折法——便于具体操作的0.618法。

此外，还有一种“优选黄金尺”，也很方便实用。

如图5-4在一块矩形透明薄塑料片上用小刀刻下一组平行线 A_1B_1，A_2B_2，…。各平行线的间距为5～20毫米，可以等距，也可以不等距，条数不限。

在线段 A_1B_1 的中部取 $MN=100$ 毫米，刻出 M，N 两点。在 MN 上刻出 $MP=38.2$ 毫米和 $MQ=61.8$ 毫米。P，Q 就是 MN 的黄金分割点。

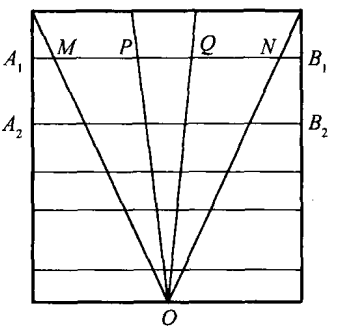


图5-4

再在 MN 的中垂线上任取 O 点并刻出来，再刻出 OM，OP，OQ，ON。应使 O 点尽量远离 MN，让 $\angle POQ$ 成锐角，以增大精度。最后挖空 POQ 这部分，标出 M，P，Q，N。

下面以某项实验的区间是1 000～1800为例，介绍“优选黄金尺”使用方法。

在纸上画出长约80毫米、有刻度（以毫米为单位）的代表1 000～1 800的线段 EF（图5-5）。

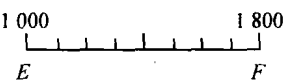


图5-5

把“优选黄金尺”覆盖在这张纸上，使 EF 始终与 MN 保持平行；再移动尺子，让 E 落在 OM 上，F 落在 ON 上（图5-6）。这时，G（刻度为1 350.6）、H（刻度为1 494.4）就是 EF 的两个黄金分割点，也是第一轮对比试验的两个点。

通过对 G，H 的试验，舍去“差点”（假设为 H）之外的 HF。那么，第二轮对比试验就用 EH，即区间为 [1 000，1 494.4]。

以下重复这个过程，直到得出满意的试验结果。

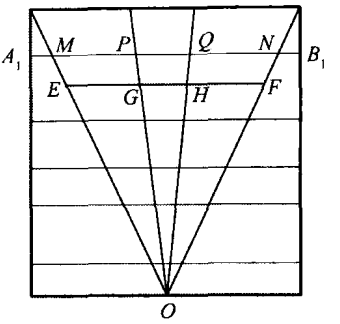


图 5-6

5.3 单因素问题的斐波那契法

有的时候，试验只能取整数点（称为“离散点”），例如在某一个研究中要求1℃，2℃，3℃，…，8℃这8个点进行试验，那用0.618法就不方便了。此时就要用斐波那契法即分数法——用“斐波那契分数”$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{5}{8}$，$\frac{8}{13}$，…。

分数法与0.618法基本一致，只是具体从哪个分数开始，则要看试验区间的等分数。例如是5等分，就用分母是5的分数$\frac{3}{5}$；如果是8等分，就用分母是8的分数$\frac{5}{8}$。以此类推。

如果等分数（如10）不是斐波那契分数中某一个的分母，就用分母最接近10的两个$\frac{5}{8}$和$\frac{8}{13}$，再用前述折纸法比较两次试验的结果，最终求得最佳点。

如果试验次数受到限制，用分数法就很方便。通常受的限次数是多少，就从第几个分数开始试验。例如，受限次数是4，就从第4个分数，即$\frac{5}{8}$开始试验——此时有4个试验点，需对折3次。试验点个数的规律是，受限次数是n，就从从第n个分数开始试验——此时有n个试

验点，需对折 $n-1$ 次。

在预先知道试验次数时，采用分数法最好。

5.4　最佳点会丢失吗

上面介绍的0.618法和分数法，都有一个不能回避的问题——最佳点会丢失吗？最佳点不会丢失，原因是只针对单因素的“单峰”问题——单因素的最佳点是唯一的峰值点。只有一个峰值点的函数，叫“单峰函数”——形状像图5-7那样的“山峰”。“单峰性”（unimodality）是标准的数学名词。

为了说明最佳点不会丢失，在图5-7中设试验区间为［0，1］，其内 x^* 就是要找的最佳点。在 x^* 的左边，随着 x 的增大，y 也逐渐增大。在 x^* 的右边则相反。

因为在［0，1］中任意两个试验点 $x_1 > x_2$，那它们和 x^* 的关系就只有以下3种：

（1）$x_2 < x^* < x_1$，如图5-8所示，则丢失［x_1，1］或［0，x_2］，而 x^* 总会留下；

（2）$x^* < x_2 < x_1$，如图5-9所示，则因为是单峰，所以 x_2 必然优于 x_1，丢掉了［x_1，1］，而 x^* 不会丢失；

（3）$x_2 < x_1 < x^*$，如图5-10所示，与（2）类似，x^* 也不会丢失。

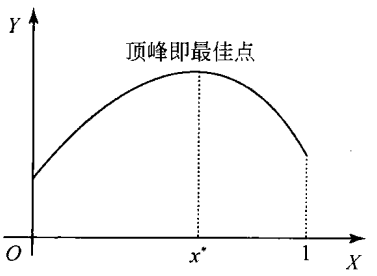


图5-7

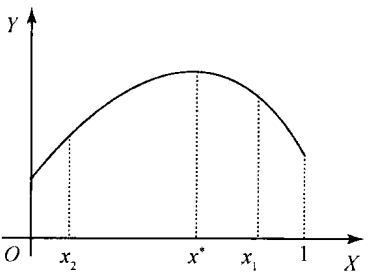


图5-8

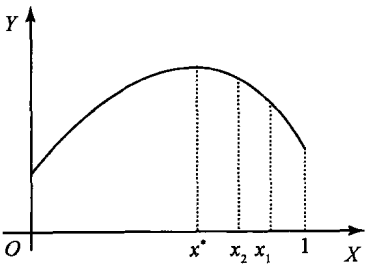


图 5-9

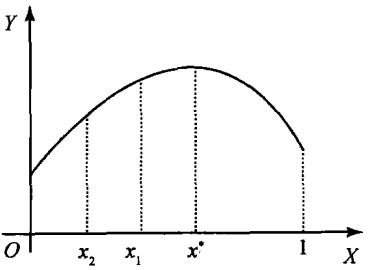


图 5-10

由上可见，对于单因素的“单峰”问题，最佳点始终不会丢失。

5.5 0.618 法和分数法的优点

5.5.1 0.618 法和分数法的“去长留短”

优选法的精髓，就是尽量减少试验次数。那么，0.618 法和分数法在“减少试验次数”上有哪些优势呢?

显然，为了减少试验次数，就必须在每一次试验之后，把这一次试验和上一次试验的结果进行比较，去掉尽可能多的、“不佳”的试验范围——即“去长留短”，以尽可能地缩小试验范围。而用 0.618 法就能做到这一点。

在图 5-11 中，试验时取的第一次试验点 x_1 和第二次试验点 x_2 哪一点更“好”，事前是不知道的。因此，比较试验结果的“好”和“坏”后去掉 $0 \sim x_2$ 这段或者去掉 $x_1 \sim 1$ 这段的可能性相同，这就要求这两段长度一样，即 $x_2 - 0 = 1 - x_1$。由此可见，x_1 和 x_2 这两个点关于 $0 \sim 1$ 的中点对称。

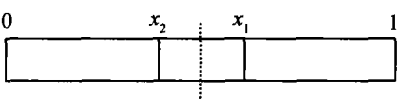


图 5-11

此外，如果 x_2 点比 x_1 点的试验结果更“好”，就要去掉 $x_1 \sim 1$ 这段

而保留 $0 \sim x_1$ 这段，则 x_2 在留下的范围内所处的位置，应与 x_1 原来在 $0 \sim 1$ 范围内的位置相仿，即所占比例相同。于是就得到 $x_2 : x_1 = x_1 : 1$ 即 $x_2 = x_1^2$。把它代入 $x_2 - 0 = 1 - x$，就得到 $x_1^2 + x_1 - 1 = 0$。它的一个解就是我们熟悉的 ϕ，即 $x_1 = 0.618\cdots \approx 0.618$。

这就是说，要尽快得到“最优点”的试验方法，是必然选用 ϕ 点——并不是人们对 ϕ 情有独钟。此时，我们想起了美国天文学家和数学家皮尔斯的名言：“数学是引出必然结论的科学。”

同时，x_1 的对称点 $x_2 = 0.381\ 9\cdots \approx 0.382$，而中间一段 $x_1 - x_2 = 0.236\ 0\cdots \approx 0.236$。显然，0.236 比它左右两边的 0.382 都要短，这就做到了“去长留短”。也可以看出，每次去掉试验范围，都大于 38%。

由于 $\phi = 0.618\ 033\ 9\cdots$，如果取 $\phi = 0.618$，相对误差的绝对值不大于十万分之六，所以在实际中用 0.618 代替 ϕ 通常完全没有问题。就这样，0.618 法就几乎成了黄金分割法的代名词。

因为“斐波那契分数”的每一项都依次接近 ϕ——$n \to \infty$ 时，F_n/F_{n+1} 的极限就是 ϕ。所以，在每一次试验之后，分数法也能保证“去长留短”。事实上，如果取“斐波那契分数”中的 3/5，5/8 和 8/13 为 ϕ 的过剩近似值，误差分别小于 3.0%，1.2% 和 0.5%。当然，越是后面的分数，这个误差越小，所以 0.618 法和分数法并无本质上的不同。于是，我们看到黄金分割法中的 ϕ 被“两次近似”：第一次近似为 0.618，第二次近似为分子和分母都是整数的“斐波那契分数”。

由于黄金分割法在优选法中的重要地位，所以有人干脆把它等同于优选法。

5.5.2　0.618 法和其他方法的比较

1. 0.618 法与对分法的比较

也以加某种化学元素来增加钢材的强度为例。设已知在每吨钢中加

的量在1 000克与2 000克之间，取中点（1 500克点）做试验，然后将试验结果分别与1 000克和2 000克时的试验结果比较，从中选“较优点”为新区间，再取新区间的中点做试验，再比较新端点，依次下去直到取得最理想的结果，这种试验方法叫“对分法”或“平分法”（图5-12）。据说，它是捷克数学家波尔查诺发明的，所以也叫“波尔查诺法”。

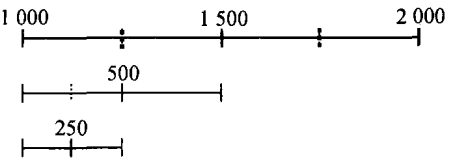


图5-12　每次试验都是去掉右边的区间的情形

波尔查诺的趣事之一是，有一次他生病全身疼痛而发冷时，为了忘记病痛，就拿起《原本》读。读到卷5的时候，疼痛消失了。从那以后，任何人有类似的不适，他总是拿出“秘方”——劝人读《原本》卷5。



波尔查诺

从图5-9可以看出，对分法每两次试验之后留下了50%，去掉了25%，这是“去短留长”——显然劣于0.618法（或分数法）的“去长留短”。据计算，0.618法做16次试验就可以完成对分法做2 500次试验所达到的效果。

2. 0.618法与其他方法的比较

以寻找加入1 000～2 000克之间的化学元素，使钢材的强度最大的问题为例，也可以从1 001克、1 002克、1 003克……这样进行，就是“逐点试验法”。而要求1℃、2℃、3℃，…，8℃这8个点进行试验的问题，也可以这样逐点进行。显然，逐点试验法也劣于0.618法（或分数法）。

显然，逐点试验法没有0.618法来得快。

5.6　优选法林林总总

前面主要说的是单因素问题中的“单峰问题”。在实际问题中，还有单因素问题中的“多峰问题”。此时，就要把它分割为几个单峰的区间来处理（图5-13）。单因素问题还可用“分批（试验）法”等来处理。分批试验法中，有一种“黄金分批法”——当代美国数学家阿夫利尔的称呼。

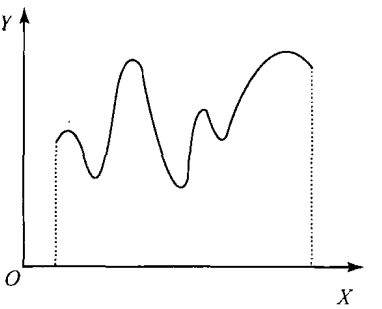


图5-13

除了单因素问题以外，实际问题中还涉及不少“多因素”问题——例如，合金由几种材料组成，各应加多少的问题。解决多因素问题，优选法中有“爬山法”即“瞎子爬山法”、降维法等多种方法。

此外，优选法中还有不少理论问题没有解决或没有完全解决。例如，黄金分割法在无穷远处的最优性证明，就是一个没有彻底解决的理论问题。

优选法用途广泛，如连企业管理、决策、用人等，也要用到它。

第6章　艺术中的美——艺术家也爱φ

在那高高的天上/定然有美丽的街市/街上陈列的/定然是人间少有的珍奇

——中国作家田间一

6.1　比例论引出“大明星”

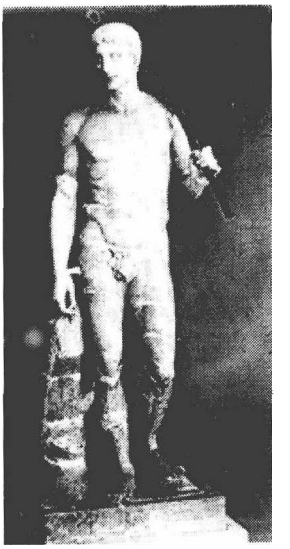
“这个比值在自然界中和在科学和艺术中，处处都会出现。”伊夫斯在《数学史上的里程碑》中，这么评价“大明星”φ。那么，φ在数学家们研究什么理论时得到，并引起广泛关注和系统用于各个领域的呢？这一节将会揭开这个奥秘。

6.1.1　从毕氏学派到伽利略——比例无处不在

比例（理）论在古代数学中居于中心地位——因为形形色色的问题都可以归结为比例问题。用我们提到过的美国艺术家罗伯特·史密森的说法是：“尺寸决定一个物体，但是比例才决定艺术。”

所以，古希腊数学家们早就给了它“特别的爱”。例如，活动在约公元前5世纪末期的古希腊雕刻家波利克里托斯在《法则》这本论述人体比例的书中，就提出了人的身长与头高的比应为7:1的理论。波利克里托斯的达到了整体美的和谐《荷矛者》就根据这个比雕塑而成，被来者仿效。在古希腊神殿柱子的样子中，有一种“科林斯柱式”，它的柱身和柱头之比也是7:1；这些高耸的柱子和某些神像的高度比，也采用7:1。后来，古希腊古典后期三大著名雕塑家之一的利西波斯，把

这个比变为8∶1。另外两位著名雕塑家，是和利西波斯同时代的斯科帕斯和普拉克西特列斯。

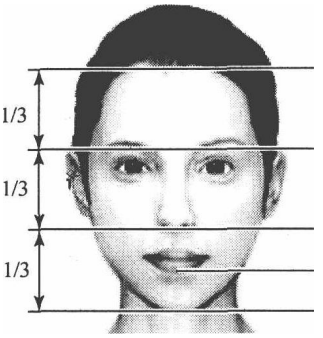

波利克里托斯的《荷矛者》

顺便说明，比例除了数学上的含义以外，还在绘图中指图形大小和实物大小的比——例如两者之比为1∶5时，标注为“*M*1∶5”（有时省去其中的“*M*”）。

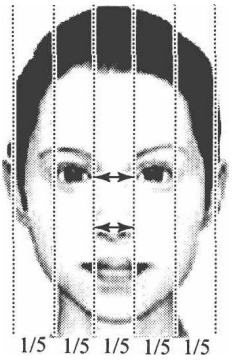
不过，最早初步创立比例论的却是毕氏学派——但仅限于有理数。稍晚的欧多克索斯则进一步把可公度与不可公度的无理数的比，包括在他的比例定义之内。这样，创立比例论就成了他对数学的最大贡献。《原本》卷5《比例论》，对比例论作了系统的阐述，其中大部分就采自欧多克索斯的工作。约100年，我们提到过的尼科马霍斯所写的《算术入门》，则把五花八门的“比”加以分类，给出了许多类型的比例。

在东方，中国的《九章算术》中，已广泛使用各种比例解决实际问题，实践中也很重视比例。例如，浙江天台山的各个佛像都“千佛一律”：全身总长（自肉髻顶端到脚踵根）共可分成120等份，由肉髻顶端到腰部为48等份，由腰部到跟底为72等份。由此可见，能工巧匠们在实践中的体现比例论是心中有数的。中国古代画家还讲究“三庭五眼”——脸长与脸宽的“标准比值”为5∶3。“三庭”和“五眼”指脸的长度和宽度分别被分为3等份与5等份。此外，中国古代画论中还有“丈山尺树，寸马分人”的说法，这是讲山水画中山、树、马、人的大致比例。在五六世纪，印度则出现了“三率法”，欧洲类似的算法要晚一些。

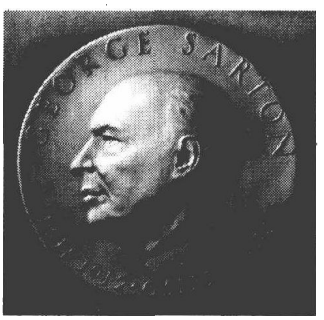
到了文艺复兴时期，比例起着更重要的作用：建筑物、绘画、雕刻等方面的艺术品必须按特定的比例造型。帕奇奥里的《神圣比例》，更把比例称为“母后”、“皇后”，把它用于人体各部分的尺寸、绘画中的



脸的长度被3等分



脸的宽度被5等分



美国科学史学会的萨顿奖章

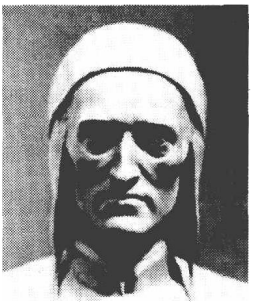
透视，甚至混合颜料。他还进一步说："一切美的东西都必须服从黄金分割。"科学家和艺术家们对它也就特别青睐："黄金分割是不可违反的规律。"于是，"黄金分割成为西方历来讲形式美的规律"。形式美的规律，就是所谓"形式美法则"。它的主要内容包括：对称均衡、单纯齐一、调和对比、比例、节奏韵律和多样统一。而黄金分割作为一种重要形式美法则，成为世代相传的审美经典规律，经久不衰！

伽利略还用比例语言表达函数关系。由此，我们想到学识渊博的美国著名科学史学家乔治·萨顿的名言："理解科学需要艺术，而理解艺术也需要科学。"从17世纪开始，比例成了算术教科书的重要内容。现今，比例和我们如影随形。

6.1.2 "大明星"技压群芳——出自比例论的φ

毕氏学派已经用徽章或联络标志"暗藏"了φ，而且在后来已经被一些人无意识地用于某些领域。但是，被广泛关注和有意识地系统用于各个领域，却是文艺复兴时期开始的。

在中世纪中期，斐波那契调查了大量人体数值后获知，人体肚脐以下长度与身高之比接近0.618。其中少数人这个比值则等于0.618，被视为“标准美人”。因此，在人体绘画、美术、雕塑等方面，都以这一比例为标准，以使作品最佳。例如，女神维纳斯（Venus）的塑像故意延长了双腿，希腊神话中的太阳神阿波罗的形象，分别代表男女健美体型，完全符合这一标准。



但丁



乔托

在中世纪后期，封建制度逐步解体，资本主义得到萌芽和发展，开始进入“转型”的文艺复兴时期。在文艺复兴时期的意大利——特别是商贸中心佛罗伦萨及威尼斯等地，最早兴起了一弘扬人文主义为核心的文艺复兴运动。后来，这场运动蔓延到欧洲一些国家，例如造就了英国大文豪莎士比亚。早期的这场运动，主要表现在文学和美术领域——意大利著名诗人但丁和意大利画家乔托，最早吹响埋葬“死寂”的中世纪的序曲。但丁的名作《神曲》把古希腊时代的人物摆在“天堂”，让教会高爵显位的“达官贵人”进入“地狱”，显示出一种崭新的精神状态。乔托的名画《犹大之吻》中，耶稣临危不惧、稳重安详与的叛徒的丑陋形成鲜明的对照，反映出城市新兴阶级对光明生活的信心和对美好道德理想的追求。

接下来，就是艺术家们发现远近透视规律和开始较系统地研究人体结构。由文艺复兴运动出现的新视野和新眼光，让进入16世纪的达·

芬奇、帕奇奥里、开普勒等对φ特别推崇。例如，达·芬奇的“美丽密码”说，美丽有“六大法则”，其中包括人脸的宽度必须是鼻宽的4倍，前额的宽度、鼻子的长度及下颌骨的长度必须都相等。后来的研究人员惊奇地发现，“六大法则”中的5个都与现代人的审美标准奇迹般地吻合，只有一项关于“鼻子与嘴的比例”的法则略有出入。小嘴是文艺复兴时期的审美标准——嘴宽是鼻宽的1.5倍，被认为最完美。而现代人则普遍认为这个比值为1.6倍更美，所以被誉为“美国甜心”的好莱坞女影星梅格·瑞恩最美。



梅格·瑞恩

就这样，在比例论的系统研究成果和文艺复兴这两个背景下，φ在比例论中的各种比例里“技压群芳”，脱颖而出，被众多“能工巧匠”有意识地广泛用于各个领域，成了名副其实的“大明星”。对此，我们把美国科学史家乔治·萨顿的女儿梅·萨顿在1957年写的纪念她父亲的诗《一种纪念》，献给“大明星”φ：

当白纸黑字在他的门前
述说着神秘的历史，神灵下降凡间——
歌唱着“以上帝的名义”，
那是阿拉伯铭文的不停闪现。

这位“红五月诗人”（梅·萨顿出生在May，即五月）的“阿拉伯铭文”（我们把它看成数学中的阿拉伯数字隐喻着的“科学”）的“不停闪现”，预示着文艺复兴时期的承前启后——紧跟它的，是17世纪开始的、激动人心的近代科学的诞生。事实上，近代科学就在发生在文艺复兴时期意大利－西班牙航海家哥伦布发现“新大陆”、波兰天文学家哥白尼创立地动日心说，以及这两个时期之交的伽利略为近代实验科学奠基之后……

6.2　绘画、雕塑中的φ

6.2.1　古希腊的神韵

1. 天性乐观的古希腊人

从公元前2000年左右到公元30年，以巴尔干半岛、爱琴海诸岛和小亚细亚为中心，包括北非、西亚、意大利半岛南端和地中海地区，古希腊人建立了一系列奴隶占有制国家，后人统称古希腊。

“在古代世界所有的民族中，少有像希腊人那样对近代世界发生如此巨大的影响。不是在希腊人创造的物质文明方面……而是在精神文明方面……他们热爱生活，天性乐观，每四年举行一次的奥林匹克竞技会是他们欢乐生活的写照……”《科学的历程》一书这样描赞古希腊人。

是的，当我们唱起“奥林匹斯山，奥林匹亚神……”的歌曲时，希腊——古代奥运会的发源地就成了令人神往的地方……

是的，在这些天性乐观的古希腊人中，数不清的科学家、哲学家和艺术家群贤毕至——他们的大名，现在依然振聋发聩……

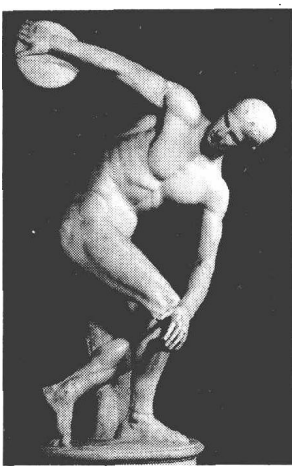
2. 古希腊的神韵

在古希腊艺术全盛时期的著名艺术家中，以米隆、菲迪亚斯、波利克里托斯、斯科帕斯、普拉克西特列斯等几位雕刻名家最为著名。

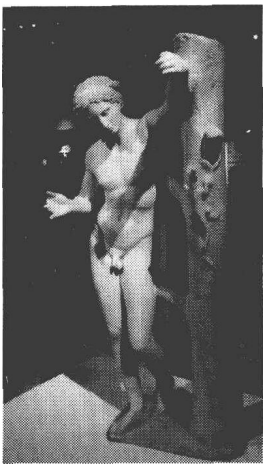
米隆的雕塑《掷铁饼者》（原作已经失传）已为我们所熟悉和艺术家们的推崇——它静止的形象却给人以连贯运动的想象，达到了艺术的高峰。

普拉克西特列斯的雕塑《捉蜥蜴的阿波罗》（原作已经失传）中的一棵棕榈树，暗示他出生在提洛岛——这里也是崇拜古希腊神话中的太阳神阿波罗的重要中心。它的镇静形态和符合黄金分割比的人体比例，和另外两个符合黄金分割比的雕塑——被看做男性人体健美代表的雕像《阿波罗》，和被看做女性人体健美的代表“爱与美之神”《维纳斯》同

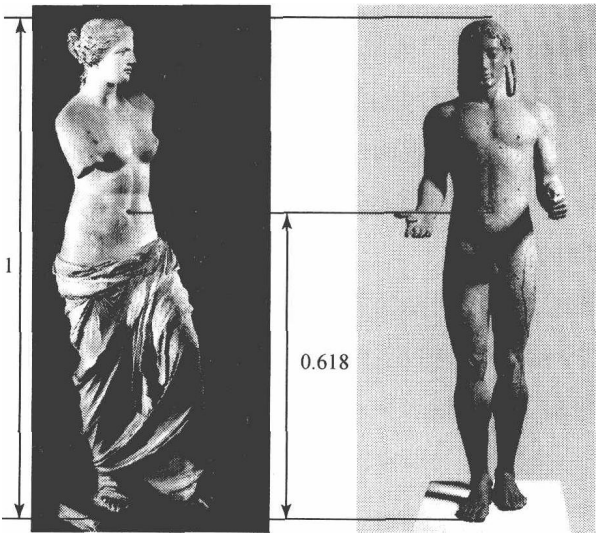
样有名。



米隆的《掷铁饼者》摹制品



《捉蜥蜴的阿波罗》仿制品



《断臂的维纳斯》　　《阿波罗》

《断臂的维纳斯》又叫《米洛斯的阿芙洛蒂忒》，为高 204 厘米的大理石雕像，由亚力山德罗斯创作于约公元前 150 年，现收藏于巴黎卢浮宫（三大镇馆之宝之一）。从雕像被发现的第一天起，就被公认为是迄今为止希腊女性雕像中最美的一尊，在 1993 年就拍卖出 800 万英镑。

从这几个精美绝伦的雕塑作品中，古希腊艺术家们对艺术的追求、理念和水平，由此可见一斑。正是这些古希腊艺术家创造的艺术珍宝，使我们目睹了古希腊的神韵。而这些，就是文艺复兴时期艺术盛典的发轫。

6.2.2　文艺复兴时期的盛典

1. 意大利“画坛三杰”和他们的杰作

“活着/大自然害怕他会胜过自己的工作/死了/它又害怕自己也会死亡。”

这段赞美词，是文艺复兴时期意大利“画坛三杰”之一的拉斐尔的墓志铭。

其实，在那个时期，大自然“双重害怕”的，不只是拉菲尔，还有达·芬奇等至今仍如雷贯耳的艺术家，以及他们的无数杰作。



拉斐尔



米开朗琪罗

文艺复兴时期的艺术家们，开创了基于科学理论和实际考察的表现技法——例如人体解剖和透视法则，达到了古典艺术（主要是希腊美术和罗马美术）之后的一个新高峰。达·芬奇就是其中在意大利的一个代表。他于1500年在佛罗伦萨画出了素描《圣母子与圣安娜》草图，表现圣母玛利亚的母亲圣安娜膝盖上坐着怀抱耶稣的圣母，两位成年人和婴孩构成了完美的三角形。构图的严密和神态的和谐前所未见，被誉为

艺术的奇迹，市民们摩肩接踵前往观看，一时传为佳话。他巧妙如神的构图原理和轻柔如烟的绘图笔法，对佛罗伦萨艺术界产生了极大的影响，使与他并称文艺复兴时期意大利“画坛三杰”的米开朗琪罗和拉菲尔深受其惠。



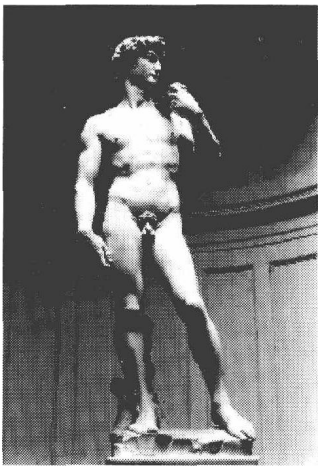
达·芬奇素描《圣母子与圣安娜》　拉菲尔创作的《西斯廷圣母》

看了达·芬奇的《圣母子与圣安娜》、《蒙娜丽莎》、《维特鲁威人》等无与伦比的杰作之后，我们也要把拉菲尔的墓志铭转献给他。当然，拉菲尔创作的《西斯廷圣母》有异曲同工之妙——圣母怀抱婴孩耶稣从云端走向幕前，幕边跪着男女两个信徒，图底两个天使在顾盼，圣母和圣徒构成了稳重而均衡的三角形。

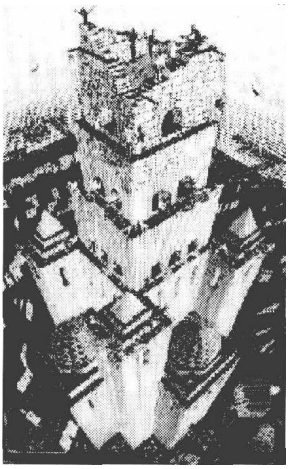
那么，这些杰作的美感的支撑点是什么呢？是黄金分割。达·芬奇在《论绘画》一书中说：“美感完全建立在各部分之间的神圣比例关系上，各特征必须同时作用，才能产生使观众如醉如痴的和谐比例。”于是，他就在绘画中提倡透视原理，采用最佳比例即黄金分割等。当然，达·芬奇并不是最早提出系统透视原理的人。

自古以来，如何在二维的画布上展现实在的三维物体，一直是一个难题。最早提出系统透视原理的人，是意大利建筑大师、艺术理论家阿

尔贝蒂。1435年，他写作了3卷本的《绘画论》一书，其理论基础就是论述绘画的数学基础——透视学。他在书中得出了“远小近大，远淡近浓，远低近高，远慢近快”等定性结论。



米开朗琪罗创作的雕像《大卫》



埃舍尔的《巴比伦塔》

和阿尔贝蒂同时代的意大利画家弗兰切斯卡，对透视学的贡献最大。他总结了那个时代画家的理论和经验，得出了理论上的结论，把透视学发展到相当完善的地步。

想要领略画家们利用透视原理在二维的画布上展现三维物体的风采，就请对比《巴比伦塔》和今天“航拍”的高层建筑有什么区别吧！这《巴比伦塔》，是荷兰著名“怪诞画家”埃舍尔用三点透视原理创作的。

此外，米开朗琪罗的雕像《大卫》，也符合黄金分割的人体造型。他的画作《圣家庭》的人物构图中，包含着一个“黄金五角星”。而在拉斐尔的画作《刑罚》中，人物布局则以“黄金三角形”和“黄金五角星”展开。

2. 盛典“场外”的“合唱”

文艺复兴时期的美术，首先在意大利发生并达到盛期，同时很快传到欧洲各国——他们学习古典，但并不是简单仿效，而是取其精神。在

这种背景之下，探讨美感的理性法则，表达现实场景，就成为艺术家们的行动指南。所以，除了“画坛三杰”以外，许多文艺复兴时期其他国家的画家“都在他们的一些作品中用黄金矩形去创造富有生气的对称”——例如丢勒创作的《入浴的男女》。

此外，在生于文艺复兴末期的荷兰画家伦勃朗的《自画像》人物构图中，也用到黄金分割的元素。

于是，黄金分割法这个欧洲人所说的“金法”，被17世纪欧洲的一位数学家称为“各种算法中最可宝贵的算法”；而在印度，则被称为“三率法”或“三数法则”。

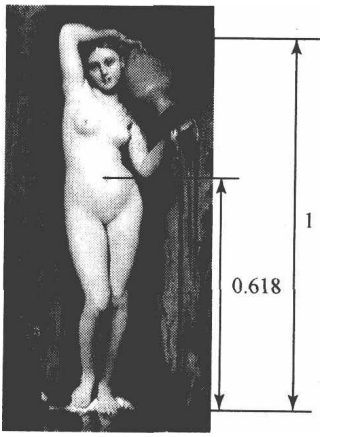
6.2.3 从安格尔到“黄金分割画派”

文艺复兴时期以后，采用黄金分割原理作画的风格得到沿袭和发展。

英国著名风景画家泰纳的画作《日出中的诺城堡》，在人物构图中用到了黄金分割的元素。



安格尔



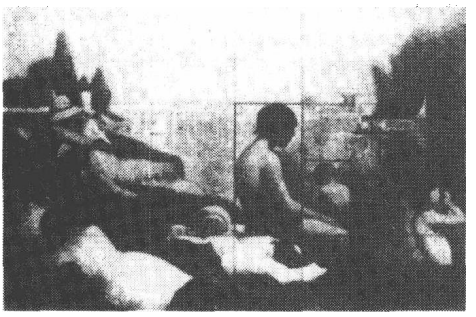
《泉》

法国著名画家安格尔在1856年创作的《泉》，也沿袭了用黄金分割原理作画的风格。在历经30多年才最终完成的《泉》中，年轻的裸女

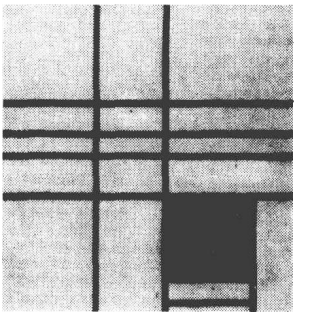
拿着壶罐让水倒出来，其肌肉因安格尔运用美丽柔缓的曲线而更具魅力。色彩运用非常柔和而富于变化，表现清高绝俗和庄严肃穆的美。

1859～1891 年，法国印象派画家 G. 西雷特创作了图画《入浴》，就显示出三个黄金矩形的构图。

油画《金黄色的组合》是荷兰画家蒙德里安在 1936 年的杰作。在这幅油画中，也有多个黄金矩形。蒙德里安还说过："研究每一幅油画都能发现黄金矩形。"



《入浴》中的三个黄金矩形



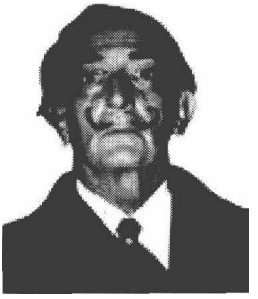
蒙德里安的《金黄色的组合》

此外，画家 G. 贝娄和西班牙超现实主义画家达利等，也"在他们的一些作品中用黄金矩形去创造富有生气的对称"。其中最典型的是"20 世纪最杰出、宏伟的宗教画"——达利在 1955 年创作的《最后的圣餐》。他将整幅画面放在一个黄金矩形之中，而且人物的布置也饱含 ϕ——餐桌的上方是一个巨大的十二面体的一部分，这个多面体则含有 12 个符合黄金比的五边形。

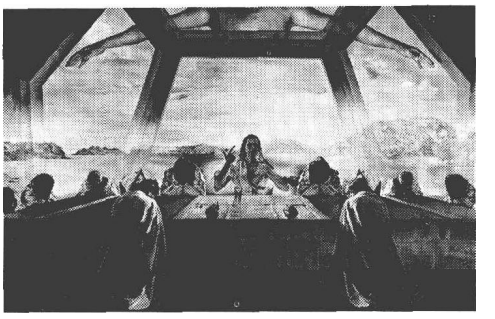
在自然界中，除了许多形状对称的物体以外，还有许多同样美丽均衡的形状不对称的物体——例如鹦鹉螺的外壳。而这种均衡，就是所谓的"动态对称"即"动态匀称"。在所有动态对称的形状中，人们总能找到黄金矩形或黄金比。把黄金矩形或黄金比用于艺术，是动态对称艺术手法的技巧。

耶鲁大学艺术史和艺术理论教授汉比奇是一位美国画家，他们热衷研究的动态匀称的艺术手法中，黄金矩形就具有重要意义。在著名的美

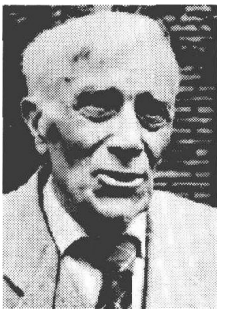
国画家贝洛斯等人的工作中，也广泛运用了动态匀称原理。



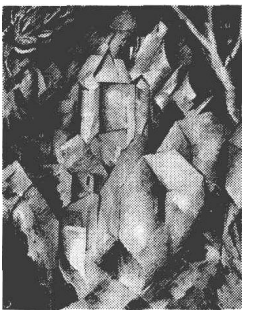
达利



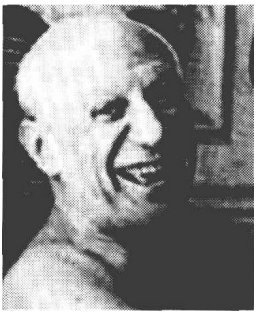
《最后的圣餐》



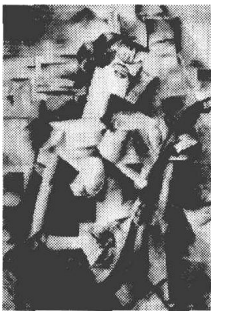
布拉克



《埃斯塔克之屋》



毕加索



《弹曼陀林的少女》

在1908年，法国还产生了冠名“黄金分割画派”的立体主义画家集团，专注于几何形状比例和匀称。这一年，法国著名画家布拉克在韦恩韦勒画廊展出了他的画作。艺术评论家L. 沃塞列斯当年就在《吉

尔·布拉斯》杂志上评论说："布拉克先生把每一幅作品……都还原成了立方主义。"立体主义画风因此得名，其主将就是布拉克和出生在西班牙的法国著名画家毕加索。

布拉克的油画《埃斯塔克之屋》（1908），是体现立体主义画风的代表作。而毕加索的油画《弹曼陀林的少女》（1910），也是包含这种画风的作品；而他的《小孩》，则精心把主题的重心摆在黄金分割点上，获得了动人的美术效果。

6.2.4　东方与现代

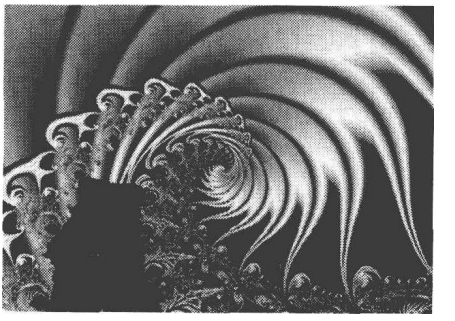
1. 佛像中的 ϕ

除了以上所说的西方在雕塑、绘画中运用 ϕ 之外，东方也自觉或不自觉地用到了 ϕ，例如中国的佛像——其造像对规格尺寸和比例十分讲究。因为十方诸佛都具有三十二相，八十种随形之好，经过无量劫修菩萨行，终成无上正等正觉，所以具有凡夫所不能有的殊妙庄严，上至肉髻、螺发，下至足底纹样，佛身的每一处都有一定的尺寸比例。实例是浙江天台山的各个佛教造像——腰以下部分和全身总长之比，为很接近 ϕ 的 0.6∶1。这说明诸佛的体态符合最完美的"ϕ 比例"。

据说，中国古代的兵马俑的竖直线与水平线之间的关系，完全符合"ϕ 比例"。

2. ϕ 隐藏在现代科技中

现代科技的飞速发展，使绘画、雕塑（结合 ϕ）越来越尽善尽美。电子计算机的广泛应用，已经把美术和数学紧密结合起来，形成了"杂交"学科——数学美术学。用电脑设计或临摹的图案让人赞叹不已或遐想无限。



一种分形图案

1975年，祖籍立陶宛、出生在波兰，有美国和法国双重国籍的美国哈巴多大学数学教授芒德尔布罗特，创立了分形几何学。基于1980年前后电脑绘图功能趋于完善，他发现了数学公式的新美学价值，人们也目睹了数学美术学所蕴藏的奇迹。

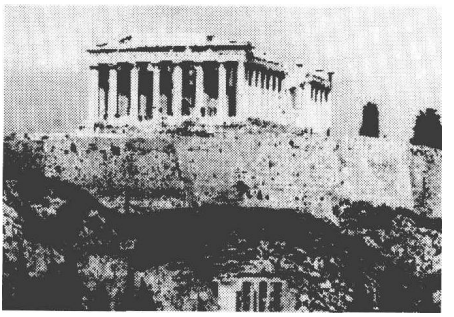
20世纪末诞生的一种新艺术形式——电脑美术，为无数领域的艺术创作开拓了广阔的新空间，甚至有助于与人类的精神和情感沟通……

6.3 建筑中的φ

6.3.1 帕台农神庙遗韵流芳

1. 无与伦比的卫城和神庙

雅典卫城，也称为雅典的“阿克罗波利斯”（希腊语，意为“高丘上的城邦”）。距今约2500年前开始建造的古希腊雅典卫城的遗址，位于今雅典城西南，建造在海拔150米（一说156米）的石灰岩山冈上，是祭祀雅典的保护神雅典娜的圣地，也是奴隶主统治者的圣地和城市防卫要塞。雅典娜是希腊奥林匹斯十二个主神之一，也是奥林匹斯三个处女神之一，被看成智慧女神和女战神。公元前5世纪，雅典卫城就成为国家的宗教活动中心；自希腊联合各城邦战胜波斯入侵后，更被视为国家的象征。每逢宗教节日或国家庆典，公民都要列队上山进行祭神活动。



帕台农神庙

雅典卫城雄踞雅典中心的高冈上，像一个卫士俯瞰全城。卫城整体起伏跌宕，和作为基座的高冈协调得浑然一体，是希腊民族精神和审美理想的完美体现。

雅典卫城的中心，就是“雅典的王冠”——著名的帕台农神庙。帕台农意为“处女神庙”，为供奉雅典娜而建。包括神庙在内的整个卫城的总建筑师，是公元前5世纪的伊克蒂诺斯和卡利克拉特斯。而美术总设计师则是我们多次提到的雕刻巨匠、欧洲古典雕刻艺术的代表菲迪亚斯——他与雅典的执政官伯里克利交谊颇深而“中标”。帕台农神庙在公元前447到前432年历时15年建成，整个卫城的建设则延长了更长的时间。

2. 帕台农神庙与 φ

长方体形的帕台农神庙长228英尺，宽101英尺，面积2 170平方米。它的四周排列着高约10.5米、底部直径约1.9米的多立克式纵柱——东西两端各8根，两侧各17根（注意：总共只有46根）。整个神庙用坚硬的大理石建造，神庙柱子采用多利安柱式——柱身上下不完全笔直，而是上端略小、中间稍微凸出，加强了造型的力度感。与此相应，柱子的间距也不完全相等——中间柱间距略大于两边的柱间距。这样的精心设计，使神庙的整个造型显得更加雄伟坚实。



菲迪亚斯

“模数比例”理论认为，只有简单而符合模数的比例关系才容易辨认，因而是和谐和美丽的——例如像圆、三角形、正方形等具有确定数量制约关系的图形。显然，从前面的帕台农神庙可以看出，三角形和正方形在帕台农神庙中都得到体现。至于矩形，模数比例理论认为，由于它的长宽可以有不同比例，所以就存在何种比例最美的问题——最后认定为黄金矩形。而帕台农神庙则是运用黄金分割的典型。

简单地说，帕台农神庙正面符合多重黄金矩形：最大的黄金矩形中的正方形确定整个建筑的高，二次黄金矩形构成楣梁、中楣（由92块白色大理石构成）和山形墙的高，最小的黄金矩形决定了中楣和楣梁的位置。

由此可见，帕台农神庙符合模数比例理论，包括古希腊人比例体系的最高审美标准——黄金分割。

帕台农神庙的装饰雕刻主要有3个部分。一是廊柱内长160米、高1米的浮雕带，表现4年一度向雅典娜献新衣盛典的游行场面。二是东西两面山墙上的高浮雕，刻画了雅典娜从她的父亲宙斯头中诞生的情节。三是围绕神庙四周的92块回檐浮雕版，各自独立的方形构图按4个方向分别表现4次神话中的战争，寓意歌颂希腊对波斯的胜利。

帕台农神庙的主殿，又叫百尺殿——因长100古雅典尺（约合30米）得名。这里，就供奉着连基座总高12.8米的雅典娜的立像，可搬动转移隐蔽。

可惜的是，在历经两千多年的战乱和灾变之后，雅典卫城（包括帕台农神庙）至今只残存着一些建筑躯壳，但它依然是永不倒下的卫士，屹立在城市的高处，闪耀着不灭的光辉。当然，大部分浮雕也已被毁，残存的大部分被运存在英国的不列颠博物馆和和法国的卢佛尔博物馆。而帕台农神庙的雕像残片，也成了菲迪亚斯遗留下来的唯一真迹。

3. 遗韵流芳到如今

“帕特农神庙是供奉雅典保护神雅典娜的圣殿。伯里克利将其地基建立在波斯人夷为平地的废墟之上，意味着抹去过去的耻辱。帕特农神庙的长度与宽度的比例是5的平方根比1，也就是说，长边与短边的长度之比是5的平方根比1。

5的平方根强烈地吸引着古希腊人，大概它是一个无理数。当时，人们还无法通过有理数来精确地表达出它所代表的具体数值，于是，他们便把自己的想象力发挥到了极致，最终一个神奇而令人迷惑不解的比例出现了——5的平方根比1。

或许，他们认为，只有这种玄妙的比例才能匹配他们的保护神。

古希腊人为使建筑超凡脱俗所做出的努力，同时也体现在帕特农神庙的正面设计上。古希腊人相信，任何几何形状都有一个最美的形态，而他们所要做的就是就是找出确定这一形态的公式和办法。例如，他们

会利用建筑基座长度的一半向上旋转而产生一个直角三角形。此线再旋转与斜边相交，会产生一个新的长度。新长度再旋转与底边相交，并以此来确定建筑物正面的黄金分割点。在帕特农神庙中，有一根柱子的位置就恰好在这一点上，而在它的左边，则有一根和它位置对称的柱子。

在确定了中间柱子的位置后，卡利克拉提斯和伊克第涅斯利用黄金分割法则，继续设计帕特农神庙正面的其他部分，他们一反在正面设立 6 根石柱的做法，而是将石柱数量提升至 8 根。

从理论上说，当时的工匠完全可以以一根特定长度的绳子为基准，从某一比例开始着手，然后根据不同的需求确定建筑物的其他部分的数据，但他们没有这么做，而是选择了在几何图形的变化中寻求完美。”

以上是一本杂志在 2008 年的一篇名为《雅典卫城几何与数学之城》中的描绘。其中“帕特农”就是“帕台农”，“卡利克拉提斯和伊克第涅斯”就是“卡利克拉特斯和伊克蒂诺斯”，而“5 的平方根”则为“5 的平方根减 1 的差的一半”之误。



“高丘上的城邦”游人如织

这些描绘表明，震古烁今的帕台农神庙一直被人们津津乐道，遗韵流芳——不用说那里一年四季如织的现代游人……

6.3.2　巴黎圣母院、巴洛克和东方建筑

1. 巴黎圣母院

世界各地的建筑风格多样，美不胜收、难以卒述。到了 11 世纪下半叶，法国出现了一种哥特式建筑，13 ~ 15 世纪在欧洲流行，主要在天主教堂中应用。φ 被有意识地运用在哥特式教堂之中。

早期哥特式教堂的典型代表是巴黎圣母院，它也是欧洲建筑史上一

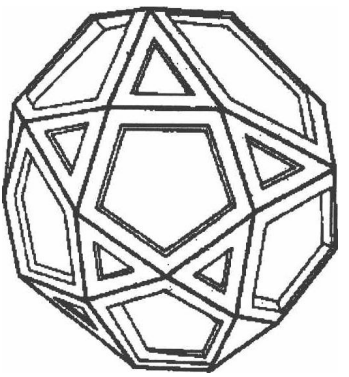
个划时代的标志，被誉为“由大石头组成的交响乐”。这座在1163～1345年建造的大教堂，坐落在巴黎市中心塞纳河中的西岱岛上。

黄金分割也被有意识地运用在巴黎圣母院的造型之中，这可从几百年之后建筑学家们的评述看出。例如，20世纪的法国建筑大师勒·柯布西耶在1923年出版的《走向新建筑》一书中，就引证了巴黎圣母院正面各种比例中的正方形、圆和φ的作用。他指出，包围大教堂的那个矩形是黄金矩形，这个大黄金矩形中的正方形围住了大教堂正面的主体部分，而小黄金矩形则围住了两座塔楼。两条对角线在通风窗上方相交，穿过了在大教堂正面矮墙的拐角。中间正门和每一扇窗户也符合黄金分割，通风窗的直径则等于1/4个正方形内切圆的直径。

显然，模数比例理论在巴黎圣母院中得到完全体现。

2. 从文艺复兴建筑到巴洛克建筑

文艺复兴时期意大利伟大的建筑理论家、建筑师帕拉迪奥指出，被我们经常认为优美的比例，除了最平稳、和谐的1∶1（正方形和圆）以外，还有1∶2，1∶3，1∶1.618，1∶4（两个1∶1的组合），以及1∶5（两个黄金比的组合）。这种观点和模数比例理论不谋而合。于是，“φ建筑”在文艺复兴时期大行其道。



达·芬奇的“短程式圆顶”

继哥特式建筑之后，文艺复兴建筑是欧洲出现的又一种建筑风格，而意大利文艺复兴建筑则在文艺复兴建筑中占据重要地位。在1296～1462年建成的佛罗伦萨大教堂，是文艺复兴建筑的开端，在17世纪初以后又转为巴洛克建筑。

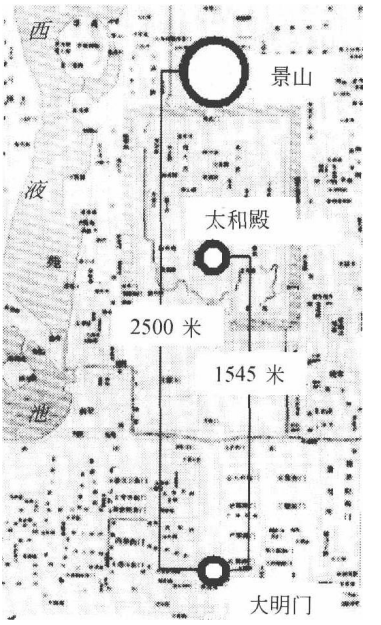
在这些建筑中，建筑学家和数学家们都精心选用了各种比例——包括φ来体现庄严神圣。这是因为古代建筑学家们认为“数学比例就是象征神秘”，所以他们在建筑设计上非常重视视

觉上的比例关系。而数学家们则把他们认为理想的比值——统治西方建筑学和美学的 ϕ 贯彻到底，包括达·芬奇在建筑设计中也是这样——例如他在设计“短程式圆顶”建筑物中使用的正五边形。

事实上，比例作为美学的形式美规律之一，就起源于建筑。而在17世纪就有人断言：建筑整体的美观来自绝对的、简单的、可以认识的数学上的比例。

3. 古代世界东方的“ϕ 建筑”

不但古希腊人把 ϕ 用在建筑中，而且其他国家最有名的建筑物中也几乎都包含 ϕ——不管是有意还是无意。例如，初建于17世纪的印度泰姬陵就是如此。有的建筑物还在高度的黄金点上设置平台、墙裙或其他装饰物，使单调的建筑多姿多彩，给人以整体上的和谐与悦目之美。



北京老城

在中国，甚至连建筑物的位置，也和 ϕ “心有灵犀”。北京故宫（即紫禁城）中初建于1420年的太和殿（俗称金銮殿）庭院中心，到大明门（后改称大清门、中华门，今已不存在）的直线距离是1 545米；而景山到大明门的直线距离是2 500米。两者的比值正好是0.618。这个事实，让我们突然悟出了明代的设计者为什么把大明门放在距离紫禁城如此遥远的地方——不惜拆除元大都南面的城墙。以前我们总是直觉地认为这是为了延长宫殿的序幕，使进入宫殿的人产生一种期待，但数据却不会向我们撒谎。没有证据表明在中国古代宫殿中运用 ϕ 是受到了西方建筑的影响，只能说明人类对美的追求有着共性，也验证了黄金分割的“天然”合理性。

为了介绍这类北京建筑涉及的φ，有人还发表了文章《北京城中的黄金分割》。不过，当年的建筑师是否如此追求人类共有的美，就这样有意而为，必须得到确切无疑的史料支持，否则只能认为是巧合。

6.3.3 现代主义建筑中的φ

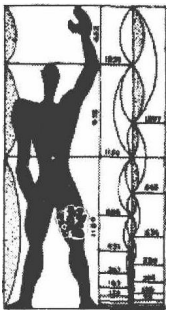
1. 勒·柯布西耶的黄金尺和朗香教堂

在19世纪后期，现代主义建筑的思潮开始出现，到20世纪20年代成熟。

格里斯出生在瑞士的一个钟表匠之家，1717年移居法国，从1920年起开始使用笔名勒·柯布西耶。这位被誉为开创现代主义建筑鼻祖和里程碑式的人物，是20世纪最富激情的建筑大师。他和德国的格罗皮乌斯、范·德·洛，美国的赖特，并称为现代建筑派或国际形式建筑派的“四大巨人”。



勒·柯布西耶

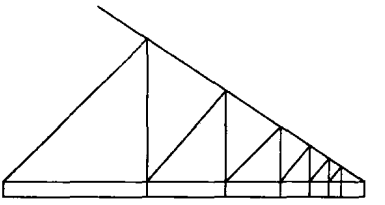


柯布西耶的模度体系

勒·柯布西耶一生探讨美与数的关系——其中融合了数列、音乐、排版、比例等，对现代主义建筑贡献颇多，但在下面只提到其中关于φ的两个。

“黄金（基准）尺”是勒·柯布西耶根据人体结构比例与数学原理发明的设计用尺。他以身高183（单位是厘米，下同）的人的肚脐高的约值（113）为基准，依照黄金比递增制成“红尺”：113，182.8，295.9，…。或者以基准的2倍即226（向上直举手时手指尖距离地面

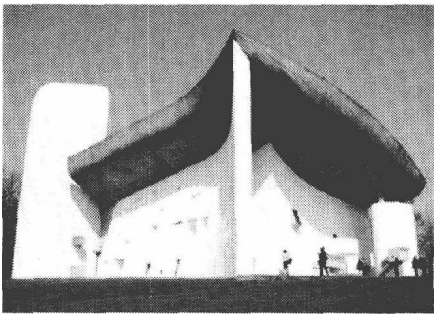
的高度）递减制成“蓝尺”：226，139.7，86.3（胳膊下垂时手掌呈水平状的高度）……于是，226，183，86 这些人体日常活动的尺度都体现出来了，所以黄金尺也是符合人体的尺子。这个人体的尺寸体系，被称为人体的“模度体系”。



黄金尺

黄金尺很有实用价值而且使用方便，被广泛用于建筑设计、产品设计以及雕像和绘画之中。

勒·柯布西耶另一个体现 ϕ 的作品，是他在 1950～1953 年设计、1955 年落成的朗香教堂即洪尚教堂。



勒·柯布西耶设计的朗香教堂

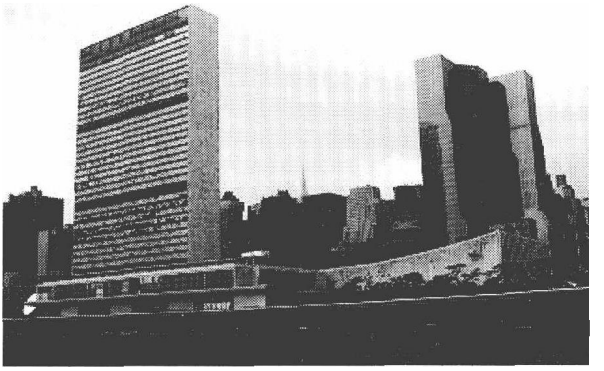
被许多人誉为 20 世纪最为震撼、最具有表现力的建筑之一——朗香教堂，坐落在法国东部上索恩地区距瑞士边界几英里（1 英里合 1.609 344 千米）的浮日山区的一座小山上。它的白色幻象盘旋在欧圣母院朗香村之上——从 13 世纪以来，朗香村就是人们的朝圣之地。

2. 其他现代“ϕ 建筑”

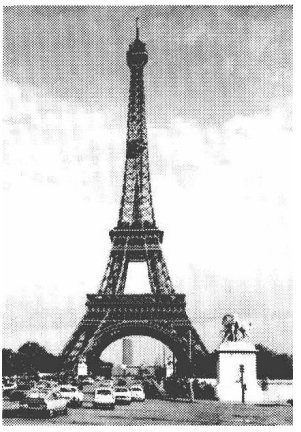
在现代建筑中，许多著名的大建筑师都在他们的设计中运用 ϕ，如德国建筑大师范·德·洛的别墅等。

建于 1947～1953 年的联合国总部大楼（也称联合国大厦），位于纽约曼哈顿岛的东河岸，它的正面就是一个黄金矩形。

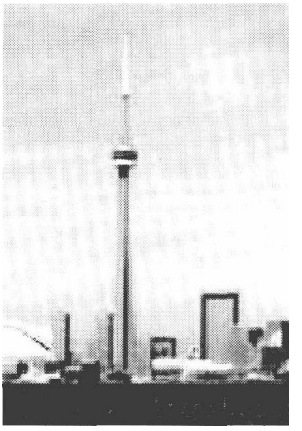
在一些摩天建筑中使用“ϕ 处理”，能使平直单调的塔身变得丰富多彩。在这类高层建筑物的“ϕ 点”布置腰线或装饰物，则可使整个楼群显得雄伟雅致。举世闻名的巴黎埃菲尔铁塔（总高 324 米）、当今



联合国大厦



埃菲尔铁塔



多伦多电视塔



东方明珠广播电视塔

世界最高建筑之一的加拿大多伦多电视塔（即西恩塔或加拿大国家电视塔，高553米），都是根据黄金分割来建造的。为了美化上海东方明珠广播电视塔（总高468米）的塔身，设计师巧妙地在上面装置了晶莹耀眼的上球体、下球体和太空舱，既可供游人登高俯瞰地面景色，又使笔直的塔身有了曲线变化。更妙的是，上球体即观光层所选的位置在塔身总高5/8的地方，这一接近“φ点”的安排，使塔体挺拔秀丽，给人以美的享受。

6.4　台艺、音乐、文学、书法中的 φ

1. 台艺中的 φ

φ 在舞蹈演员和舞台艺术中也有不少应用。

芭蕾舞演员身段苗条，但有的演员肚脐以下部分和身高之比依然达不到 φ——通常只有大约 0.58。只有像俄罗斯的斯维特拉娜·潘克拉托娃那样有“天下第一长腿”的女子，才符合肚脐以下部分和身高的“φ 比例”。她身高 1.98 米，拥有的“天下第一美腿”竟长达 1.32 米，曾在 2008 年 9 月 16 日到“吉尼斯”总部所在地伦敦，宣传 2009 年版的《吉尼斯世界纪录》。

于是，芭蕾舞演员们就踮起脚尖跳舞，让“身高”增加七八厘米，就是为了让身体的比例更接近 φ 而妩媚动人。所以，看芭蕾舞是一种美的享受——除了剧情，还有“φ 身段”。此外，有人认为，一些女性穿高跟鞋的原因，除了使身材看起来显得高挑苗条以外，还有使肚脐以下部分和身高之比接近 φ 的作用。



芭蕾舞演员踮起脚尖跳舞



有经验的报幕员站在舞台前沿的φ点上

有经验独唱演员和报幕员，往往站在靠舞台前沿长宽各自1/3强的地方，而不是站在舞台正中。这就使整个舞台显得和谐而不至于迟钝刻板，观众看上去也感到亭亭玉立、光彩照人，非常得体。原因是他们是站在了舞台的宽度和长度的最佳点——黄金分割点上。所以，法国数学家笛卡儿说："美是一种恰到好处的适中。"柏拉图说也说："美就是恰当。"

2. 音乐中的φ

音乐家们也有意识地利用φ来"美化"作品，让音乐悦耳动听——德国著名作曲家巴赫的《神游》D小调中7对间奏，就是一个典型的例子。另一个典型的例子，是奥地利著名作曲家莫扎特的"安魂曲"第一段：第一部分有38个节拍，第二部分有62个节拍，比值接近φ。此外，在以下著名作曲家的音乐作品中，也流淌着黄金分割的完美和谐：德国贝多芬、匈牙利巴托克、法国德彪西、奥地利舒伯特。在他们的乐章、节中，乐曲中的大小高潮大都处在乐曲5:8的交叉点上。

意大利著名提琴制作师斯特拉迪瓦里在制造小提琴时也运用了黄金分割来确定f形洞的确切位置——在《达·芬奇密码》的第20章也提到这个事实。

1952年12月，在武汉召开的全国聂耳、冼星海作品研讨会上，武汉音乐学院教师童忠良宣读了论文"论《义勇军进行曲》的数列结构"。这位后来成为武汉音乐学院院长的音乐教授，在论文中用黄金分割、0.618法、*F*数列等数学理论，分析了《义勇军进行曲》的曲式结构，提出了一种突破传统式结构的理论——"长短型数列结构"体制。

当然，音乐不但与φ有关，而且和数学的其他数字也密切相关。中国的七弦琴（一种古琴）"以琴长全体三分损一，又三分益一，而转相增减"就是取弦长1的7/8，5/6，4/5，3/4，2/3，3/5，1/2，2/5，1/3,1/4，1/5，1/6，1/8作为13个徽（有人把"徽"写作"徽"）。

波兰著名作曲家肖邦的乐谱“具有乐谱语言的数学特征”。欧拉在1731年写成的专著《建立在确切的谐振原理基础上的音乐理论新研究》，对数学和音乐都有研究。


巴罗

其实，音乐之美就是找到声音的“最佳平衡”。这正如英国天文学家、理论物理学家、数学家约翰·达维德·巴罗在《不论——科学的极限与极限的科学》一书中所说的那样：太多的惊喜会让人有讨厌的噪声之感，而太熟悉又会很快让大脑厌倦。也许，没有“噪声”和“厌倦”的“最佳平衡点”就是 ϕ。

3. 文学中的 ϕ

文学作品中七言诗、七绝诗的音节分四个字和三个字两部分。这样读起来和谐，听起来悦耳。例如，中国北宋著名诗人王安石的《泊船瓜洲》中的“春风又绿//江南岸，明月何时//照我还”。而这“四”恰好是“七”的0.618倍最接近的整数。而五言诗、五绝诗的音节，分为两个字和三个字两部分则读起来朗朗上口。例如，中国唐代著名诗人王维的《使至塞上》中的“大漠//孤烟直，长河//落日圆”。这“三”也是“五”的0.618倍最接近的整数。

“宓妃愁坐芝田馆，用尽陈王八斗才。”这是中国唐代著名诗人李商隐的《可叹》中的诗句。那么，这里的“宓妃”和“陈王”分别是谁？原来，宓妃是传说中的中华民族居“三皇”之首的人文始祖伏羲氏的女儿，又叫雒妃，因迷恋洛河（水）两岸的美景，降临洛河岸边。她在渡河时不幸被淹死，成了洛水的女神，所以又名洛神。而陈王就是三国时期的魏国诗人曹植。在中国，战国时期的哲学家惠施是学富五车，而曹植则才高八斗。这两个牵涉“学识”和“才能”的著名典故（后来成为成语）中，恰好有5和8这两个 F 数，这不能不说是一件趣事！

苏联著名的俄罗斯诗人沃兹涅先斯基的诗《戈雅》中的叠句，也

有意识地用黄金分割来进行“美化”。

4. 书法中的φ

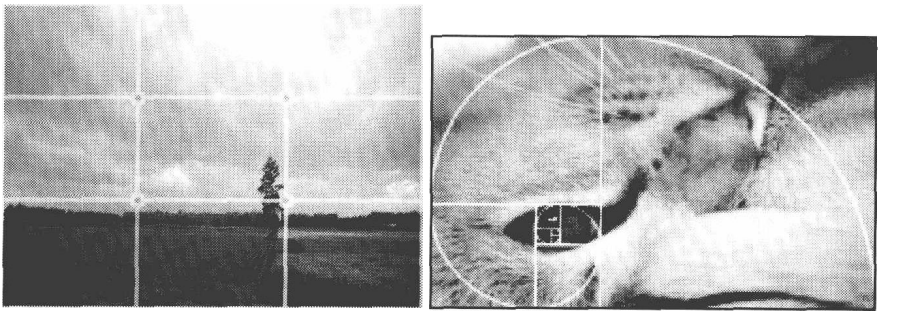
在书法艺术中也能体现φ。

据说，《香港回归祖国纪念碑》碑文的书写者、“书法奇人”深圳大学书法研究所所长李中原，创立了一种汉字结构的黄金分割理论。根据这一理论，他在1998年研发了“黄金分割习字格”等书法教学联系工具，获得了国家专利。

1999年，李中原的论文“汉字结构比例关系中的黄金分割现象研究”、“黄金分割习字格运用原理”在《中国书法》杂志上发表后，曾在书坛上引起过轰动。

6.5 φ与摄影

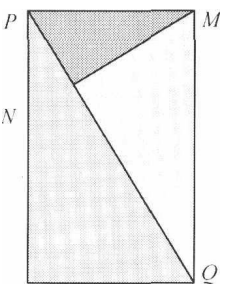
摄影画面的构图，与φ有自然的联系。例如照相机的片窗：“135相机”是24×36——宽长比为接近φ的2:3，2和3都是F数，这是很典型的；“120相机”是4.5×6——宽长比约为接近φ的3:5，5也是F数；6×6虽然是方框，但后期制作时仍多数裁剪为接近黄金矩形的照片。只要我们翻开影集看一看，就会发现大多数的画幅尺寸，都接近黄金比。



三分法：主题景物在四个交叉点之一上　　黄金分割法：主题景物分配得更精确

在摄影中的三分法，是指将画面纵横均分为三份，从而使画面被割成为九个相等的方块（称为九宫格），四条分割线上也出现四个交叉点。通常摄影者就在这四点上选择一处作为“趣味中心”（例如主题景物）的最佳位置。许多摄影者都知道如何运用三分法，但有人却误认为三分法和黄金分割法是一样的。其实，尽管它们之间很相近，但实际却有差异：三分法很简单，黄金分割法更精确。

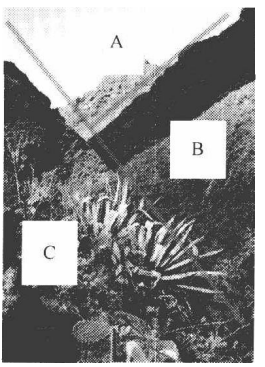
另一种构图方法是将矩形（不一定是黄金矩形）分为理论上的三份：把矩形的某一个顶点 M 和对边的黄金分割点 N 连接起来，与对角线 PQ 相交就成了三个直角三角形。



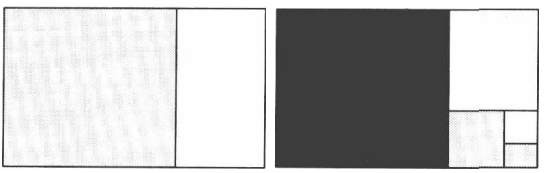
矩形按黄金分割为三份

摄影时，就按这样的模式把景物大致安排在 A，B，C 三个区域。当然，也可以把这三部分旋转 90°，180°或 270°来完成构图。

在摄影实践中运用黄金分割法，主要表象在黄金分割点、线的运用中。黄金分割点，在全景构图中，多是主要表现对象或视觉中心所处的位置；在中、近景构图中，多是景物主要部位所处的位；在人像构图中，常常是将人的眼睛放在接近 ϕ 点的位置。黄金分割线，多用作地平线、水平线和天际线所处的位置。



景物被黄金分割为三个区域

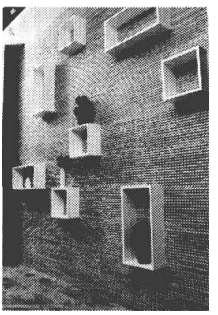

黄金矩形的照相纸不但易剪裁，而且节约纸张

许多照片的长宽之比都接近φ，这样比较美观。例如，通常说的“一寸照片”（这里的“寸”指“英寸”，1英寸合2.54厘米）的尺寸是2.54厘米×3.62厘米，宽和长之比约为0.7。而实际有图像的部分，则更接近φ。如果照相纸是黄金矩形，则不但容易剪裁，而且节约纸张。

6.6 φ在艺术的其他场合

报纸、杂志、书籍的长宽尺寸，是可以在一定范围内任意选择的。不过，通常我们看到其中许多的长宽之比都接近φ，因为这样比较好看。

高清晰度大屏幕电视机（俗称“宽屏电视机”）的屏幕，高和长之比设计成9:16——这也接近黄金分割。有的电脑显示器和宽屏电影银幕也是这样。



黄金矩形用于室内装饰

在家具与室内装饰领域，意大利汤玛莎拉地柜的长高比，地柜上小相门的长宽比都符合φ。对开门的下方有一对抽屉，抽屉的长度与柜门的高度以及整个衣柜的宽度与高度之比，也都符合φ——这种大黄金矩形套小黄金矩形，使得一件家具的整体处处都显得匀称和谐，优美雅致。用黄金分割设计的单个家具组合而成的成套家具，其整体的协调性与观赏性，更可以达到整体的和谐之美。此外，范·德·洛的巴塞罗那椅，也按φ造型。如果家具摆设考虑φ，看起来会更加协调美观。

意大利著名建筑师阿尔多·罗西设计的正圆锥壶等，也按φ造型。

据说，在“波波系列”中，音乐甲壳虫E816车载MP3，外形也采用黄金矩形设计，更得显漂亮匀称，惹人喜爱。

此外，包装、广告、商业活动、标准信用卡、扑克牌、工艺装饰、

服装款式等，也用到 ϕ。

6.7　多彩的艺术与神奇的科技相通

1. 多彩的艺术

艺术是多彩的——这无需说明。艺术是多彩的还有下面一层意思。

黄金分割是许多人习惯的形式法则和审美观念，在许多情况下都会“爱不释手”。但是，客观事物变化丰富、多姿多彩，创作意图、主题选择等也各不相同。举例来说，在体现了“ϕ 构图”的“洋图”《蒙娜丽莎》中，她那神秘的微笑扣心动人；在北宋画家张择端创作的“土画”《清明上河图》中，并没有发现“ϕ 元素”，但采用的全景式构图手法，也能让当年繁华汴京的清明节千姿百态的春色盛况美不胜收。所以，黄金分割的形式，并不能完全满足多端的变化与创作者的要求。因此，不拘泥于“ϕ 手法”来处理构图，也符合艺术创作的规律。换句话说，艺术应“不拘一格选‘人才’”，而不要排斥“异己”——为着自己更加万紫千红、美丽动人。

2. 艺术、人文与科技水乳交融

一些认为，自然科学和人文科学、社会科学之间，有一条不能逾越的界线——就像一条铁路的两根铁轨那样，并行不悖、永不交叉。学科分“文”“理”，就折射出这种观点。他们还认为，文化艺术和科学技术之间，也有类似的鸿沟。

那么，①真有这条鸿沟吗？②如果有，应该填平吗？③如果填平，又有什么好处呢？

当代日本数学家、数学教育家米山国藏说，感受到自然和人类的美，并用美丽的语言去讴歌，这就是诗歌；用美丽的色彩和形态去表达，这就是绘画和雕刻；而感受到美在“数”和“形”之中，并用理智的引导和证明去表现，这就是数学。美国数学家、数学史家莫里斯·克莱因的看法大同小异：“音乐能激发或抚慰情怀，绘画能使人赏心悦

目，诗歌能动人心弦，哲学能使人获得智慧，科技能改变物质生活，而数学则能提供上述的一切。”

所以，中国著名科学家钱学森说：“中国的科学技术要和文化艺术相结合，才能走在世界前列。”而美国普林斯顿大学大力发展一个看起来似乎与就业无关、最不赚钱的专业——艺术系的做法，传递校方着这样一种理念：艺术修养会伴随人的一生，而就业赚钱只是暂时的。这里的背景是，每过20年，普林斯顿大学都要讨论是否设立两个最赚钱的商学院和法学院，但每次的答案都别无二致：No!

“哪一样也不外行”的德国社会主义理论家、哲学家恩格斯，则进一步把科技、哲学与民族的命运联系起来：“没有哲学思维的民族，是没有前途的民族。”

于是，前面的3个问题就有了答案：自然科学和人文科学、社会科学之间，文化艺术与科技之间都没有鸿沟，而是“心有灵犀一点通”；对于说有的人，应该填平；好处之一是，成为有前途的民族而走在世界前列。无数的事实都证明了这一真理——例如，爱因斯坦的相对论，就具有哲学沉思、物理洞察、数学优美和技术应用的理论，是科学与哲学、艺术相结合的产物。

第7章　生命暗藏的美——生物与φ

生命的奥秘在于生是向前的，理解却是向后的。

——丹麦宗教哲学家克尔凯郭尔

为什么人的平均高度几千年来始终保持在1.73米上下？为什么老鼠的眼睛那么小，而马的眼睛那么大？为什么草长不成参天大树？

这些看似古怪的问题，只要一直追问到底，就会发现，它们背后总有一个“神秘的力量”，或“神秘的法则”在支配着。这个神秘的法则，就是我们所熟知的“φ法则”。

7.1　人体中的φ

“美的至高无上的部分，无法以彩笔描绘出来。”这是英国哲学家弗朗西斯·培根的名言。借用它来赞美我们“万物之灵”的形体，是再恰当不过的了。

那么，这“无法以彩笔描绘”的人体和φ有没有联系呢？有的。

7.1.1　从维特鲁威到达·芬奇

人体的比例显然是古人关注的内容，古罗马建筑师维特鲁威是最早的人体比例（与建筑比例）的研究者。他在公元前1世纪就说，具有完美比例的人体的身高与伸展开的手臂的长度相等。人体的高度与伸展于的手臂的长度形成了一个正方形将人体围住，而手和脚正好落在以肚脐为圆心的圆上。在这个体系中，人体在腹股沟处被等分为两个部分，

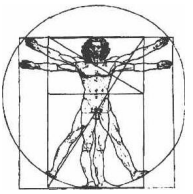


图 7-1

肚脐则位于黄金分割点上。

到了 1490 年前后，达·芬奇则绘出了我们在前面看到过的《维特鲁威人》。在图 7-1 中，我们可以看到维特鲁威所说的“肚脐则位于（整个身高的）黄金分割点上”。

7.1.2 “形式爱好者”对人的形体研究

1. 人体外形中的 φ

世界各地的“形式爱好者”的研究对象之一是人体。他们高兴地指出，φ 甚至可以用来联系人的高度和肚脐高度这样似乎风马牛不相及的东西。有人测量了 65 位妇女，得出了一个“优美人体“的高度关系：头到肚脐的高度与脚到肚脐的高度之比为 φ，或者说肚脐的高度与身高之比为 φ。也就是说，肚脐是人身高的“黄金点”（图 7-2）。因此，男子在肚脐处扎五花八门的腰带，以显示阳刚之美；女子也在这里扎五彩缤纷的腰带，以显示阴柔之美。此外，西医也认为肚脐是人体结构比例的黄金点。

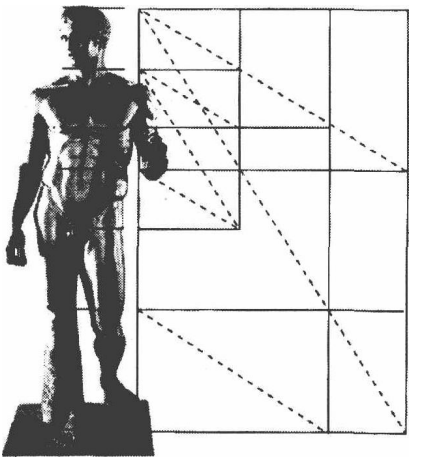


图 7-2　人体中的一部分黄金点

肚脐不但是人体身高的黄金点，还是医疗效果的黄金点。

人体还有几个黄金点：肚脐以上部分的黄金点在咽喉，肚脐以下部分的黄金点在膝关节即“髌骨”（图 7-2），上肢（肩峰到中指尖）的黄金点在肘关节即“鹰嘴”（图 7-3），食指的黄金点在第一个骨节（图 7-4）。除此以外，近年还发现了人体结构中的如下多种黄金点、多个黄金矩形、多个“黄金指数”。

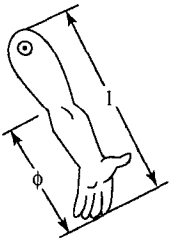


图 7-3

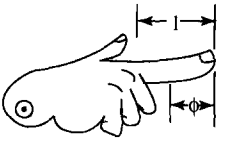


图 7-4

多个黄金点中有：

（1）乳头是躯干纵轴（锁骨到腹股沟）上的黄金点；

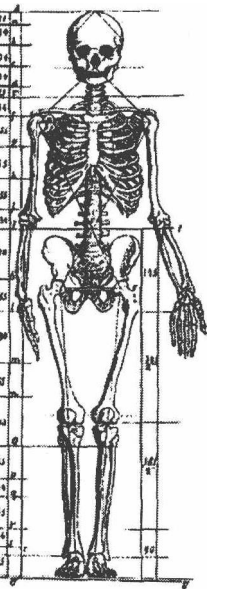
（2）眉间点是发际 – 颏底连线距上 1/3 与中下 2/3 的黄金点；

（3）鼻下点是发际 – 颏底连线距下 1/3 与上中 2/3 的黄金点；

（4）唇珠点是鼻底 – 颏底连线距上 1/3 与中下 2/3 的黄金点；

（5）颏唇沟正路点是鼻底 – 颏底间距下 1/3与上中 2/3 的黄金点；

（6）左口角点是口裂水平线左1/3与右 2/3 的黄金点（右口角点类似）。



蔡辛的精细人体结构

多个黄金矩形包含：

（1）躯体轮廓——肩宽与臀宽的平均数为宽，肩峰到臀底的高度为长；

（2）头部轮廓——头部长（颅顶到颏部）与宽（两侧颧弓突端中间距）之比；

（3）面部轮廓——眼水平线的面宽为宽，发际到颏底间距为长；

（4）鼻部轮廓——鼻翼为宽，鼻根到鼻底间距为长；

（5）唇部轮廓——静止状态时上下唇峰间距为宽，口角间距为长；

（6）左右手的手部轮廓——手的横径为宽，五指并拢时取平均数为长。

此外，还有上颌切牙、侧切牙、尖牙轮廓——最大的近远中径为宽，齿龈径为长。

多个黄金指数包括：

（1）鼻唇指数——鼻翼宽与口角间距之比；

（2）目唇指数——口角间距与两眼外眦间距之比；

（3）上下唇高指数——面部中线的上下唇红高度之比；

（4）目面指数两眼外眦间距与眼水平线的面宽之比；

（5）四肢指数——肩峰到中指尖连线为上肢长，与髂嵴到足底连线为下肢长，两者之比。

对于人体中存在这么多的φ，我们想起了毕氏的名言："人是万物的尺度。"

人体中存在这么多的φ的系统研究者，是大名鼎鼎的德国哲学家黑格尔的学生、德国数学家和美学家蔡辛。他在1854年和1855年分别发表了《人类躯体平衡新论》和《美学》。这两本书首次正式提出了人体中的"黄金分割原理"，进行了理论阐述。当然，这是他对人体进行了大量测算之后得到的统计结论。

此外，蔡辛还用严格的数学方法研究了古代一些著名建筑、雕塑和绘画中的比例问题，看这样才能达到整体结构的严整与和谐。于是他断言：宇宙万物，凡是符合黄金分割的，总是最美的形体。他还用归纳法

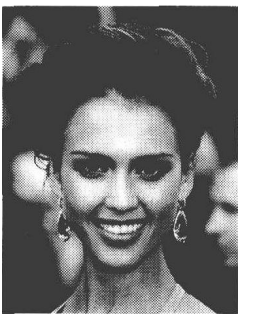
导出结论：φ 是解开自然美和艺术美奥秘的关键，具有广泛的美学价值。

2. 用“罗丹的眼睛”看“美人”

有人说：“仁慈的‘造物主’用 φ 打造漂亮女孩们亭亭玉立的身材。”那么，“造物主”打造的“亭亭玉立的身材”究竟什么样呢？



“瓜子脸”



杰西卡·玛丽亚·奥尔芭

据说在 20 世纪末体形健美者的容貌外观结构中，至少有 4 种共 42 个因素和 φ 有关——18 个黄金点、15 个黄金矩形、6 个黄金指数、3 个黄金三角。所以，一些美容专家就指出：φ 具有重要的审美意义，特别是在美容整形实践中有重要的指导作用。例如，有人就认为“瓜子脸”（上部略圆、下部略尖的脸，即“鹅蛋脸”）的理想宽长之比，应为接近 φ 的 21∶34。据说，美国影星杰西卡·玛丽亚·奥尔芭、英国名模莉兹·赫利、加拿大－美国乡村歌手仙妮亚·唐恩就符合这一比例。

一般来说，凡是符合 φ 的容貌和形体就是美的，但实际大多数人很难完全符合要求。因为人体美是受诸多因素共同影响的结果，所以不能把这一美学原则绝对化。不过，如果人体各部位的相互比例关系达到或接近上述标准，就显得匀称和谐，给人以美感；如果与上述比例关系差距较大，就显示某种缺陷和不足。美容工作的任务就是运用 φ 以及其他原则，对有缺陷的容貌和形体进行修饰和再塑造。

不过，美国新墨西哥州立大学的爱尔兰心理学家维克托·约翰斯顿则提出了另外一种“0.7 标准”——$25/36 \approx 0.7$。他设计一个电脑软

件，可以把两人的相貌融合。并据此设计一个测试游戏：首先出现30个人的面孔，让人用9分制评分，最高分的与另外两个面孔融合，变成两个新面孔，然后把得分最低的两个淘汰。如此一轮轮淘汰下来，剩下的面孔越来越接近美的标准。

约翰斯顿还发现，人们所喜爱的女性面孔大多是，前额高阔、嘴巴丰厚、下颚精致、鼻子和下巴小巧，眉毛以下所占比例明显小于平均数。理想的男性容貌是，下颚阔大，下巴坚厚，两眉明朗。女性对身段的追求，虽说不同时代有不同的标准，但有一点亘古不变——三围比约36:25:36（对应厘米数之比约为91:63:91）的所谓“魔鬼身材”。美国得克萨斯州大学的心理学家达文德勒·辛格，搜集了1922～1990年《花花公子》杂志跨页中，那些有“天使容貌”的女郎和“美国小姐”的三围尺寸，发现不论何时、不论肥瘦，三围的比，基本上都是如此。例如，人们曾经在美国影星玛丽莲·梦露的墓碑上发现了一组让人迷惑不解的奇怪字符——“37，25，35，R.I.P”。后来，“梦露研究会”揭开了这个谜：它们分别是梦露的胸围、腰围和臀围的英寸数，但另一说分别为为89厘米，56厘米，89厘米。此外，辛格还绘制过一组女性身材轮廓图，向参加试验的家庭、年龄、国籍各异的男性展示后，要求他们按吸引力、性感、健康、生育力等几个方面为这些女性打分。但是，不论天真孩童还是耄耋老人，最令他们欣赏的总是那些三围比例符合或接近最佳值、以肚脐为界的上下身之比为0.618的女性。



玛丽莲·梦露

由此可见，在企图变成“标准美人”时，把φ作为一个人体健美的标准尺度之一，当然无可非议；但不能忽视存在着“模糊特性”——同其

他美学参数一样，都有一个允许变化的幅度，并且受种族、地域、个体差异的制约，不能绝对化。此时，我们想起了法国杰出雕塑家罗丹那句或许比他的作品还要深入人心名言："这个世界不是缺少美，而是缺少发现美的眼睛。"事实上，完美的"ϕ 人体"仅仅是一种理想状态，人类也和其他生物一样很难达到。所以，用整形来实现"形体美"应慎重，更不能因此忽略身心健康。此外，无论是中国古代的"环肥"或"燕瘦"，还是汤加人的肥胖美或法国人的骨感美；也无论是粉黛上脸，还是素面朝天，都是美。于是，用"罗丹的眼睛"就能看到：浓妆淡抹总相宜，洗净铅华也美丽。

事实也是如此。据美国一个杂志报道，美国一家权威机构曾花费大量人力物力，在欧美等地寻找五官比例最接近黄金分割的女人，以便验证最标准的美女是什么样的。他们花了几年时间，最后找到了一个五官几乎完全等于黄金分割的女人——某个不入流的模特儿。看到她之后，专家们非常吃惊和失望——虽然还算漂亮，但远不像人们希望的那样美丽迷人。这充分证明，美丽的确是没有统一标准的。这正如莎士比亚所说："有一千个美学家，就有一千个什么是美的答案。"

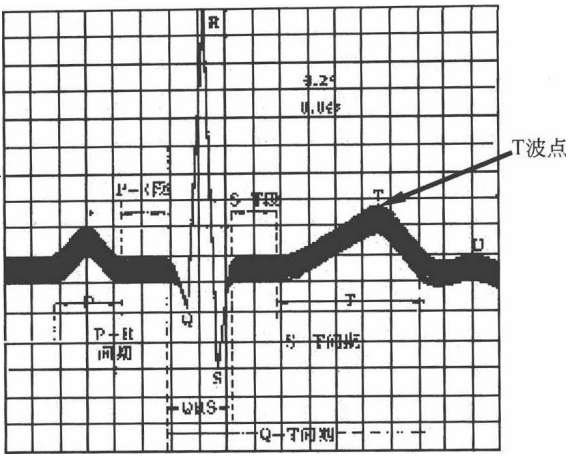
3. 探索并无有穷期

在审美的问题上，还有许多未解之谜，下面就是一例。美国科学家发现，让一个只有 6 个月大的婴儿看几幅不同的女性照片时，他会长时间地盯住其中最漂亮的那幅并开心地笑；而看比较丑的照片时，他不仅不爱看甚至会哭啼。当然，这里所谓的"漂亮"、"丑"是以已有了一定的审美能力的成年人为标准来说的——符合形式美的标准。

这里的问题是，几个月大的婴儿为什么会与成年人在对形式美的选择上是同样的？这是否说明了的确存在某种对人类来说永恒的、不以人的意志为转移的基本标准，来支配人的审美活动？

7.1.3　人体内部的 ϕ

医学专家观察到，当人感觉快乐欢愉时，脑电波频率下限约 8.1 赫



正常人的心电图

兹，上限约12.9赫兹，上下限的比接近0.618。正常人的心跳在心电图上也显示出T波出现的位置恰好大约是一次心跳节拍的φ点上。

人体中的有4个含量接近φ。组成人体含量最多的物质是水，成年人体水分约占体重的60%～70%。静脉和毛细血管中的含血量，约占人体中所有血量的60%。一次最大呼气量约占肺部气体总量的60%。正常血压的舒张压与收缩压之比也约为60%。

人的消化道总长约9米，其0.618倍约为5.5米，正是小肠的长度。而营养物质的消化吸收，就在小肠进行。这一特点，适合以素食为主的混合膳食结构，所以素食应约占食物总量的60%——接近0.618。

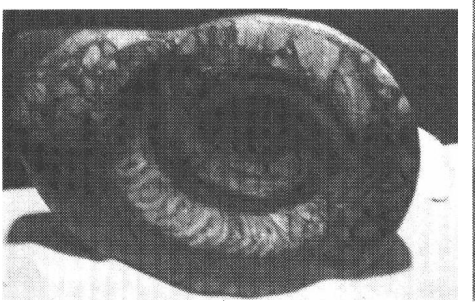
7.2 动物中的“φ密码”

7.2.1 动物身上的黄金螺线

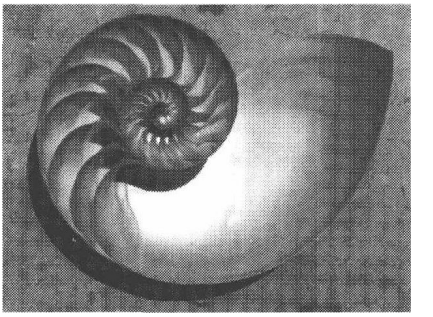
1. “上苍”的神秘使者鹦鹉螺

鹦鹉螺是一种有趣的无脊椎海生动物——属于软体动物门头足纲。

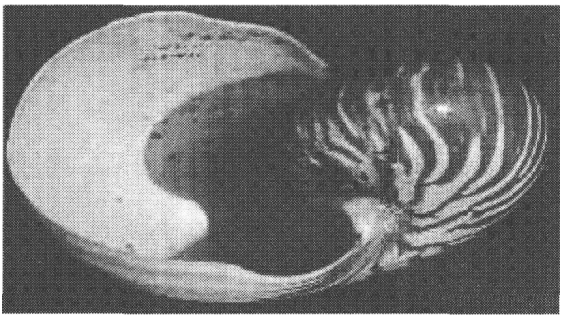
在西太平洋诸岛附近的浅海中，广泛分布着包括纸鹦鹉螺等仅存的几种鹦鹉螺，而其他类型和属种的鹦鹉螺已经灭绝。现在最古老的鹦鹉螺化石，是距今大约 5 亿年前寒武纪晚期的。据说，鹦鹉螺外壳的螺旋形，在 5 亿年的进化过程中几乎没有改变。不过，英国生物学家西奥多·安德烈亚斯·库克在他的《生命的曲线》一书中，把鹦鹉螺的生长方式描述为“生命的基本过程”，每一段螺线表现了每个生长阶段，新生长的螺线非常逼近于黄金螺线，而且比原来的大，但它和其他贝类的成长方式，从来都不是精确的黄金螺线。更确切地说，生物成长方式的趋势，是努力接近黄金螺线，但并没有准确达到。



鹦鹉螺化石

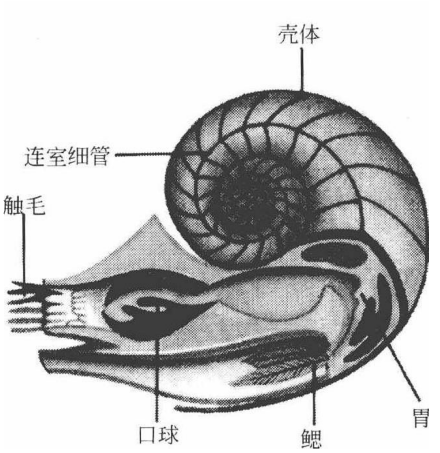


具有“触环角石式壳”的鹦鹉螺



具有“鹦鹉螺式壳”的鹦鹉螺

鹦鹉螺的白色石灰质外壳，间杂着橘红色的条纹。它有多种外形，许多呈螺旋状而且左右对称，但我们感兴趣的是“触环角石式壳”和最常见的“鹦鹉螺式壳”——都呈现明显的黄金螺线。据说最著名的、



鹦鹉螺的结构

自然发生的黄金螺线，最早就是在鹦鹉螺身上发现的。

被剖开的鹦鹉螺，像是旋转的楼梯，又像一条百褶裙——一个个间隔（“气室”）由小到大顺势旋开，无论是正剖面的面积还是积分之后的体积，都呈 F 数列。这些气室是它的“浮筒”，决定了鹦鹉螺的沉浮。据说，正是这个结构成了开启潜艇构想的钥匙——世界上第一艘蓄电池潜艇，以及于1954年1月21日在美国下水的世界上第一艘核潜艇，都因此被命名为“鹦鹉螺”号。“鹦鹉螺”号，也是《海底两万里》一书描写的当时世界上独一无二的潜水船。这本经典科幻小说的作者，是“科学幻想小说之父”、法国著名作家儒勒·凡尔纳从1869年3月20日开始在《杂志》期刊上连载的。

1996年，两位细心的美国地理学家在现存的几种鹦鹉螺气室上，找到了许多类似树木年轮的细小波状条纹——30条生长线。而这些生长线在不同地质年代的鹦鹉螺化石上不同——古生代奥陶纪为9条、石炭纪为15条，中生代侏罗纪为18条、白垩纪为22条，新生代白垩纪为26条。但同一地质年代的条数完全相同。他们由此推定，月球离我们越来越远，以至绕地球一圈的时间（“1个月”）会越来越长——从…，9，15，18，22，26，…，直到现在的30天。

2004年，两位科学家——法国国家科研中心的维利埃和德国洪堡大学的迪特尔·昆，发表在《科学与未来》杂志上的研究表明，他们所研究的两千种鹦鹉螺化石表明，它们都在二叠纪末集体“海底蒸发”。他们由此断定，此时一定有一次地质史上的生物大灭绝。

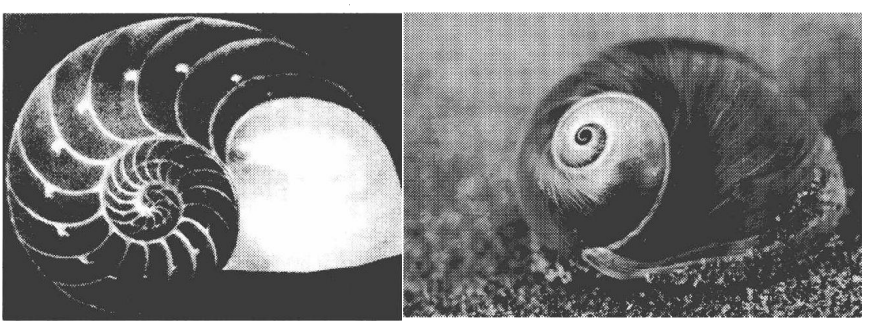
……

总之，鹦鹉螺是“上苍”派到“人间”的、携带“ϕ 密码”的神秘使者——它们“隐藏”在海洋深处，留给我们数学、物理学、生物学、地质学、天文学、进化史、古代气候等多方面的宝贵信息。

感谢鹦鹉螺！

2. 动物身上的黄金螺线

在古代的海洋中，有一种无脊椎动物引起了古生物学家的注意，那就是生于中奥陶纪到晚白垩纪（距今约 5 亿年到 0.6 亿年前）的菊石。后来，菊石已经灭绝——现在只能从化石等方面得到它的某些知识。它主要由碳酸钙构成的壳体表面，通常具有类似菊花的线纹，所以得此美名，而这是古生物学家关注它的原因之一。菊石的形状五花八门，其中有些呈螺旋状——特别是黄金螺线状。这里要说明的是，有人认为鹦鹉螺就是菊石，也有人认为鹦鹉螺是菊石的“亲戚”——菊石由鹦鹉螺演化而来。

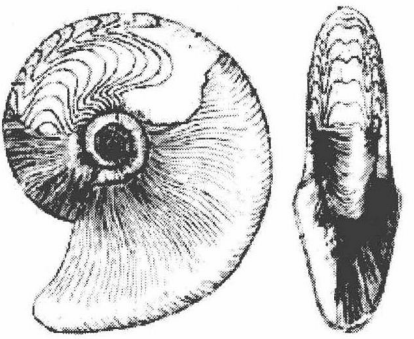


动物身体上的螺旋

其实，不但在菊石外壳上有黄金螺线，而且在许多动物身体上都可以找到黄金螺线——某些动物的角质体（例如山羊角和牛角）上，某些软体动物——例如蜗牛、海星、贝壳和一种叫梭尾法螺的海螺的外壳上，都发现了黄金螺线。

海狮螺和其他锥形贝壳的外壳也呈螺线——一种三维螺线。

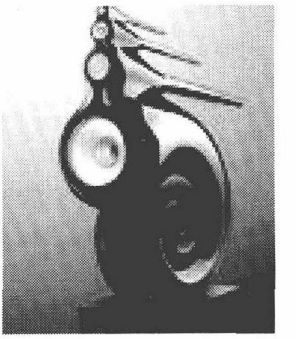
据说，古希腊人认为鹦鹉螺、蜗牛等那黄金螺线形的外壳是完美的象征。也许现代人也有同感——因此把诸如音箱等物件，做成了黄金螺



菊石



海狮螺



鹦鹉螺形的音箱

线形。

7.2.2 动物身上的φ

1. 动物形体中的φ

除了许多动物身上的黄金螺线以外，有的动物的形体还直接与φ有关。

许多昆虫身上的分节点，符合φ。

许多形体优美的动物形体——如马，骡、狮、虎、豹、犬等，大凡看上去健美的，其身体部分的长宽比大体上接近φ。而以牛、马、狮、虎的前肢为界作一竖直线将躯体分为两部分，就会发现这两部分的水平长度之比接近φ。

许多蝴蝶身长与双翅展开后的长度之比，也接近φ。

许多鱼类的身体与φ也密切相关。例如，在虹鳟身上的三个黄金矩形，表明虹鳟的眼睛与尾鳍在相对位置上与二次黄金矩形相关；而且它的尾鳍也有某种“φ比例”。此外，热带鱼种蓝神仙则可完整地放进黄金矩形中，而鱼嘴与鱼鳃恰好位于鱼体高度的“二次黄金分割”线上。

2. 动物体温中的φ

禽兽等高级恒温动物的体温范围为37～39℃——把液态水的范围

0～100℃作黄金分割后的一个黄金点（约38℃）。那么，动物体温为什么不在另一个黄金点（约62℃）上呢？

有人作了下面的解释。自从宇宙大爆炸以来，伴随着整体的增熵过程，还有局部的减熵过程。太阳的形成、生物的进化，都是一个减熵过程，这一过程包括生物体温从低温向高温进化。因此，生物首先进化到了第一个黄金点38℃，这是自然的发展过程。

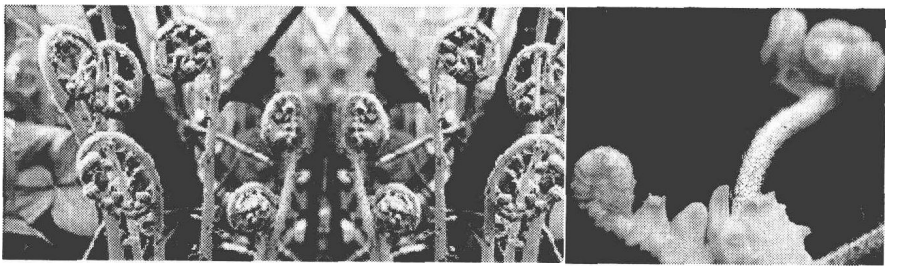
7.3　植物中的 ϕ

植物中的 ϕ 可从两个方面看出："肢体"的形状和分布。

7.3.1　植物"肢体"的形状

蕨，别名又叫做龙头菜、如意菜等。蕨类植物（例如蕨草，即蕨溪草）又叫羊齿植物，是最低级的高等植物，可食用。它的琴状梢头类似小提琴的头部，呈黄金螺线。

我们在4.4节中提到的波斯菊、向日葵等的花或果，也是呈黄金螺线分布。



蕨类植物的琴状梢头

7.3.2　植物"肢体"的分布

1. 植物"肢体"上的黄金分割

有的植物不但形状呈黄金螺线，而且叶子在叶柄上的距离，也符合

黄金分割——蕨草就是其中之一。

更使人赞叹的是，俯视自下而上轮生的相邻两片叶子，也按黄金分割来分布——把360°角严格分割为$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\times360°=222.49\cdots°$和137.50…°（称为“黄金角”，图7-5）。蓟草等的叶子、梨树等的枝条、玫瑰花或荷花等的花瓣，就是这样。类似的轮生随处可见——例如又名粉莲、胧月、初霜、缟瓣的宝石花。



叶柄上蕨草叶的距离按黄金分割

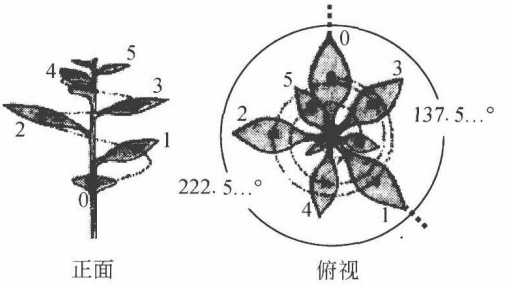
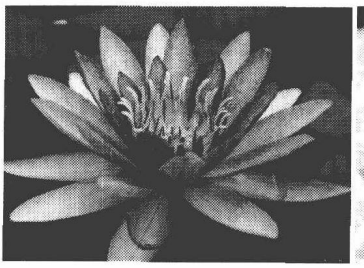
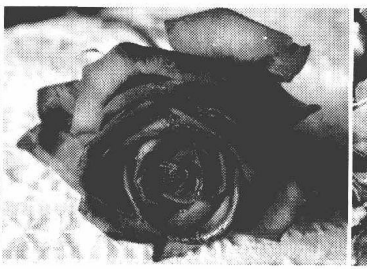


图7-5　蓟草等植物的叶子虽不断轮生，却互不重叠

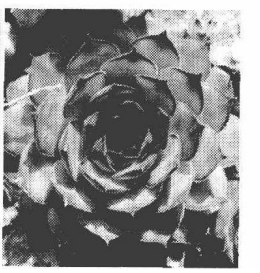
甚至，在植物的一个叶片上也有这种黄金分割。



按黄金角轮生的荷花花瓣



按黄金角轮生的玫瑰花瓣

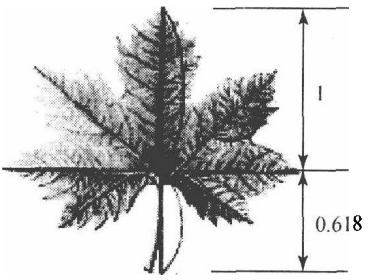


宝石花也按黄金角轮生

2. 植物“肢体”分布的最佳选择

那么，这些植物按“黄金角”分布有什么优点呢？或者问，植物

为什么会按“黄金角”分布呢?



叶片上的黄金分割

原来，这样就能使叶片或枝条虽然不断轮生，但却互不重叠。好处是暴露最大，不会相互遮光而利于充分利用阳光进行光合作用，承接尽可能多的雨水灌溉根部，空气也容易流通利于呼吸作用。对花来说，则意味着在单位面积内排列数目最多，并尽可能多地展示自己来吸引昆虫来传粉。对种子来说，则意味着在单位面积尽可能排列密集，繁衍更多的后代。

那么，黄金角是不是植物的最佳选择呢?

以植物的叶片为例，它是从茎尖的分生组织依次出芽、分化而来的。如果要充分利用生长空间，新芽的生长方向应该与旧芽离得尽可能“远”一些。那这个最佳角度是多少呢?把这个平面角度写成 $360° \times n$ $(0 < n < 1)$，由于左右各有一个角度是一样的（只是旋转的方向不同）——例如 $n = 0.4$ 和 $n = 0.6$ 得到的结果相同，所以只需考虑 $0.5 \leqslant n < 1$ 的情况。如果新芽要与前一个旧芽离得尽量“远”，就应该长到旧芽的对面，即 $n = 0.5$。但此时第 2 个新芽就会与旧芽同方向，第 3 个新芽与第 1 个新芽同方向……也就是说，仅绕了 1 周就重叠了，而且总共只有两个生长方向，中间的空间都浪费了。如果 $n = 0.6$ 呢?绕 3 周就重叠了，而且总共也只有 5 个方向。事实上，如果 n 是真分数 p/q，则绕 p 周就出现重叠，只有 q 个生长方向。例如，假定选 $n = 1/7$（圆周率 π 的小数部分的近似值），绕 1 周就基本上出现重叠，只有 7 个生长方向；而且，旧芽和前 3 个新芽都会分布在同一侧（图 7-6），让枝条失去重力上的平衡，不利于抗击“风吹雨打”。

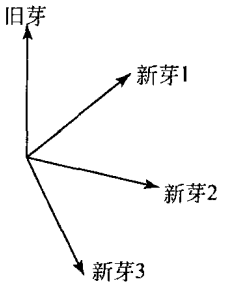


图 7-6　前 4 个芽同侧

显然，如果 n 是没法用普通分数表示的无理数，就会“有理”得多。那么，选什么样的无理数呢？黄金数 $\phi \approx 0.618$ 是最“有理”的选择。于是，新芽的最佳生长角度就是 $360° \times 0.618 \approx 222.5°$ 或 $360° - 222.5° = 137.5°$。

1979 年，英国数学家沃格尔做过“向日葵种子”的电子计算机模拟实验。他在假设“分离角”不变的条件下，以小圆点仿真植物的“叶原基”（茎尖生长锥的侧面，一般由表面的几层细胞分裂形成的突起）进行模拟实验，结果绘制出图 7-7。当然，这类研究的最早贡献是在 1830 年——法国晶体学家奥古斯特·布拉菲和植物学家路易斯·布拉菲兄弟俩，用数学方法证明了“黄金角”产生的旋转格子中包含连续 F 数的斜列线数。不过，这个证明依然无法解答植物会首选“黄金角”和 F 数列。“黄金角”的近似值 137°30′28″，也是这兄弟俩在约 1837 年首先提出来的。

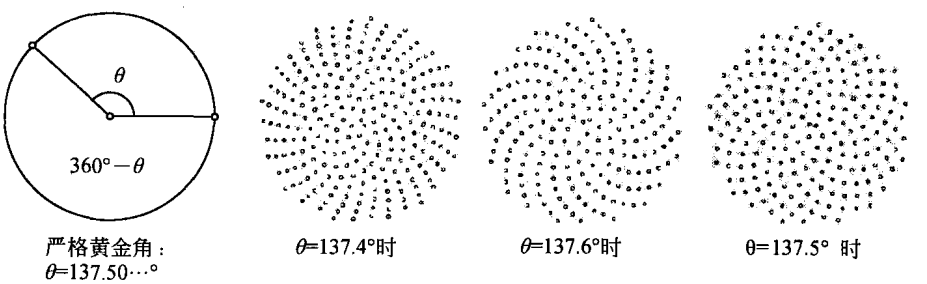


图 7-7　不同“分离角”或“发散角”时的螺旋分布

从图 7-7 可以看出，当分离角大于或小于 137.5°时，叶原基的分布都不紧密扎实，会产生空隙，无法有效利用空间，而且仅能看到一组螺线；唯有分离角刚好等于黄金角 137.5°时，两组数目符合 F 数列的反方向的黄金螺线才会同时出现，而且空间得到最有效的利用，叶原基的排列也最密实。

以上是植物“肢体”排列的“效率说”：植物努力竞争有限空间的结果，只有分离角等于黄金角时，才利于物种的生长繁衍。而植物“肢

体”排列的“基因说”则认为，分离角之所以等于黄金角，是某种化学物质决定的遗传现象；而且还有基于纯美学的考虑：大自然有选择和谐美的“本能”——这种排列，是为了数列中相邻两数相除得到黄金数。

也有物理学家以动力学的方式，利用带电荷的油滴，滴落置于垂直磁场中的硅酮油圆盘中，利用电荷互斥模拟叶原基互斥。当油滴滴落的间隔是某一常数时，分离角刚好等于黄金角，而且自然产生两组反方向黄金螺线——数目为两相邻 F 数。

7.3.3　植物“智慧”与“生仿学”

1. 破解植物“生长智慧”之谜

那么，植物是如何实现“黄金选择”的呢？

1868 年，德国生化学家、植物学家霍夫迈斯特研究了植物生长的尖端的原始细胞，会随着顶端的生长而源源不断地向外和向下生长出来，再转变为叶片、花朵、树干或其他结构。这位自学成才的科学家在破解植物“生长智慧”之谜的大火中，加上了第一把柴薪。



霍夫迈斯特

1913 年，植物学家斯考特（J. C. Schoute）提出“抑制机制”的假说：叶的生长中心位置是大体上稳定的，当中心附近的叶原基在茎芽顶端附近的分裂组织形成时，生长中心会分泌出特殊的物质，将对下一个初生叶原基的生长产生排斥，导致下一个叶原基形成的位置，会尽量“远离”上一个叶原基。

据说，这种假说的思想，后来发展为沃尔德拉（C. W. Wordlaw）等的“场论”。

后来，电子显微镜的图像证实了霍夫迈斯特的理论。

2000 年，瑞士弗里堡大学的生物学家莱因哈特在植物中的确发现了这一行为。随着原始细胞的形成，它吸收促进生长的植物激素。最多

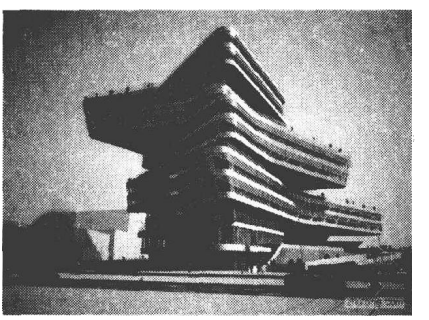
的生长激素位于离其他原始细胞最远的地方，所以原始细胞会朝那个方向运动。

2. “仿生学”和“生仿学”

“仿生学”是人类“模仿生物”的学科。美国军医斯蒂尔空军少校，首先提出了这个词。有的建筑学家按车前草叶片按黄金角轮生有利于接收阳光的现象，设计出每个间房间都能得到充足日照的螺旋形大厦。伊拉克－黎巴嫩女建筑师扎哈·哈迪德设计的巴塞罗那螺旋石塔就是如此。



车前草叶片不断轮生而互不重叠



巴塞罗那的螺旋石塔建筑朝各个方向延伸



理查德·巴基米尼斯特·富勒

但是，很少有人提到“生仿学”——难道生物会拜人为师不成？近年，研究生仿学的学者主要的工作，是为已有理论提供“生物学”的基础，从而进一步发展原有的理论，目的之一是——为更好“仿生”鸣锣开道。

海生动物鹦鹉螺的“浮筒”，是它的一个个气室——据说潜艇就是从这里“克隆”来的。而它像乌贼的头部，有一个漏斗口，可以通过逆向喷水来推动身体前进——好似人类的火箭在工作。

同时，生物的确会“拜人为师”。人们为了探求已知原理和机理在

生物中的反映——好像生物有意在仿造人类智慧一样，所以有生仿学一词。

你看，例如不断轮生却互不重叠的植物叶片、枝条、花瓣把360°的平面做黄金分割，把自己打扮成美丽的黄金螺线，难道没有“模仿”人类的智慧吗？另一个有趣的例子是“笛卡儿叶线”。笛卡儿根据他所研究的一簇花瓣和叶形曲线的特征，列出了 $x^3+y^3-3axy=0$ 的方程，这就是现代数学中有名的笛卡儿叶线即“叶形线”。数学家还为它取了一个富有诗意的美名——“茉莉花瓣（曲线）”。

于是，帕帕斯在《数学趣闻集锦》中写道：“自然界很好地知道它怎样在限定的物质和形状之下工作，以产生一种最和谐的形式。”

7.4　生物形状的无穷奥秘

7.4.1　“形式爱好者”

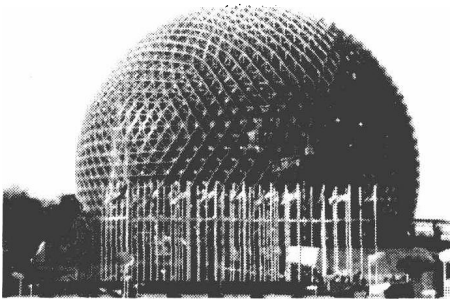
在美国马萨诸塞州，有一个成立于1970年的形式爱好者研究小组。小组的成员包括哈佛大学直观研究讲师、音乐家兼舞蹈家阿瑟·洛伯博士，以及《自然界的花样》一书的作者、建筑师彼德·斯蒂文。当然，类似的、但追索不尽相同的形式爱好者组织，在世界各地都有——美国俄勒冈州的尤金市、费城……

形式爱好者们的研究课题之一，是“形式的力量”。例如，阿瑟·洛伯就指出，金刚石和石墨都由碳元素构成，但金刚石是坚硬无比而且光彩夺目的“美人”，但石墨却是柔滑如泥而且黑不溜秋的“丑妹”。“同素”而“异形”导致千差万别的原因，在于结构的形式不同——金刚石的原子排列呈正四面体，石墨的原子排列呈一层一层六边形平面。

达尔西·温特沃思·汤普森也是一位著名的形式爱好者。他的《生长与形态》提出了生物的形式直接反映了物理力的作用。不过，他的理

论曾被当时的许多科学家看作异端邪说。

另一位著名的专职形式爱好者，是名扬全球的美国建筑师富勒——测量大地穹面方法的发明人。1967年蒙特利尔世界博览会上的美国展览馆，就是他设计的。“富勒烯”和“富勒球”（即“巴基球”），就是纪念他的流行科学名词。富勒花了几十年时间来研究自然界的几何学以及它能给予人类的教益。他认为，我们必须抛弃陈旧的建筑砌砖的概念，因为自然界没有任何东西像砌砖一样构成。由此可见，包括生物在内的万物的形状，都不是千篇一律的“砌砖”，而是千差万别。



蒙特利尔世博会上美国展览馆直径75米

巴基球也和与黄金分割有关的正五边形也有“不解之缘”。1985年，3位有机化学家在用激光照射石墨时，发现了一种新物质（图7-8）。它也是全用碳构成，但完全不同于金刚石或石墨的结构——单个分子由60个碳原子（所以常用C_{60}表示）组成，呈32面体。有趣的是，这个“32面体足球”上的碳原子，只排成正五边形和正六边形这两种形状！这3位因此荣获1996年诺贝尔化学奖的有机化学家分别是：英国克罗托，美国科尔（小）和斯莫利。

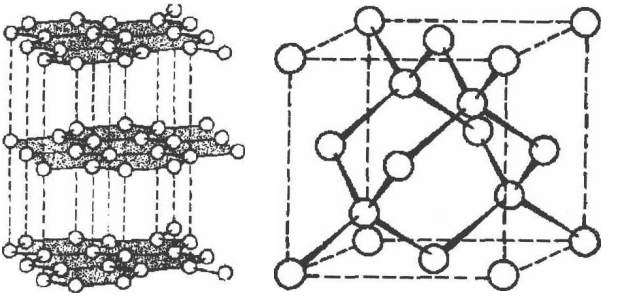


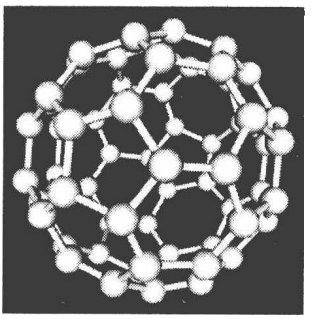
图7-8　石墨和金刚石性质的天壤之别，仅仅是原子的排列不同

巴基球 C_{60}不但有趣，而且有用。利用它特殊的性质，可以用来制造特殊润滑剂、催化剂、显微镜扫描仪的扫描头，还能制造新型蓄电池。C_{60}还是纳米技术的研究对象——科学家们正在对它进行“转基因”试验，即希望修改它的结构得到比它更稳定轻质的高强度新物质，其中纳米管已经进入工业化的生产阶段。

7.4.2　生物形状千姿百态

世界上的生物——从人类、动植物到病毒和真菌，都有各自的形态，由此构成了千姿百态、有时是光怪陆离的生命世界。那么，为啥不同的生物会形态各异，而有些生物的形态又如出一辙呢？形式爱好者们对这些问题兴趣盎然。

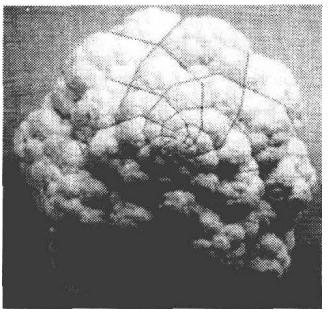
达尔西·温特沃思·汤普森的回答是，不同的物理力的作用让生物形状千姿百态。但这还不够——因为即使在同一环境中受到相同的物理力，各不同物种的生物也形态各异。于是另一个回答是：还取决于物种不同而且在亿万年中的渐变。



60 个碳原子以正五边形和正六边形组成一个巴基球

不同的物种为了适应环境，就必须具备“适者生存”的形态。例如，食肉动物有强大的坚牙利爪，而食草动物则无须如此——所以它们不是食肉动物的对手。而人体处于 ϕ 的关节都是能够蜷缩的位置，如手指骨节、肘部、膝盖、颈部、肚脐等。例如，人体蜷缩时蜷缩点位于人体的 ϕ 点肚脐处。许多哺乳动物关节都具有这种特点，这都是生物经过几十亿年进化的结果，能让身体和四肢完全地蜷缩来抓住东西和自我保护，因此生物界选择了这种没有缝隙的蜷缩——黄金螺旋。科学家们发现，一些动物的某一条直线弯曲为螺线形（如黄金螺线），这不仅压缩了空间，而且增加了强度，所以肠管、骨骼中的一些骨细胞的排列，多以螺线形盘曲在有限的空间里。

植物也是这样：牵牛花、金银花和豇豆等的藤状茎秆没法直立，就必须螺旋形地绕在其他物体上，等等。但是，这些螺线不一定是黄金螺线——就像花菜那样。



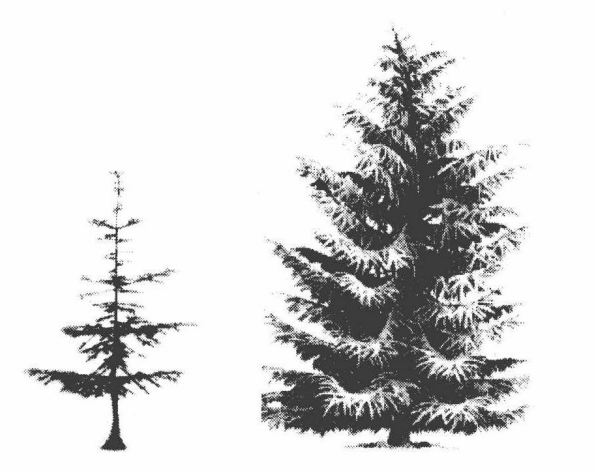
花菜上也有螺线——接近黄金螺线

达尔西·温特沃思·汤姆森还指出，一个有机体的尺寸受到力的作用，这些力包括重力和风力。所以，大个子生物并不是同一种小个子生物的“相似版”。例如，一棵树并不按相同的比例长高和长粗——如果始终保持幼树时长高和长粗的比例，那它的树干就会“不堪重负”而翻倒。因此，它在理论上会逐渐选择长高和长粗的最佳比例0.618，并最终形成“等抗力杆”形（大致形状是上小下大）；而事实如一句德国谚语所说：“大自然很关心，不让树木长到天顶。”人类和动物界也是如此。例如，成人并不是他幼时的“相似体”，而是显得“瘦高”——否则就会因肥胖而寸步难行。

后续者的研究依然得到类似的结论。据美国一家媒体在2001年3月20日的报道，美国康奈尔大学植物学教授卡尔·尼克拉斯和他的同事经过用数学方程式的研究，证明植物界普遍存在“比例换算定律”。而早在距今一个多世纪以前，人们就知道动物界存在这个定律。这一比例换算被称为生物学的“第四维空间”——它将质量与长、宽、高三维联系了起来。“电影中虚构的巨型蚂蚁的骨骼，如果按原型成比例放大的话，它们的腿一定会折断，所以它的外骨骼应不成比例地增厚。”

尼克拉斯在解释动物界的比例换算定律时举例说，“电影中那些按比例放大的虚构的巨人，心脏将不能维持正常的血液循环而死亡。”而植物中遵循比例换算定律的实例是，一棵红杉树经过数百年的生长，它的生长速度会逐渐放慢。据说，这一研究将会对环境和生态政策，以及生物进化科学的研究产生深远的影响。例如，植物学家们能通过数学模

型预测森林的生长。



幼树“苗条”　　大树粗壮

由此可见，“物理力”和“适者生存”的法则决定着生物的千姿百态——虽然许多关于进化、形态等的奥秘还没有揭开。于是，形式爱好者、德国水中运动研究所的施芬克所长说：“自然界交织着互相穿插的节律以及运动和形式。”

第 8 章　从物理学走向宇宙——“没有什么能够阻挡”

沐浴着上帝的光芒，我们走向四面八方。

——英国诗人华兹华斯

“圆方病患者”是伊夫斯在《数学史概论》中，借用德摩根的词对 π 迷们的戏称。英国数学家德摩根“半路出家”，痴迷于 π，他送给 π 的“礼物”是：“这个奇妙的 3.141 59 溜进了每一扇门，冲进了每一扇窗，钻进了每一个烟囱。”

对于 φ，我们也仿效伊夫斯的“借花献佛”，和学舌德摩根的“π 无处不在”：“没有什么能够阻挡，我对自由的向往。”（歌曲《蓝莲花》）就像 π 一样，没有什么能够阻挡 φ 走进科学的海角天涯，也没有什么能够阻挡 φ 迷们成为“‘黄金病’患者”！

“司空见惯浑闲事，断尽江南刺史肠。”这是唐朝诗人刘禹锡在《赠李司空妓》中的著名诗句。“司空见惯”的 φ，有时会“莫名其妙”地出现在我们意想不到的地方，使我们百思不解，甚至“愁肠百结”。在本章，我们要在前面没有说到的 φ 的阔海空天中漫游，其中许多“莫名其妙”一定会让你流连忘返——但不能“断尽愁肠”啊！

8.1　电学中的 φ

8.1.1　电容电路中的 φ

像图 8-1 这样的电路，叫“无穷梯形电容电路”——电路中的电

容，从左到右呈“阶梯形”地增加，一直增加到无穷多个。为了简化起见，设电路中的每一个电容 C 的电容量都是 C——即 C 具有“图形符号”和“容量大小”双重含义。在这个电路中，如果只有虚线“1”左边的 2 个电容，就称为“1 阶梯形电容电路”；如果只有虚线“2”左边的 4 个电容，就称为“2 阶梯形电容电路”……以此类推，直到“n 阶梯形电容电路”（整数 $n>0$）和“∞ 阶梯形电容电路”。我们的任务有两个：求无穷梯形电容电路各阶的等效电容 C_{AB}，讨论 $n\to\infty$ 时即 ∞ 阶梯形电容电路的等效电容 C_∞ 与组成它的电容 C 的比值 $C_\infty : C$。

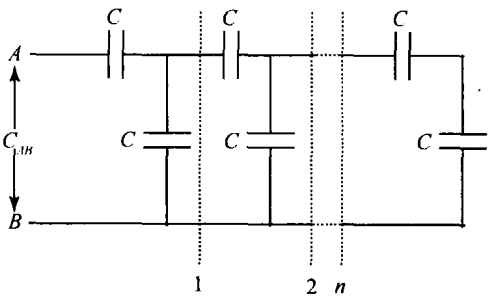


图 8-1

1. 无穷梯形电容电路各阶的等效电容 C_{AB}

由电容串联和并联的计算方法可知：

对 1 阶梯形电容电路的 C_{AB} 即 $C_1=\frac{1}{2}C$，由此得到 $\frac{C_1}{C}=\frac{1}{2}$；

对 2 阶梯形电容电路的 C_{AB} 即 $C_2=\frac{C(C+C_1)}{2C+C_1}=\frac{3}{5}C$，由此得到 $\frac{C_2}{C}=\frac{3}{5}$；

对 3 阶梯形电容电路的 C_{AB} 即 $C_3=\frac{C(C+C_2)}{2C+C_2}=\frac{8}{11}C$，由此得到 $\frac{C_3}{C}=\frac{8}{13}$；

……

对 n 阶梯形电容电路的 C_{AB} 即 $C_n=\dfrac{C(C+C_{n-1})}{2C+C_{n-1}}$。不过，这个 C_n 的“通项公式”，要知道 C_n 的前一项 C_{n-1} 才能求得。

……

这样，我们就发现了 $\dfrac{C_n}{C}$ 有如下规律：

$$\frac{1}{2},\ \frac{3}{5},\ \frac{8}{13},\ \frac{21}{34},\ \cdots。 \tag{8-1}$$

这个数列很有趣：第一项的分母 2 加第二项的分子 3 就是第二项的分母 5，第二项的分母 5 加第三项的分子 8 就是第三项的分母 13，以此类推……

此时，我们联想起某一个数列就类似这样的规律——后一项等于前相邻两项之和。啊，想起来了：斐波那契数列。

好，我们就来看一看斐波那契数列：1，1，2，3，5，8，13，21，34，…。

它每相邻两项的商（后项除前项）是：

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{8},\ \frac{8}{13},\ \frac{13}{21},\ \frac{21}{34},\ \cdots。 \tag{8-2}$$

比较（8-1）和（8-2）可以看出，（8-1）是（8-2）的偶数项。也就是说，无穷梯形电容电路各阶的等效电容 C_{AB}，分别等于斐波那契数列每相邻两项的商（后项除前项）所成数列的偶数项，再乘以 C 所得到的积。这是我们得到的第一个结论。

你看，斐波那契数列神秘地出现在了电学计算之中！举例来说，如果 $C=1$ 微法，则 $C_1=\dfrac{1}{2}$ 微法，$C_2=\dfrac{3}{5}$ 微法，$C_3=\dfrac{8}{13}$ 微法，…。

当然，有了这个结论，就能用 F 数列的通项公式

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

计算出 F_n 和 F_{n-1} 之后直接求得 C_n。

2. ∞ 阶梯形电容电路的等效电容 C_∞ 与组成它的电容 C 的比值 $C_\infty : C$

当 $n \to \infty$ 时，C_{AB} 即 C_∞。由于 $n \to \infty$ 时（8-1）的极限是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，所以 $C_\infty : C = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.618\cdots$。

此外，我们注意到虚线“1”右边的电路，也是一个 ∞ 阶梯形电容电路。因此，图 8-1 可以变成图 8-2，于是有如下计算：虚线“1”两旁的 C 和 C_{AB} 并联之后的电容为 $(C + C_{AB})$；$(C + C_{AB})$ 再和上边那个 C 串联，就得到 AB 之间的总电容 $C_{AB} = \frac{C\ (C + C_{AB})}{C + \ (C + C_{AB})}$，由此解得 $C_{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}C$（已舍去负根）。所以 $C_\infty : C = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$。

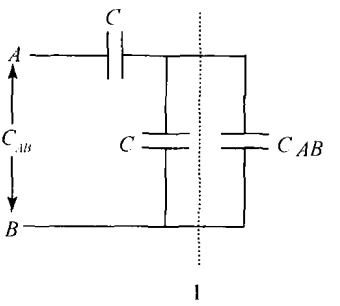


图 8-2

于是，我们得到又一个结论：∞ 阶梯形电容电路的等效电容 C_∞ 与组成它的 C 的之比值等于 φ!

8.1.2　电阻电路中的 φ

像图 8-3 这样的电路，叫“无穷梯形电阻电路”——类似无穷梯形电容电路。

1. 无穷梯形电阻电路各阶的等效电阻 R_{AB}

由电阻串联和并联的计算方法可知：

对 1 阶梯形电阻电路的 R_{AB} 即 $R_1 = 2R$，由此得到 $\frac{R}{R_1} = \frac{1}{2}$；

对 2 阶梯形电阻电路的 R_{AB} 即 $R_2 = R + \frac{R \times R_1}{R + R_1} = \frac{5}{3}R$，由此得到 $\frac{R}{R_2} = \frac{3}{5}$；

对3阶梯形电阻电路的 R_{AB} 即 $R_3 = R + \dfrac{R \times R_2}{R + R_2} = \dfrac{13}{8}R$，由此得到 $\dfrac{R}{R_3} = \dfrac{8}{13}$；

……

对 n 阶梯形电阻电路的 R_{AB} 即 $R_n = R + \dfrac{R \times R_{n-1}}{R + R_{n-1}}$。

……

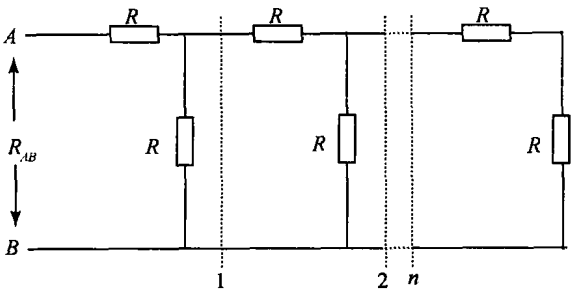


图8-3

到此，我们得到的第一个结论与无穷梯形电容电路类似：无穷梯形电阻电路各阶的等效电阻 R_{AB}，分别等于 R 除以斐波那契数列每相邻两项的商（前项除后项）所成数列的偶数项，再乘以 R 所得到的积。

2. 组成∞阶梯形电阻电路的 R 与电路的等效 R_∞ 的比值 $R:R_\infty$（R_∞ 是当 $n\to\infty$ 时的 R_{AB}）

显然，类比无穷梯形电容电路，可以得到 $R:R_\infty = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.618\cdots$。

于是，我们得到与无穷梯形电容电路类似的又一个结论：组成∞阶梯形电阻电路的 R 与 R_∞ 的比值等于 φ！这个结论的“倒数版”是：∞阶梯形电阻电路的 R_∞ 与 R 的比值，等于 $\dfrac{1}{\phi} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.618\cdots$！类似，组成∞阶梯形电容电路的 C 与 C_∞ 的比值，也等于 $\dfrac{1}{\phi} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.618\cdots$！

你看 0.618…和 1.618…这两个黄金数在无穷梯形电容电路和无穷梯形电阻电路中双双相会了！

某些物理问题可以转化为数学问题，所以在解物理问题时应注意使用数学工具。这一点，对我们进一步学习和科研大有裨益。

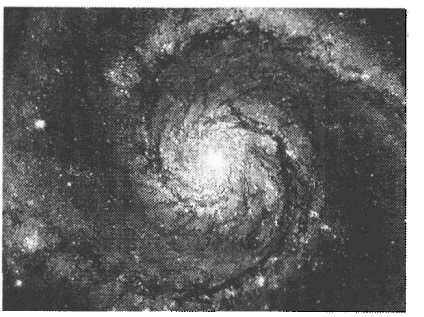
8.2　天地宇宙中的 ϕ

8.2.1　天上和地上的 ϕ

在茫茫的宇宙中，隐藏着无数奥秘——被揭开的、不知晓的，地上的、“天上”的，其中之一就是许多物体都呈漩涡状，而且有的是黄金螺线形。



螺旋状的银河系

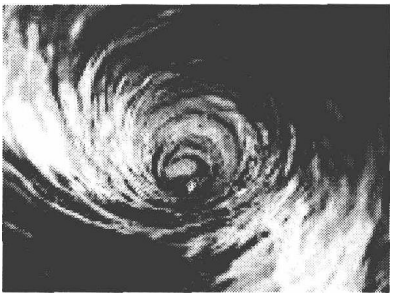


6 万光年大小的 M51 星系：
距地球 0.3 亿光年

黄金螺线在许多场合都能找到。河外星系中的许多漩涡状星云——例如典型的 M51（又名 NGC5194）星系。据说，已经发现宇宙中 80% 以上的星系都是黄金螺线形，包括银河系的四条巨大悬臂（大约倾斜 12°）——地球和它所在的太阳系处在其中一条悬臂上。还有某些飓风和云层的漩涡，著名的“澡盆漩涡”。

这里提到的澡盆漩涡，又叫“谢皮罗漩涡”——澡盆排水时，北半球的漩涡是逆时针方向，南半球的漩涡是顺时针方向，赤道上不形成

漩涡。澡盆漩涡由地球自转时产生的“科里奥利力”引起，是美国麻省理工学院机械工程系主任 A. 谢皮罗教授在 1962 年最早发现的。科里奥利力，是法国数学家、工程师科里奥利在 1835 年最早发现的。类似的漩涡还能从袅袅上升的炊烟和碧湖中轻轻荡开的涟漪中找到。



“澡盆漩涡”

黄金螺线和“斐波那契螺线”，并没有本质的区别。太阳系本身就是一条斐波那契螺线，形成以太阳为中心的漩涡。事实上，斐波那契就说过：“与车轮不同的是，漩涡越趋中心速度越快。”例如，水星年（水星绕行太阳一周）等于地球年的 88 天，而冥王星的 1 年是地球年的 248 倍。翠茜·特威曼和鲍伊德·赖斯在《上帝之舟》一书中列举的事实，则更进一步：太阳与水星的距离，加上水星与金星距离，正好等于金星和地球的距离。

2006 年 3 月 15 日，美国加州大学洛杉矶分校的一个天文学家小组说，他们借助美宇航局的“斯皮策”太空望远镜，首次发现了银河系中心附近一个形似 DNA 分子双螺旋结构的奇特星云。加州大学洛杉矶分校天文学教授马克·莫里斯等人，在次日出版的一期英国《自然》杂志上发表论文说，他们观测到的这个星云约 80 光年长，距离银河系中心的黑洞约 300 光年，而太阳系距银河系中心约 2.5 万光年。



双螺旋状星云

此前天文学家发现的星云只有漩涡状或不规则形态，双螺旋星云的发现无疑是一个惊喜。

8.2.2　维持宇宙秩序的“第七参数”

现在的宇宙为什么是这个样子，或者问是“谁”制造并在冥冥之中维持着宇宙的秩序？回答是“宇宙参数”。原来，宇宙秩序受到有限数量的参数的约束——这些参数正在被人类逐一发现。

英国宇宙学家、天体物理家马丁·里斯，是英国皇家天文学会客座教授、剑桥大学皇家研究学会会员、英国皇家学会会员。1999 年，这位爵士在自己出版的《六个数：塑造宇宙的深层力》一书中，总结了六个“生成宇宙的参数”：N，ε，Ω，λ，Q 和 D。

$N=1\times10^{36}$——决定一种把原子约束在一起的力的强度。$\varepsilon=0.007$——决定了原子核内聚的坚固程度。如果 N 和 ε 不是刚好这般大小，生命所需要的碳和氧元素就不是像今天我们看到的这样比比皆是。Ω（应为 1，但目前测得为 0.04——说明很多暗物质没被测到）和 λ 决定了宇宙的大范围密度和大小。Q 和 D 则决定了宇宙空间本身的特性：$Q\approx10^{-5}$，如果它小一点，宇宙就会变得无序和一片死寂；D = 3，是宇宙空间的维数——我们所说立体空间的三维度。里斯在书中还说：“数学定律是我们宇宙结构的基础——不单原子如此，星系、恒星和人也是如此。”



里斯

除了里斯的六个数之外，有人还提出了第七个宇宙参数 ϕ 及其“衍生物”即“G 数列”：$G_1\approx72.360\ 68\%$，$G_2\approx44.721\ 36\%$，$G_3\approx27.639\ 32\%$，$G_4\approx17.082\ 04\%$，$G_5\approx10.557\ 28\%$，$G_6\approx6.524\ 76\%$，$G_7\approx4.032\ 52\%$。

“G 数列”用下面的方法推导。

设 x 符合 $\frac{x}{\phi^2}+x=1$，则有 $x=\frac{\phi^2}{\phi^2+1}$，得到近似值 $x\approx27.639\ 32\%\approx G_3$，而且有 $\frac{x}{\phi}\approx44.721\ 36\%\approx G_2$ 和 $\frac{x}{\phi^2}\approx72.360\ 68\%\approx G_1$。以此类推，

可由 x 和各个“G数”之间的“φ关系”，算出 G_4，G_5，G_6，G_7。

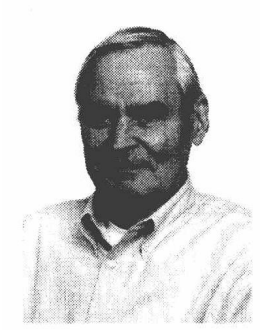
“G数列”也有许多有趣而和谐的性质。

第一，显然，从 G_1 到 G_7 是公比为 φ 的等比数列。

第二，任何一个“G数”都等于比自己小的相邻两个“G数”之和。

第三，$G_3 - G_7$ 和 $G_4 + G_6$ 相等——都等于 23.606 80%；$G_1 + G_3 = G_1 + (G_4 + G_6) + G_7 = 100\%$；……

……



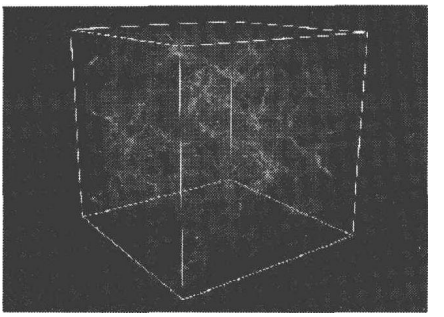
威尔金森

这一观点认为，“G数列”参与了宇宙演化的过程，因此今天的宇宙有各种与它相关的比例结构——例如宇宙中物质和能量的内部成分比，以及人脑电波的三种频率关系。

首先谈宇宙物质和能量的内部比。

2003年7月23日，美国匹兹堡大学莱恩·斯克兰顿博士领导的一个多国科学家小组宣布，借助于美国2001年6月30日发射的卫星“威尔金森微波各向异性探测器”（WMAP），观测到宇宙微波背景辐射的微小变化获得的数据，发现了暗能量和暗物质真实存在的直接证据。这里提到的达维德·托德·威尔金森，是一位美国天体物理学家，研究宇宙微波背景辐射的先驱者之一。

美国太空网站也报道，天文学家发现了一个看不见的“隐形星系”，证明存在暗物质。此前我们已经知道，宇宙微波背景辐射就是距今137亿年前宇宙大爆炸的余烬，它大约在大爆炸后的38万年产生；其中的光子在宇宙中穿行时会出现一系列奇妙的物理过程——当这些光子经过质量较大的星系时会遭遇到一种明显可见的“引力陷阱”。这表明一种看不见的暗能量和暗物质的确存在。2009年的一期《新科学家》杂志也报道，瑞士巴塞尔大学的天文学家们日前撰文称，银河系和仙女座均“躺在”一个由暗物质构成的“软垫”上。



科学家们构建的星系局部三维图像

WMAP的探测结果还表明，在宇宙的整体质量中，有73%是暗能量，23%是暗物质，而构成恒星、行星和人类自身的普通物质只占4%。出乎意料的是，竟然人类这么晚才知道在宇宙中占有最大的组分的暗能量，还很难了解它。

你看，暗能量∶暗物质∶普通物质＝73∶23∶4——近似符合“G数列”。对此，又有如下两个科学猜想。

①精确的比例应该是：暗能量∶暗物质∶普通物质＝72.360 68∶23.606 80∶4.032 52。这一组成比例彰显出宇宙参数中的φ和“G数列”——或者说，宇宙按φ和“G数列”的规则精确分配暗能量、暗物质和普通物质。这个猜想犹如一条深长的隧道——人类的心灵从这里与宇宙神秘而又必然地连接在一起。

② 从“G数列”的等比关系还有以下预测。在宇宙中，除了G_7和G_1之外，G_4和G_6也是两个十分重要的层次。现今的宇宙学只认为占23%的暗物质是有别于普通物质和暗能量的一个层次，但从“G数列”的等比关系看来，这个暗物质层次还可以分为两个不同的部分（或层次）。虽然现在还不知道这两部分在性质上有什么差异，但是知道它们所占的份额应该是17.082 04%和



伯格

6.524 76%。可以相信，这个猜想将会由未来的宇宙学研究加以证实。

再谈脑电波。

早在1875年，英国的科学家就已经开展对兔子脑电波的测量和研究工作。到了1929年，德国精神科医师汉斯·伯格从观察电鳗发电现象推衍出人有相同的现象，发现了人脑中存在着电波，继而发表了人类脑电图。现在人们已经知道，伴随着脑的多区域协作活动，大脑中会出现许多复杂的电位能的传递和脑电波。根据仪器测试的显示，脑电波的频率大致分为三种：α波、β波和θ波。

α波的频率是8～13赫兹（(10.5±2.5)赫兹），是一种属于意识及潜意识状态下的脑电波。它反映了大脑皮质神经元在清醒但休息时的状态，是内在感官世界的一种表现。出现α波时，脑会涌现想像力，感觉豁然开朗，身心放松。如果α波过高，那就容易产生倦怠、消极、松散的现象。α波一般在清醒休息的状态下闭眼养神时常出现，在睡眠状态下会消失。

β波的频率为14～30赫兹（(22±8)赫兹），是一种在清醒意识状态下的脑电波。它反映了大脑皮质细胞的活动状态，比如各种与逻辑思考，计算推理和解决问题有关的智力活动，通常在感觉神经传入脑皮质及脑皮质神经元运作时出现。如果β波过高，就容易出现压力感、紧张和忧虑等现象。

θ波的频率是4～7赫兹，是一种属于潜意识状态下的脑电波。它反映了边缘系统的脑神经元活动的状态。θ波与记忆、情绪、态度、信念、行为、个性等有关，是灵感、欲望及创造力的一种表现。如果θ波过高，则容易产生固执偏颇、失去理性的心理现象。θ波一般在儿童时期出现，经历情绪压力的成人或者脑部病变的病人也会出现。

显然，β波→α波→θ波的频率分别与“G数列”中的几个相关数据相等或接近：$[(G_1-G_2)\sim(G_2-G_3)]=[G_3\sim G_4]=(22\pm5$赫兹$)\rightarrow\beta$波；$(G_3-G_4)=G_5=10.5$赫兹$\rightarrow\alpha$波；$[(G_4-G_5)\sim(G_5-G_6)]=(G_6\sim G_7)=(6.5$赫兹$\sim4.0$赫兹$)\rightarrow\theta$波。

由此可见，人的脑电波频率符合“G数列”的关系。大脑在潜意识状态下的θ波最佳状态的频率，应该是G_7到G_6（4.032 52～6.524 76赫兹）。大脑皮质细胞在清醒和休息的最佳状态时的α波频率，应该是参数G_5（10.557 28赫兹）。大脑皮质细胞活动的最佳状态时的β波频率，应该是参数G_4到G_3（10.557 28～27.639 32赫兹）。

这个猜想犹如一条“黄金纽带”——人类的大脑活动与φ和“G数列”诡谲地“牵手”同行。

此外，在许多领域都与φ有关。

商品价格上升某一幅度以后，再以相同的幅度打折后的价格是否等于原价？答案是：不是。只有打折幅度为$\phi \approx 0.618$时，先打折再上升之后价格才不变。

许多中医认为肚脐是不但是人体身高的黄金点，也是医疗效果的黄金点。曾给慈禧太后治病的“一枝刘”的后代，就用中草药制成“肚兜”来治疗许多疾病。人体中还有许多穴位也大致在黄金点上，所以它们也成了针灸治病的黄金点。

在1天内，人睡半天12小时的φ倍最好，即每昼夜大约睡7.5小时——当然这也要“因人而异”。在一般湿度条件下约23℃（体温37℃×φ）是睡眠的最佳温度——轨道舱内、居室、办公室、教室等场合也是这个温度最舒适。

饮食要六分饱四分饥、六分素四分荤、六分粗（粮）四分细（粮），衣着要六分暖四分寒，才有利健康。而这“六、四之分”的近似说法，正好是把10作“整数黄金分割”。

将男女职工的退休年龄60岁和55岁分别乘以φ，就分别得到37岁和34岁——最佳工作年龄。再将37岁和34岁分别乘以φ，则分别为23岁和21岁——最佳学习年龄。

美国证券分析家艾略特在1946年出版的第二本股市著作，书名与φ相连——《大自然的规律》。据说它能指导“炒股”。

毕氏学派的阿尔希塔斯把0.618的思想引入社会科学领域，认为政

治家只要掌握了恰当的数字比例关系，就能控制社会冲突，带来公平和信任。南非1994年国家政权“黑白易手”之后，曼德拉总统并没有采用“血债血偿”等方式来对待白人种族主义统治时期的罪人，而是任命黑人宗教领袖图图主教来领导“真相与和解委员会”，谋求折衷与种族和解，奠定了国家和平前进的基础。

第9章　自娱自乐会有时——ϕ的“八卦”

文化现象的极致不是顶点，不是巅峰，而是0.618的准头儿——低头即是，抬头方好……它的意境大过它的形态，它的余味总在散场之后……

9.1　五角星中的“黄金”

9.1.1　半空心五角星中的“宝藏”

仔细说来，五角星有如图9-1所示的3种——空心五角星、半空心五角星、实心五角星。

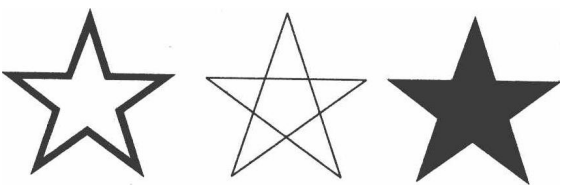


图9-1

这里先要研究的是关于半空心五角星的问题：被一个正五边形“框”住的半空心五角星的图形（图9-2）中有多少“宝藏”——多少个三角形（包括多少个黄金三角形）、多少个四边形（其中包括多少个梯形、多少个菱形）？

答案是，（等腰）三角形35个、四边形10个——其中各有5个（全

等的等腰）梯形和5个（全等的）菱形。你看，“矿藏”多么丰富！

这个问题看起来很简单，但如果不分类并按一定的顺序数，就会遗漏或重复。以下是这样数的过程。

数三角形的时候，按形状不同数。不难数得共有7种形状和大小的三角形：△*ABE*形、△*ABG*形、△*AFG*形、△*ACD*形、△*AHD*形、△*ABF*形、△*AEG*形。显然，7种形状的三角形各有5个，所以共有35个。

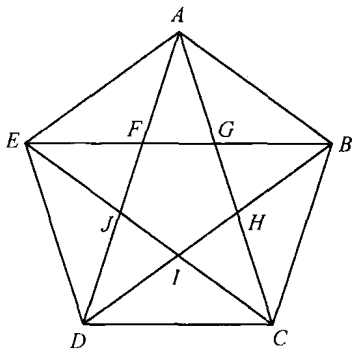


图9-2

当然，这7种形状和大小的三角形可归为5类：①△*ABE*形同△*AHD*形；②△*ABG*形；③△*AFG*形；④△*ACD*形；⑤△*ABF*形同△*AEG*形。在这35个等腰三角形中，顶角为36°的黄金三角形有20个（*AFG*形5个、*ACD*形5个、*ABF*形5个、*AEG*形5个）；顶角为108°的三角形有15个（*ABE*形5个、*ABG*形5个、*AHD*形5个）。

数四边形的时候，要分梯形和菱形来数。和等腰梯形*ABCD*全等的梯形共有5个，与菱形*ABXJ*全等的菱形也共有5个，所以共有四边形10个。

这5个等腰梯形的底角都是72°，“顶角”都是108°，我们称它们为“黄金梯形”。这5个菱形的相邻两角分别为72°和108°，我们称它们为“黄金菱形”。

为什么对这些梯形和菱形的称呼中都有“黄金”二字呢？因为都与36°有关，也就是与φ有关。

每个等腰梯形（如梯形*ABCD*）的两条对角线，都把梯形分成两个等腰三角形：一个是黄金三角形（如△*DAB*），另一个是顶角为108°的“钝角黄金三角形”（如△*BCD*）——它的顶角被三等分以后，又会出现一个黄金三角形（△*BHG*）。

每个菱形（如菱形 $ABCJ$）被较长的那条对角线（如 AC）平分以后，会出现两个顶角为 108°的钝角黄金三角形（如△ABC 和△ACJ）。

解这道题，好似做了一节锻炼逻辑思维和条理的脑力体操。

9.1.2　半空心五角星中的“黄金”

在图 9-3 中，可以看出半空心五角星内暗藏的“黄金”：$\frac{FG}{GB}=\frac{GB}{BF}=\frac{BF}{EB}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\phi$。这表明 F 和 G 分别是 EB 和 FB 的黄金分割点——这样的点共有 10 个。这也是我们看到五角星是和谐的原因，所以得到“特别的爱”弥久而广泛。

当然，在图 9-3 中的正五边形内，可以继续画出一个更小的半空心五角星，并能继续下去。于是，我们看到在“五角星套盒娃娃”中无穷多的“黄金”。

附带说明，在对称图形空心五角星中，也有“黄金”：不但 5 个“角”都是 36°，而且图 9-4 里各“中心角”（中心与顶点的连线所成的角）是 72°。如果把这个五角星旋转是 72°，整个图形“不变”；在这个意义上说，“对称”和“不变”等价。

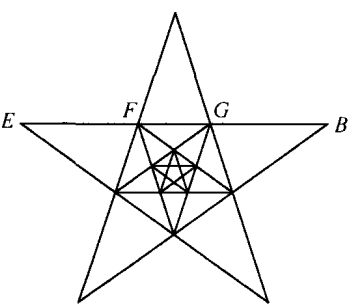


图 9-3

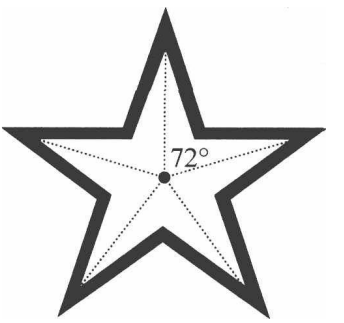


图 9-4

9.2 五边形数定理

样子像图9-5那样的数1，3，6，10，…叫三角（形）数。样子像图9-6那样的数1，5，12，22，…叫五边形数。

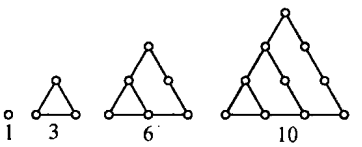


图9-5

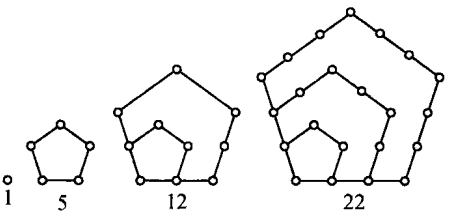


图9-6

五边形数有一个其他形数没有的定理——“五边形数定理”：第 n 个五边形数等于第 $n-1$ 个三角形数的3倍加上 n 之和。例如，在图9-6中的第3个五边形数是12，图9-5中的第3－1个三角形数是3，那么 $12=3\times3+3$。

这个定理有不少应用。例如，在已知第 $n-1$ 个三角形数时，可用它求第 n 个五边形数。例如，已知第4个三角形数是10（图9-5），求第4＋1个五边形数。显然，第5个五边形数为35——图9-7是明显的计算验证和直观说明。当然，也可以反过来计算：已知第 n 个五边形数时，求第 $n-1$ 个三角形数。

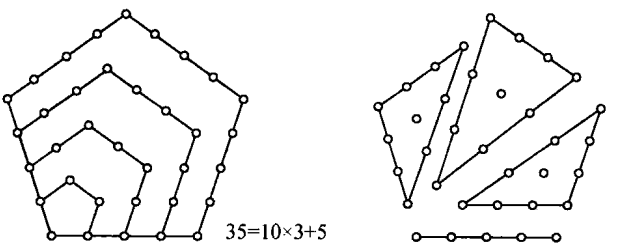
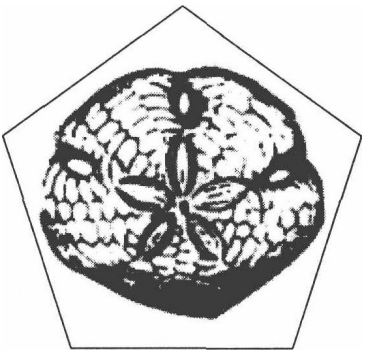


图9-7

9.3　用纸折出正五边形

正五边形可以说是无处不在。在美国东部大海的海洋生物中，有一种海胆的外形就是一个正五边形，中间还有一个“五花瓣”。



海胆的正五边形

那么，能不能用纸来折出一个正五边形呢？

如图9-8左边，将一条长度合适的、宽为 a 的长方形纸条打一个结，然后按右边轻轻压平，不要让纸条起皱纹或破裂，再剪去多余的部分，就剩余一个（凸）正五边形了。

我们一起来研究为什么会有这个“古怪”而又好玩的结果。

在由图9-8右边剩余的五边形纸条绘成的图9-9中，由折纸过程可知，凸五边形 $ABCDE$ 中的四边形 $EABC$、$ABCD$、$BCDE$、$DEAB$ 都是高为 a 的梯形。

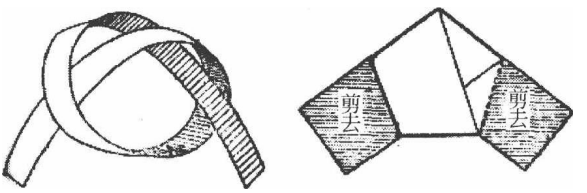


图9-8　用宽为 a 的纸条折正五边形

由于四边形 $EABC$ 是高为 a 的梯形，所以 $\triangle ABC$ 的面积 $= AB \times a/2$；

又因四边形 $ABCD$ 是高为 a 的梯形，所以 $\triangle ABC$ 的面积 $= BC \times a/2$。

由此得到 $AB = BC$。

同理可得 $EA=AB$，$BC=CD$。

这样就得到 $EA=AB=BC=CD$——说明四边形 $EABC$ 和 $ABCD$ 是等腰梯形，于是它们各自的对角线相等，即 $BE=AC$，$AC=BD$。

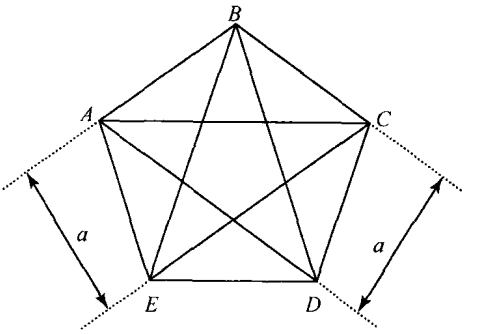


图 9-9

再看 $\triangle ABD$。它是以 AD 或 BD 为底，a 为高的三角形，所以 $AD=BD$。同样，从 $\triangle BCE$ 可得 $BE=CE$。于是 $AC=BD=AD=BE=CE$。

这就由 $AD=BE\Rightarrow$梯形 $DEAB$ 等腰$\Rightarrow DE=AB\Rightarrow AB=BC=CD=DE=EA$。

这样，显然有 $\triangle EAB\cong\triangle ABC\cong\triangle BCD\cong\triangle CDE\cong\triangle DEA\Rightarrow AB=BC=CD=DE=EA$。这就证明了凸五边形 $ABCDE$ 是正凸五边形。

9.4 隐蔽在洛依德谜图中的五角星

图 9-10 是《百科辞典》一书中的一幅“五角星谜题”画。在这幅画中，隐藏着一个五角星——你能找出来吗？

完成《百科辞典》的是父子俩——美国业余数学家山姆·洛依德在生前的未竟事业，死后由他的儿子完成。

洛依德从 16 岁就成了美国《棋类月刊》问题的专栏编辑，几年以后还为包括《科学美国人》杂志在内的许多报刊编辑其他栏目。而这一切，源于他少年时代的一次机遇——赢得一次对棋类问题的悬赏。

不过，洛依德最为著名的还是他那机智巧妙的谜题、游戏和新奇的发明。其中包括《巧驴，14～15 谜题》（一种流行至今的幻灯片）、《骰子游戏》和《离开地球》谜题等书。他也因此成为美国最伟大和最著名的谜题专家之一。

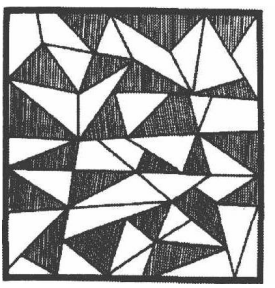


图 9-10

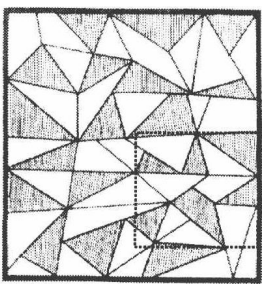
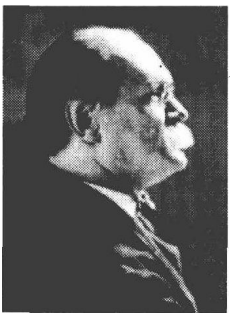


图 9-11

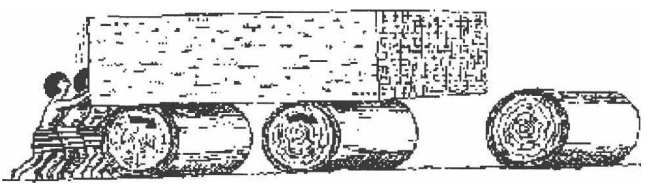


洛依德

分散你找五角星的注意力了，如果还没有找出来——就向图 9-11 的虚线框内看一看！

9.5　五角星与等宽曲线

人们常利用横截面为圆形的滚轮（如木棒）搬运笨重的庞然大物，以达到省力、省时的目的。那么，横截面不是圆形的物体，又能不能担此重任呢？答案是肯定的。



用木棒搬运重物

在图 9-12 中，以正三角形的 3 个顶点 A，B，C 各自为圆心，以它的边长 a 为半径画弧，就得到一个被称为“圆弧正三角形”的“等宽

曲线”——“宽度”等于a。由于它是勒洛发明的，所以也叫“勒洛三角形”。弗兰茨·勒洛是德国机械工程专家、机构运动学的创始人和数学家。他在1875年到1900年出版的《理论运动学》一书，对机械元件的运动过程进行了系统的分析，是机械工程方面的名著。

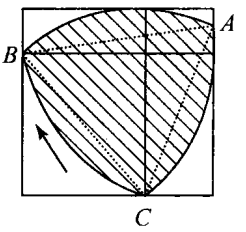


图9-12

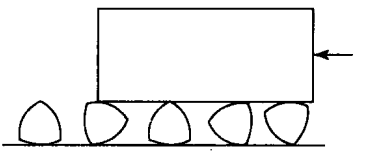
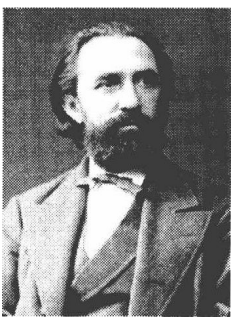


图9-13

勒洛三角形的奇妙和有用之处在于，用这种形状的钻头能钻出正方形方孔——边长恰好等于正三角形的边长a。有趣的是，如果用这种形状的多个轮子代替我们熟悉的圆轮，那么长方形物体在它们的上面运动，也不会颠簸（图9-13）。这就是说，长方形的物体下面的一条边和地面的距离始终“等宽”——等宽曲线一词就是这样来的。



勒洛

当然，等宽曲线的用途并不仅限于此。例如，还用于“等宽曲线泵”：在一种新型旋转式容积泵的正方形泵体内，就装有一个轮廓线是“勒洛三角形”的转子。再如，一种可用来切出正方形孔洞的特殊钻孔机，也用到一种等宽曲线形的刀具（图9-14）。

此外，在汪克尔发动机——一种旋转活塞发动机（也叫三角活塞发动机）的转子（图9-15）中，也用到勒洛三角形。1954～1957年，德国机械工程师、发明家汪克尔发明了这种著名的发动机，颠覆了以往发动机活塞做往复运动的“传统”。

那么，除了勒洛三角形以外，还有没有其他形状的等宽曲线呢？回答是肯定的。

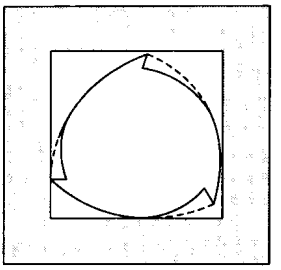


图 9-14　能切出正方形洞的刀具

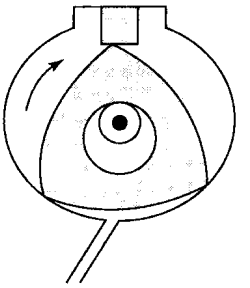


图 9-15　汪克尔发动机的转子

图 9-16 是一个“圆弧正五边形”的等宽曲线。它是各以正五边形的 5 个顶点为圆心，以对角线（例如 AC）为半径画弧形成的，“宽度”等于对角线的长。

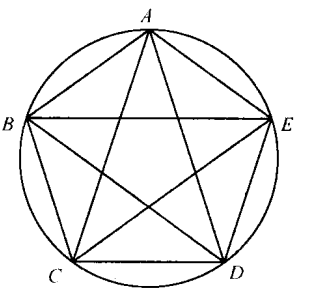


图 9-16

当然，等宽曲线也可以不由正多边形构成——对角线都相等的任意奇数边凸多边形（“边”呈圆弧状，不一定是正多边形），也能构成等宽曲线。例如，英国的 50 便士和 2008 年版的 20 便士硬币，都是正七边形的等宽曲线。不过，偶数边多边形不能构成等宽曲线。



英国的 50 便士硬币正面



英国 2008 年版的 20 便士正面

等宽曲线有许多美妙的性质和定理。例如，“宽度”为 a 的等宽曲线上任意两点间的距离都不会超过 a。再如，法国数学家巴比埃在 1860

年发现的巴比尔定理即“等周定理”：所有“宽度”为 a 的凸等宽曲线，都有相同的周长 πa。

等宽曲线并不一定包括圆弧——人们已经发现了由一种特殊的卵形构成的等宽曲线。

9.6 五角星中摆石子

这是民间玩的一种“数一、二、三摆五角星”的游戏。

如图 9-17 的五角星有从①到⑩的 10 个交叉点。现在要求：

（1）从任意一个交叉点——例如从图 9-18 的②开始，沿着箭头所指的直线（即不能“转弯”）从②数一、二（经过③）、三（到达④）之后，摆上石子④；

（2）以下重复这个过程在各交叉点摆上石子——例如在图 9-18 中从⑥数向⑩摆上石子⑩；

（3）摆每一颗石子的规则是，数一的点不能有石子——例如不能从图 9-18 已摆的④数向⑩摆上石子⑩，但允许数二的点有石子——例如允许在图 9-18 中从①经过④数向⑦摆上石子⑦；

（4）最后摆上 9 颗石子就完成了游戏。

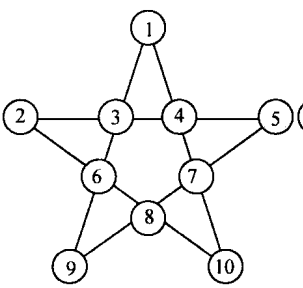


图 9-17

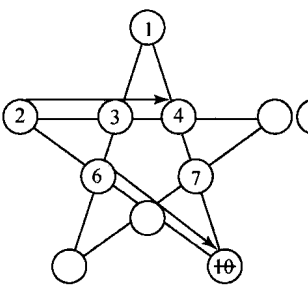


图 9-18

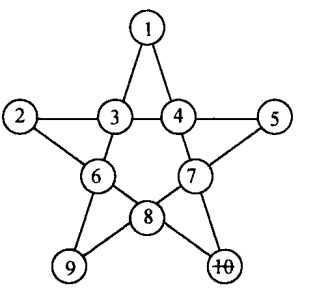


图 9-19

以下是摆出第 1 颗到第 9 颗石子的过程：从②经③摆④，从⑧经⑥摆②，从⑤经⑦摆⑧，从③经④摆⑤，从⑨经⑥摆③，从⑦经⑧摆⑨，从①经④摆⑦，从⑥经③摆①，从⑩经⑧摆⑥。最后剩下⑩未摆，如图

9-19所示。

摆的方法不止一种，而且从任意一颗开始摆都可以成功，你不妨一试。

如果多次试验都没有成功，那就按“追着尾巴摆”的口诀摆，一定成功。所谓“追着尾巴摆”，就是上一颗从哪里开始数一，这一颗就摆上次数一的那颗。例如，在前面摆第 1 颗④的时候，是从②开始数的（②就是尾巴），那第 2 颗就要摆②（从⑧经⑥摆②）。

当然，“追着尾巴摆”不是唯一能成功方法——相信你会找到它。

9.7　种树问题中的五角星

这里的问题是：每行种 4 棵树，问 10 棵树最多能种几行？

答案是 5 行——种在五角星的 10 个交叉点上（图 9-20）。

类似的问题是：每行种 3 棵树，问 10 棵树最多能种几行？

答案是 10 行（图 9-21）。

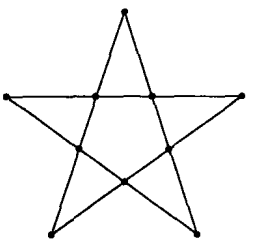


图 9-20　10 棵种 5 行，每行 4 棵

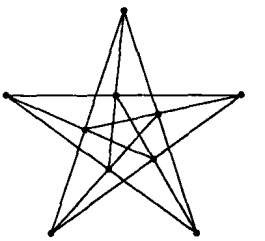


图 9-21　10 棵种 10 行，每行 3 棵

许多数学爱好者都喜欢研究这类种树问题——我们提到过的美国业余数学家山姆·洛依德就是其中之一。他研究过“20 棵树，每行种 4 棵，最多能种几行”的问题，他最终得到的答案是 18 行（图 9-22）。不过，他的答案的图形与五角星无关，也不正确。不过，这 18 行已经完成了高斯的猜想，打破了罗马人和希腊人在 16 世纪完成的 16 行的纪录（图 9-23）。

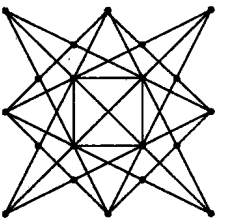


图 9-22　山姆·洛依德：
每行 4 棵，20 棵能种 18 行

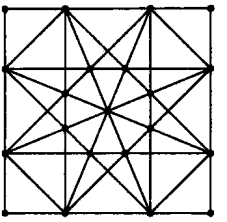


图 9-23　罗马人和希腊人：
每行 4 棵，20 棵能种 16 行

到了发明电子计算机之后的 20 世纪 70 年代，有两位数学爱好者得到了一个被称为“五角星套”的“套盒娃娃”的图案。请你数一数，一共有几行？答案是 20 行。有趣的是，这个图案是由 3 个五角星组成的——精湛美丽、协调对称，而且容易记忆！

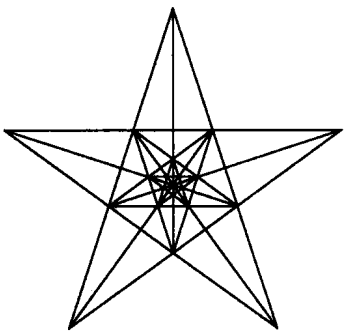


图 9-24　20 世纪 70 年代两位数学爱好者的“套盒娃娃”：每行 4 棵，20 棵能种几行？

这个“20 棵树问题”（图 9-24），是“现代数学世界三大难题”之一，不少人对它兴趣盎然。那么，到了 21 世纪，还有比“套盒娃娃”更好的答案吗？据说，国外有人曾悬赏 20 万美元希望能有所突破。另外两个难题是：“四色绘地图问题”（相邻两国的地图不用同一种颜色，那么任一地图最少可用四种颜色完成）——电子计算机证明已经解决，“人工证明”没有解决；“单色三角形问题”——用两种颜色的线连接任意六点，必然出现两个单色三角形，可以在张景中的《数学家的眼光》一书里找到这个问题的答案。在这本书中，还提到一个有趣的事实：用两种颜色的线连接任意多个点时，可以完全没有单色三角形的最少点数是五点——它们连接之后恰好是一个正五边形内套半空心五角星（图 9-25 中粗线表示一种颜色，细线表示另一种颜色）！

有报道说，在 2006 年 3 月，辽宁某小学教师得到了种树问题的 23 行精彩结果（图 9-26），据说已通过专家审查。2009 年，河北某学院的一个学生，则得到另一种漂亮的 23 行结果（图 9-27）。那么，谁来突破 23 行呢?

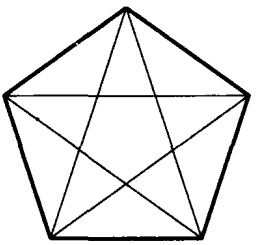


图 9-25

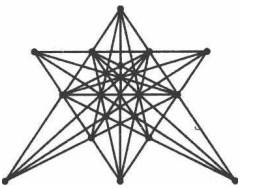


图 9-26　2006 年种树问题的 23 行结果

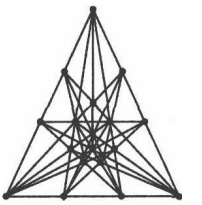


图 9-27　2009 年种树问题的 23 行结果

2008 年 10 月，有人又声称 25 行的答案“基本告破”，不知后来如何。据说，有人在理论上证明了 20 棵树问题的最大行数不会超过 26。

9.8　电脑键盘上的“黄金”

把“黄金分割”这 4 个汉字的汉语拼音的第一个字母 H，J，F，G，分成“HJ”和“FG”两组。此时，你会惊喜地看到一个有趣的排列：它们恰好“对称”地分布在电脑大键盘或小键盘上，而且右边的“HJ”遵守 H→J 的顺序，左边的“FG”遵守 F→G 的顺序，一点也没有把“HJFG”的顺序打乱（图 9-28）!

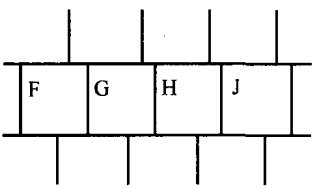


图 9-28　电脑键盘上的“黄金分割”

电脑键盘的发明者也许并不知道汉语拼音，也并不是有意这样把“黄金”暗藏在“IT”产业之中，而得到这个结果纯粹是一种巧合。但我们却可以对这种巧合做出“合理”的解释：“IT”之中确实隐藏“黄金”——要不，为什么说电脑是 21 世纪的三张“通行证”之一呢，为啥“IT”产

业就是“吃香”呢!

9.9 φ，π，6和“中空数”

10 109 876 341 430——一个让人“看不懂”的14位“天文数字”。一个“西方诸葛亮”在“锦囊”中留下了这样一条并不起眼的“妙计”之后，就飘然仙逝。

这个“西方诸葛亮”是谁，这个“天文妙计”是什么意思?

在20世纪80年代，有人预言将在2020年攻克癌症，在月球上建立永久的居民点……

这“2 020”有点“与众不同”：它的第一位数2，代表2 020中有2个0；而第二、三、四位数0，2，0，则分别代表2 020中有0个1、2个2、0个3。也就是说，2 020中的各位数字，分别依次代表从最小到依次增大的非负整数0，1，2，3。

像2 020的这种数有多少?数学工作者们有了这种被称为“奇异特征数”的全体答案（表9-1）。这10个数的总和，就是前面提到的“看不懂”的14位“天文数字”——10 109 876 341 430。“奇怪”的是，在这10个数中，唯独没有一个6位数——而“中空”!

表9-1

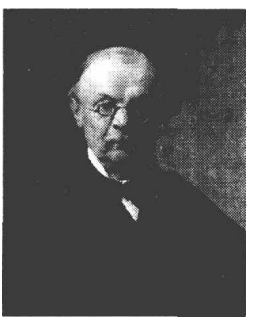
位数	奇异特征数
4位数	1210，2020
5位数	21 200
6位数	（没有）
7位数	3 211 000
8位数	42 101 000
9位数	521 001 000
10位数	6 210 001 000
11位数	72 100 001 000
12位数	821 000 001 000
13位数	9 210 000 001 000

由此可见，“6”的确是一个怪异的数。“6”的怪异，还表现在许多方面：6阶正交拉丁方不存在，6阶完全幻方也不存在……

不过，更“怪异”的是，$6=2\times3$——而 $2:3=0.666\cdots$ 与 $\phi=0.618\cdots$ 很接近！2/3就是ϕ的一个由 F 数构成的渐近分数。

2和3的确绝非“等闲之辈”。另一个事实是，$2^3=8$，$3^2=9$，2^3 和 3^2 是那样和谐、“对称”和“共生”，而且8和9是两个连续的自然数。两个连续自然数8和9，各是另外两个连续自然数2和3的乘幂（而且这两个乘幂的底数和指数正好能“互换”），这种现象在自然数中独一无二！1842年（一说1844年），出生在比利时的法国数学家卡塔兰就提出了这个的著名的“卡塔兰猜想”。2002年初，在德国帕德博恩大学工作的罗马尼亚数学家米哈伊列斯库声称证明了这个猜想。法国塔朗斯境内波尔多第一科学与技术大学的数学家尤里·比卢检查之后说：“我确信米哈伊列斯库的证明是正确的。”2002年3月24日，在加拿大蒙特利尔市举行的加拿大数论协会中，米哈伊列斯库的证明被接纳。于是，卡塔兰猜想成了卡塔兰－米哈伊列斯库定理。

卡塔兰猜想还可以这样表达：方程 $x^z-y^t=1$（x，y，z，t 都是大于1的自然数）只有唯一的一组解 $x=t=3$，$y=z=2$。当然，最早研究这类问题的是法国数学家热尔森——1320年左右，他就证明2和3的幂之间，只有8和9才相差是1。而欧拉则证明 $x^2-y^3=1$ 只有一组解：$x=3$，$y=2$。后来，还有许多数学家也进行过研究并取得重要进展。



卡塔兰

首先提出这种“中空数”的，是我们在4.6.1小节提到过的罗杰·彭罗斯——本节开头提到的那位“西方诸葛亮”。14位“天文数字”，就是他“锦囊”中的“妙计”之一。这位引人注目的罗杰·彭罗斯，也是一位研究广义相对论的科学家、广义逆矩阵的发现者。他还有另一类吸引眼球的杰作“不可能的图形”——例如1958年给出了第一个

《不可能的立方体》，1961 年和另一位英国数学家莱昂内尔·彭罗斯创作了的名画《永无止境的楼梯》和《不可能的三角形》。

当然，“6”的“怪异”，还表现在它的“组合拳”——“666”上。

用 $M(n)$ 表示不大于 n 的、与 n 互素的自然数的个数，那么 $M(666)=6\times6\times6$。

$666=1^6-2^6+3^6$——最小的 3 个自然数“桃园三结义”，

$666=2^2+3^2+5^2+7^2+11^2+13^2+17^2$——最小的 7 个素数“七仙女下凡”。

圆周率 π 的前 144 位数字之和等于 666。

黄金分割数 ϕ 的前 146 位数字之和等于 666。

印度数学家拉马努金发现的 $e^{\pi\sqrt{163}}$ 被称为拉马努金数，人们以为它是一个整数，但事实上却不是。实际上 $e^{\pi\sqrt{163}}=262\ 537\ 412\ 640\ 768\ 743.999\ 999\ 999\ 999\ 250\ 072\ 597\cdots$，而它的前 132 位数字之和等于 666。

$\sqrt{3}=1.732\ 050\ 807\ 568\ 877\ 293\ 527\ 446\cdots$，它的前 146 位数字之和正好等于 666。

$\sqrt[3]{2}=1.259\ 921\ 049\ 894\ 873\ 164\ 767\ 210\cdots$，它的前 156 位数字之和正好等于 666。

……

据说，于 2003 年由剑桥大学出版社在纽约出版的《数学常数》一书中，列举了 905 个这样的“魔鬼数字”。这本书的作者是美国数学家斯蒂文·芬奇。

最后，6 还与“化圆为方”问题有关。据说，古希腊诡辩学家对化圆为方特别感兴趣的原因是，认为要解决这个问题，必须找出一个兼具“方圆特色”的数。所谓方的特色，就是这个数必须是个平方数；圆的特色，就是这个数的个位数必须等于它的平方根的个位数。举例来说，36 就是其中的“佼佼者”——它的个位数和平方根（的个位数）都是 6。

9.10　φ的节日

和圆周率π有一年一度的节日（3月14日）一样，φ也有自己的节日。

据报道，在2008年12月，隶属于湖北省黄冈市的武穴市要修建广济长江大桥。武穴市就在长江边，为什么修的桥要称为“广济”而不叫“武穴”呢？原来，在1987年10月23日，广济县被撤销，设立了武穴市（仍属当时的湖北省黄冈地区）。

当然，当地振兴经济的措施还不止这一项。据说，在与水利部的专家进行研究和粗略测算后发现，蕲春县（也属黄冈市）和武穴市正处在长江全线流域的黄金分割点上，于是准备建立蕲春、武穴黄金分割点纪念碑。同时还有以下打算：①基于黄金分割的美学理论，在长江边修建符合现代美学概念的望江女神雕像等建筑；②在蕲春、武穴城内，建设黄金分割点旅游纪念胜地；③建设黄金分割博物馆，将人类有史以来关于黄金分割的建筑、艺术、生物、文化等发现集于一堂，“为自然界带来巨大的发现”；④在蕲春、武穴，每年6月18日举办“618自然美文化节”，邀请世界知名的大数学家、科学家、企业家、生物学家、符合黄金分割比身材的世界小姐等共聚一堂，畅谈长江全线流域的资源开发、环境保护、旅游观瞻和可持续发展等。

2008年8月，江苏省淮安市开始正式开工建设南北地理分界线标志园，一时成为关注的焦点，城市品牌也得到提升。看来，蕲春、武穴也不会“自甘落后”。

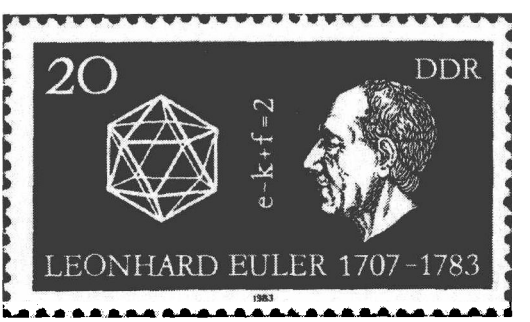
素有“汴洛两京、畿内名山”之称的中岳嵩山，不但位居五岳之“中”，而且处在这两大古都的黄金分割点上。而开封、洛阳往往成为当时的国家首都的原因，就是因为“得中岳之利”。当然，这也是为了发展当地经济的一种有趣说辞。

9.11 “不务正业”的“黄金”

黄金，人类用得最多的词语之一——从古到今，从华夏到海外。

在古代的世界各国，“炼金术士”“炼金”的目的，就是要得到黄金——古人认为最完美的金属。所以，黄金成了动乱时期的“硬通货”，于是民间有“盛世古董，乱世黄金”的说法。而德国社会主义理论家、哲学家马克思则说，黄金是“天然的货币”。

在数学中，欧拉在1750年发现，凸多面体的顶点数 e + 面数 f − 棱数 $k=2$。这个迷人而简洁的“欧拉拓扑定理”，被称为“多面体黄金公式”。妙不可言的是，用它可以证明凸正多面体只有5种。



纪念“欧拉拓扑定理”的邮票：

德国在1983年9月6日欧拉逝世200周年发行

在数论中，有一个非常重要的“黄金律”：不同的奇素数 p 和 q 的“勒让德互反符号”，取决于公式

$$(p/q)\ (q/p) \equiv (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}。$$

黄金律也被称为“黄金定理”或“二次互反律”，首先由欧拉在1783年发现，但没有来得及证明。法国数学家勒让德在不知情和与欧拉没有联系的情况下，于1785年独立发现了这个定理，并给出了部分证明和在1803年出版的一本书中进一步的阐述。勒让德还发明了并不表示“分数”的记号 (p/q) ——设定它等于1或 −1，以表示 p 是 q 的

二次剩余或二次非剩余。黄金律第一个完整的证明，是由1796年时年仅19岁的高斯做出的。由于高斯十分喜欢它，所以把它看作数论中的一块“宝石”，就首先给了它“黄金定理”的美称。就这样，它也被称为“欧拉－勒让德－高斯定理”。其后，黄金定理又有多达50多种的“雨后春笋”般的证明——仅德国数学家巴赫曼在《初等数论》一书中，就列出了52种。它也是数论中最重要的定理之一，在19世纪后半叶成为数论研究中的一个重要课题——甚至被德国数学史家德里写进了他的大作《100个著名初等数学问题——历史和解》一书中。

在物理学中，把通过机械可以省力但不能省功的“功的原理”，被称为“力学的黄金规则”。

在日常生活和政治、体育、音乐、舞蹈等领域，我们经常把某个“最佳组合”称为“黄金搭档”或“黄金组合”。“黄金时代”、“黄金童年”、“金子般的心灵”、“黄灿灿的阳光”，是我们的常见词语。有时还把某个自认为的“铁则”，叫做“黄金法则”。空调商家也打出过“××技术是黄金分割点”的广告。

现任俄罗斯总理的俄罗斯前总统普京，也谙熟“黄金”：“政治的艺术就是在必要和可能之间找到黄金分割点。”

时间当然“贵如黄金”，于是国际上公认的“72小时之内”，是地震的“黄金救援时间”。不过，我们的“黄金时间”是生命中的每一分、每一秒——所谓“一寸光阴一寸金”！

9.12　用纸折出黄金矩形

先将如图的正方形纸片 $ABCD$ 对折，得到 BC 边的中点 E，然后折出 AE。再将 BE 折叠到 AE 上得到 G，显然 $GE=BE$。类似，将 AG 折叠到 AB 上得到 X，显然 $AX=AG$。这样，就得到 AB 上的黄金分割点 X，$AXYD$ 就是黄金矩形。

下面给出简单证明。如图9-29所示，设正方形的边长是1，显然

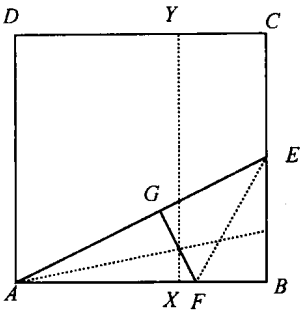


图 9-29

$GE = BE = 1/2$。

因为 $AE = \sqrt{(AB)^2 + (BE)^2} = \sqrt{1 + (1/2)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$，所以 $AX = AG = AE - GE = AE - BE = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$。

第 10 章　无穷的探索——φ 的悬疑、误区和神话

真正的哲学，写在那本经常在我们眼前打开着的最伟大的书中……这本书就是宇宙，就是自然本身，人们必须去读它。

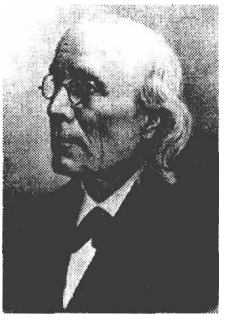
——伽利略

10.1　φ 的悬疑

10.1.1　黄金矩形最美吗

1.100 多年前费希纳的“矩形选美”

“先生们，”1876 年的一天，一位 75 岁的银发老者兴致勃勃，对邀请来参加“选美”的各式各样的 292 位朋友说，“请为您喜欢的矩形投票——哪些喜欢，哪些不喜欢。”大家一看，房间里随意摆着 10 个不同长宽的矩形。



费希纳

这位老者是谁，为什么要搞这次“矩形选美”？

说起黄金矩形是否在矩形中最美的问题，就必须提到一个著名的实验——费希纳实验。

这个实验，是德国哲学家、物理学家、实验心理学家费希纳和他的合作者伍德特做的。他们企图从实验心理学、心理物理学、实验美学角度进行这样的研究：从美学的角度看，哪一种矩形最让人舒服。



韦伯

结果表明，有4个矩形（边长为5×8，8×13，13×21，21×34的“准黄金矩形”）入选——共有35%的人给它们投了“喜欢票”，得票最多。另有40%的人选择了接近这个比率的矩形，没人不喜欢这些矩形。

为什么一部分人选择了接近这个比率的矩形呢？一种解释是，人眼有一种“视错觉”，所以美术家们都把正方形的上横边画得比下横边稍短——这种正方形叫“视觉正方形”。正是由于这种视错觉，才使一部分人没有青睐“准黄金矩形”，而是选择了接近它们的矩形。



韦特海默

费希纳是心理物理学、实验美学的创始人，心理量和物理量之间关系的定律——著名的韦伯－费希纳定律，就是他和另一位德国心理－物理学家韦伯共同创立的。

由于费希纳的这个“矩形选美”非常有名，所以广为流传而有多种说法。其中一种说参加“评美”有600人，结果有90%的人选择了黄金矩形。此外，格式塔心理学的主要创始人和代表之一出生在捷克的德国心理学家韦特海默也做过类似实验。

作为治学严谨的心理学家，费希纳还测量了22家博物馆和艺术长廊的2万张画，用数据研究这些伟大的艺术作品的矩形装饰框是否都有“φ倾向”。结果发现，φ并不是这些名画高和宽关系的必要特征。费希纳实验后的150年里，没有多少人赞同黄金矩形是更好看的矩形这一观点，也没人能提供确凿的证据解释为什么黄金矩形最美。许多人摒弃几乎就是希腊艺术的象征的古希腊雕刻家菲迪亚斯的美学理论——著名的巴台农神庙就是体现他这一理论的、由他领导建造的杰作，认为这是命数的幻想。而同时另外一些人坚持认为尽管他的理论没有足够的证据，但它确实体现了真实存在的现象。

2. 费希纳之后的再研究

“黄金矩形是否最美”的问题，费希纳之后的数学家、艺术家、美学家、心理学家等，都一起或分别上阵。

拉罗是稍晚于费希纳的法国作曲家。大约在 1888 年，他以比费希纳更为科学的方法重新实验，结果与费希纳的结论令人惊讶地相似。

然而，在 20 世纪的另一些实验结果却不尽相同。他们得到两个主要结论：最美的矩形的边长之比，因受试对象不同而异，但都在 1∶2 ~ 1∶1之间；因测试手段不同，某些人“朝三暮四”——同一个人的偏爱，会先后不同。例如在 1997 年，马克罗森等邀请了 51 位有名的画家与雕塑家，进行了一项分割线段的调查。结果表明，他们各自分割的最美、最和谐、最愉悦的线段之比，介于 0.5 ~ 1.0 之间（和上述 1∶2 ~ 1∶1之间相仿）。此外，在同年，波瑟里耶用边长比为 1∶1.8 和 0.618∶1 的矩形对大学生进行“偏爱”测试，也没有得到“一致爱好 0.618”的结论。

既然如此，那为什么许多人喜欢黄金矩形呢？西方美学界认为，这与人对黄金比例构成的人体的视觉沉淀有关。此外，20 世纪一些科学家的研究认为，几千年来人们审美观念之所以没变，和人脑电波的频率（或波长）有关：占人脑电波高低频主导地位的频带平均值的比值，约为 8.13 赫兹∶12.87 赫兹≈ϕ。例如，美国人格列普斯就对 5 种矩形进行过“民意测验”，结果认为最美的是黄金矩形。但是，科学家们还发现，人的情绪也影响着脑电波的频率，这就解释了一些名画的主题并没有 ϕ 点的原因——也是黄金矩形没有“人见人爱”的原因。

3. 中国古代的审美观和美的不确定性

在《胸中之竹——走向现代之中国美学》一书中，有一篇“柳宗元的三个美学命题”，其中有“美不自美，因人而彰”。“美不自美”与中国战国时期的思想家、哲学家庄子的“天地有大美而不言”类似。“因人而彰”出自中国唐代文学家柳宗元的《邕州柳中丞作马退山茅亭记》一文，原文为：“夫美不自美，因人而彰。兰亭也，不遭右军，则

清湍修竹，芜没于空山矣。”对审美——包括“矩形审美”活动甚为重要的“因人而彰”的观点，是“美不美，因人而异”的“古代版”，也可以部分解释为什么黄金矩形并没有“人见人爱”。

“不确定性确实使矛盾出现并且必须得以解决。至今已有25个世纪之久，数学家们一直在改正他们的错误，并且看到了这门科学欣欣向荣，使他们对未来充满希望。”20世纪法国著名的布尔巴基学派的这段话，并不是针对黄金矩形是否最美来说的，但我们依然对未来解决这个问题充满希望。

不过，纯数学的观念使英国数学家和哲学家罗素似乎是开玩笑的话，具有值得重视的现实和深远的意义：“数学可以定义为这样一门科学，关于它我们永远也不知道我们说的是什么，也不知道我们说的是不是真的。”

10.1.2 弦长的1/12处弹出的音乐最美吗

“1970年我国著名琵琶演奏家×××决心运用‘优选法’，寻找在琵琶弦每根上能发出最佳音色的点，不久，×××教授用数学方法帮他解决了这一难题。在弦长的1/12处，弹出的声音格外优美动听。1980年5月在全国琵琶演奏会上，几十位演奏家停了‘最佳点’的演奏后，都认为数学与音乐之间可能有一种深奥的内在联系。”

这是一本书中认为琵琶弦每根上能发出最佳音色的点在1/12处的一段话。但是，这种观点值得怀疑。

10.2 φ的误区

10.2.1 琴弦长度的误区

1. 毕氏的传说

中国明代嘉靖二十九年（1550年），住在怀庆城（今河南泌阳）的

人们看到这样一幅景象：在郑恭王的王宫外面，一间小土屋“拔地而起”——这间小土屋既不是猪圈也不是鸡舍，那么谁住在里面呢？

我们暂不回答这个问题，先来看一看一则关于古希腊的传说。

“毕氏来了，他听到远处一下又一下的‘当，当……’声——好似悦耳的音乐。走近一看，原来是一个铁匠坊里的铁匠在打铁——铁锤打击铁砧发出的敲击声。他拿出尺子一量，发现铁锤和铁砧的尺寸，符合黄金比。这一个偶然的机会，把他吸引。回家以后，取他又拿出一木棒分成两段，仔细测量后发现了铁砧和铁锤的大小比例近乎于 1∶0.618，并最终得出音乐与 ϕ 有关的结论。”

这是一段叙述毕氏发现音乐与 ϕ 有关的文字，在不少报刊书上，也有类似叙述。于是，就有人说：“乐器弦长的比等于 ϕ，弹奏出的声音就和谐悦耳。”理由是，凡是遵守“ϕ 规则”的东西，都是最美的。

事实果真如此吗？

2. 弦长的比等于 ϕ 弹奏出的声音并不一定和谐悦耳

我们知道，决定发音体音高因素之一是物体的长度——长度越小，音调越高（也就是频率越大或波长越小）；长度越大，音调越低（也就是频率越小或波长越大）。具体计算弦振动频率 f 的公式，是英国著名数学家泰勒在 18 世纪初得到的：$f=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$（$l$，$T$，$\rho$ 分别表示弦的长度、张紧程度、密度）所以，我们看到二胡发出低音时，按着弦的手指一定离“千斤”（“千金”）更近。

那么，对应于乐器上各个音的弦长的比值，是不是 ϕ 呢？不是的。这些比值是 $\sqrt[12]{2}$（$\approx 1.059\ 463\ 094\ 395\ 295$）或者它的若干次幂。例如，设第一个音“1”对应的弦长为 1，那么比它低半个音对应的弦长就是 $\sqrt[12]{2}$，低 1 个全音对应的弦长就是 $(\sqrt[12]{2})^2$……直到低 12 个半音（例如“1”就比“$\dot{1}$”低 12 个半音）时对应的弦长为 $(\sqrt[12]{2})^{12}=2$。这就是“十二平均律”。

十二平均律又名“十二等程律”或“新法密率”，就是把一个 8 度



斯帝文

的音程平均分为12等份。新法密率，是由中国明代数学家朱载堉首先在公元1580年之前发现的，发表在1581年所写的《律历融通》一书中，在他1584年写的《律历新说》一书中也有记载。他算出了$\sqrt[12]{2}$的实际上的24位小数近似值，适于计算当今广泛采用的、基于十二平均律的“七声音阶”。约1600年，荷兰数学家、物理学家西蒙·斯蒂文敲定为准确的值$\sqrt[12]{2}$。

对于十二平均律，英国生化学家、科学史家李约瑟在《中国科学技术史》（1954年出第一卷）一书中说，法国音乐家默西内在1636年所著的《谐声通论》一书中，才发表了相似的理论。所以李约瑟赞赏朱载堉的十二平均律是“登峰造极地步的大发明”。另一种说法是，100多年以后，德国音乐家威尔克迈斯特也提出同样的理论。不过，西方音乐界的看法，是德国著名作曲家巴赫发明了十二平均律——他于1722年发表的《谐和音律曲集》(《The 48》，另译《十二平均律曲集》)，有可能就是为十二平均律的键盘乐器写的。



默西内

虽然从“1”到“$\dot{1}$”之间的12个“半音”（$1^{\#}$，2，$2^{\#}$，3，4，$4^{\#}$，5，$5^{\#}$，6，$6^{\#}$，7，$\dot{1}$）的每两个相邻音之间对应的弦长之比为$\sqrt[12]{2}$，但听起来却正好相差半个音。

由此可见，“乐器弦长的比等于φ，弹奏出的声音就一定和谐悦耳”的说法，没有科学依据。

3. 朱载堉给我们的启示

对中外学者所尊崇的“东方文艺复兴式的圣人”朱载堉，我们必须多说几句。

朱载堉贵为王子，是明太祖朱元璋的九世孙，父亲朱厚烷是明仁宗

朱高炽的第六世孙，袭父封爵为郑恭王。15 岁的朱载堉从他父亲被贬之后隐居土屋 19 年，以示孝顺——原来，住在小土屋的就是他。在这期间和以后，他布衣蔬食、发奋攻读，夜以继日地致力于乐律、历算的研究，撰写了大量学术著作，最终才因发现十二平均律等，成为世界科学和艺术上的巨星。

对此，我们要把一段名言送给他，并和读者共勉："伟人所达到的高处，并不是飞到的，而是在同伴们都睡着的时候，一步步艰辛地向上攀爬的。"

然而，对于不爱富贵爱科学的朱载堉，却有一些"现代遗憾"。

十二平均律理论被欧洲来华的传教士带到了西方，产生了深远的影响，朱载堉也随之享誉欧洲。德国物理学家亥姆霍茨就评价说："在中国人中，据说有一个王子叫朱载堉的，他在旧派音乐家的大反对中，倡导七声音阶。把 8 度分成 12 个半音以及变调的方法，也是这个有天才和技巧的国家发明的。"然而，这是"墙内开花墙外香"——一边是欧洲人赞叹并实践朱载堉的伟大发明，一边是中国把他的创造束之高阁。在沉睡了 400 多年之后，尽管朱载堉被重新认识和研究，但他仍然躺在学者的书房里。不信，我们可以翻开任何一本历史教科书，无论是小学的或是中学的，很容易看到明代医学家李时珍，明清两代数学家徐光启、地理学家徐霞客、科学家宋应星等的成就，但却难发现朱载堉的名字。这正如李约瑟在《中国科学技术史》中所说："这真是不可思议的讽刺。"

因此，对于当今在"市场经济"下想"尽快富起来"的我们来说，恐怕得反思一下是否真正把科教兴国的基本国策落到实处，是否对"基础科研"对于可持续发展的重要性有足够的认识，是否在抓"钱"的同时弘扬科学精神——例如像"富贵不能淫"的朱载堉那样夜以继日地去发奋攻读和研究……

4. 二胡"千斤"的误区

此外，还有一种说法："二胡要获得最佳音色，其'千斤'则须放

在琴弦长度的0.618处。”这也是一种误区。

这两种误区的来源已经无从考察，但可以猜想，毕氏当年用数和黄金分割研究过调和音乐，得出“弦长的比值越简单，其音调越和谐”的结论，于是有人就把两者来个“拉郎配”式的结合，再凭想象加在他的头上用于乐器的弦长，讹传至今。

10.2.2 古琴参数的误区

“中国最古老的古琴，处处透着φ的神奇。至于古琴发明何时已无考，传说中有伏羲、神农、或是舜帝，琴背两池，左龙右凤。控制琴弦发音的枢纽有三：轸，龛掌，凤嗉。琴有五弦，音有八度。琴节为徽，‘以琴长全体三分损一，又三分益一，而转相增减’，全弦共有十三徽。把这些数字排列到一起：二池，三纽，五弦，八音，十三徽。多么奇妙的排列，恰是F数，而两个相邻F数的比值则越来越接近φ。是有意还是巧合？看来，中国古人对φ的领悟与运用，与西方确有异曲同工之妙。”



1978年湖北随县曾侯乙墓出土的战国彩漆五弦琴

这是一段说古琴神奇的文字。其实，这些排列之所以“恰是F数”，仅仅是一些巧合，并非有意安排。例如，古琴就还有七弦、十弦、二十五弦等多种，结构也不完全相同，并不一定和φ“沾亲带故”。

10.2.3 用“黄金定律”能提高彩票中奖机会吗

2007年11月7日，《重庆晚报》在第11版报道了一则体育彩票的消息：退休工程师周详国（化名）仅投入4元，就中了615万元的大

奖；他自称是运用《易经》中金木水火土的走势变化选号而中奖的。显然，周详国所说的选号方法太“八卦”了，以至重庆市体彩中心的负责人也表示，这“实属偶然”。事实上，他的选号方法和有的彩民用车牌号、电话号和生日等选号一样——如果中奖，实属偶然。

然而，周详国的这类选号方法却总有“相似版”。例如，有人声称，“彩票选号中的黄金定律”由两部分构成，一部分是“黄金周期循环”，另一部分是“黄金分割优选法”。

据这些人说，“黄金周期循环”的表现是：“根据科学研究发现，凡是间隔周期上到达某一个 F 数（1，2，3，5，8，13，21，…）时，往往会出现历史性重复或发生某种大的变化，科学家把它称为‘黄金周期时间之窗’。”比如每隔 1 期、2 期、3 期的球经常会出现，某个冷号休眠达到 13 期、21 期时会出现，一般情况重号多数为三个，等等。于是，就建议买股票时选用那些将要重复的数字。

彩票的“黄金分割优选法”则通过下面的实例来说明。比如，从静态角度分析 30 选 7 这种玩法，位于 0.191，0.382，0.500，0.618，0.809 这五个“黄金点”的号码应该是 05，11，15，19，24。但是，彩票号码产生并非处在静态中，而是始终处于动状中。所以，从静态角度计算把起点定在 01、终点定在 30 上产生的这些数字，实际意义不大。要在实战中运用“黄金分割法优选法”，就必须找到一个变化的起点——将上一期中奖号码中的特别号，作为本期的起点。

那么，这样是否就真能中奖呢？

我们认为，不管是“黄金周期循环”还是“黄金分割优选法”，都没有任何科学依据。这是因为，彩票的中奖号码，是随机抽取或摇滚出来的，那么每一个数字出现的概率是完全相同的——既与前一次或前几次的中奖号码无关，也不会“特别亲热”“黄金点”号码。所以，用“彩票选号中的黄金定律”来选号，完全不能提高彩票中奖机会。例如，如果中奖号是一位数，那 0～9 这 10 个数字中奖的概率都是 10%；如果中奖号是两位数，那 00～99 这 10 个数字中奖的概率都是 1%，

等等。

明白了这个简单的科学道理，就不会去相信那些能预测中奖号码的人、“理论”和书而上当受骗了。其实，这个“利害关系”的道理非常简单：如果这些人真的掌握了彩票中奖的“秘方”，那他还会把“发财”的机会拱手送给别人吗？

那么，有没有提高彩票中奖机会的“秘方”呢？我们的回答是：既“有”，又没有。说“有”，是抱着一片爱心去买彩票，就不去指望回报，说不定哪一天“大馅饼”就会砸在你头上；说没有，就是不管用什么“秘方”，也不管有多大或多少次投入，都不会提高中奖的概率——“付出”，在这里并非“总有‘回报’”。

10.3 φ的迷信或神话

“谁见过或摸过上帝吗？没人见过也没有摸过吧！因此上帝不存在。”有人说。

当有人问爱因斯坦这个“上帝是否存在”的问题时，他回答道：“我相信……上帝，但我相信的是斯宾诺莎的上帝……”

那么，“斯宾诺莎的上帝”是什么呢？是不仅包括物质世界，还包括了精神世界的上帝——“他”通过自然法则来主宰世界。也就是说，“斯宾诺莎的上帝”就是自然。于是爱因斯坦接着说：“而不相信那个同人类的命运和行为有牵累的上帝。”

从大自然是“斯宾诺莎的上帝”和爱因斯坦“不相信同人类的命运和行为有牵累的上帝”出发，我们就可以找到迷信之所以成为迷信的玄机，也可以找到迷信“长盛不衰”的“密码”——神话（包括φ的神话）也是这样。

于是，“每个时代都有其神话，并称之为更高的真理。”

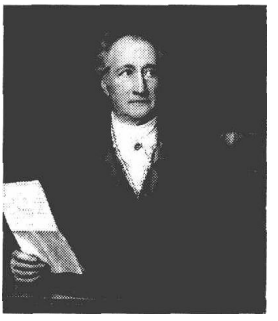
10.3.1 五角星不能避魔

“靡菲斯特（恶魔名）：‘老实说罢，我要走出去的时候，实在有点

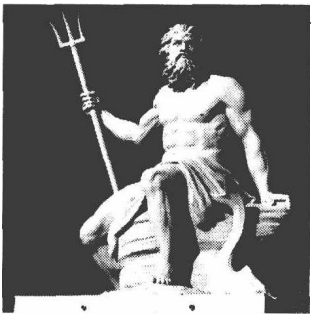
障碍，那门限上的符咒'。浮士德：'是那个五角星纹'障碍了你？……"在德国著名诗人歌德的名著《浮士德》中，我们可以读到这样一段对话。

为什么恶魔靡菲斯特会害怕门限上的五角星纹符咒呢？

德露德（Drude）是德国神话中的女妖、女魔，脚像五角星的鸡爪。所以，在德语中，五角星有一个不光彩的名字——魔爪（Drudenfuss）不过，在古代和中世纪，这个德露德却非常受人宠爱——"光辉形象"常常被画在大门上。



歌德



希腊神话中的海神波塞冬

原来，不少人把五角星作为避魔的护身符，于是德露德成了迷信者的"最爱"。这样，靡菲斯特也就害怕德露德了。

当然，五角星是不能避魔的——五角星能避魔是一种迷信，能"避魔"的只有我们自己。

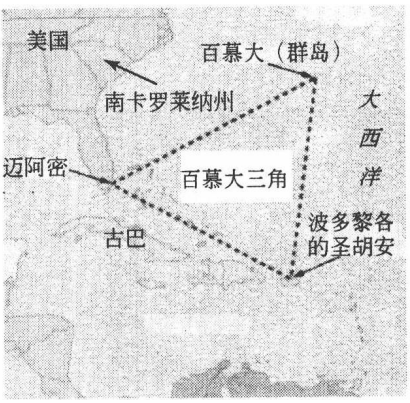
把古老宗教中代表宇宙和谐之美的五角星作为"魔爪"的，还有基督教。作为梵蒂冈清除异教并使大众皈依基督教的运动的一部分，天主教会掀起了一个污蔑异教神和异教女神的运动——把他们的神圣的象征符号五角星重新解释为邪恶的符号。在异教象征和基督教象征的争斗中，异教徒输了。海神波塞冬的三叉戟成了恶魔的草叉，象征智慧的锥形尖顶帽成了女巫的象征。就这样，五角成了邪恶的象征。

不幸的是，军方也把五角星曲解为最重要的战争符号——涂在战斗机上，挂在将军们的肩膀上……

10.3.2 百慕大三角的迷雾

1. 百慕大三角的迷雾

“最突出的实例是，装载着锰矿的美国海军辅助船‘独眼神’号在1918年3月神秘失踪，迄今仍是一个谜。”这是数不清的媒体反复登载的“百慕大三角悲剧”之一。



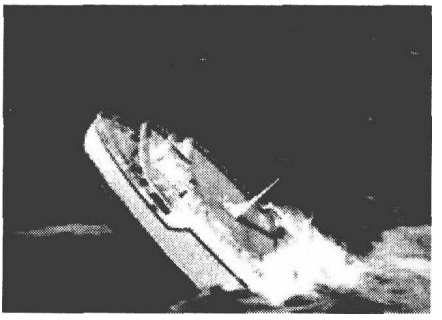
百慕大三角地区的地理位置

最早提出“百慕大三角”一词的，是1964年出版的一本《商舰队》杂志。百慕大三角地区，又称为魔鬼三角区、死亡三角、魔海、丧命地狱，位于百慕大（距离美国的南卡罗莱纳州东部大约917千米）群岛、美国佛罗里达半岛南端的迈阿密和波多黎各的圣胡安这三点连线形成的三角形水域。这片又叫“马尾藻海”的水域，面积约40万平方英里。

由于在百慕大三角海域曾多次发生过“莫名其妙”的航船、飞机失踪，而且无法找到原因，使“地球人”一提到百慕大就毛骨悚然，所以有人就要找“理论依据”来解释。为此，他们“创立”了五花八门的理论或假说：“外星人绑架论”、“大西国发射激光论”、“黑洞理论”、“海上次声波振动理论”、“高压油气说”、“平行宇宙论”、“第二重力论”、“四维空间论”、“时空收缩论”、“磁场说”、“黑洞说”、“次声说”、“水桥说”、“晴空湍流说”……长期以来，研究百慕大三角简直成了一门学问，由此而来的电影、小说、书籍、文章等不计其数，层出不穷。

但是，最玄妙的“理论”莫过于“黄金分割说”了。原来，一些人发现了百慕大三角位于大约北纬20～40°、西经35～75°之间，就在

它的地理位置上做文章。他们说，把北纬共 90°按 0.618 分割为大约 56°和 34°之后，34°就在北纬 20～40°范围内。



海轮葬身“鱼腹”

在百慕大三角的神秘失踪事件的报道，从来就没有停止过。例如，有名的代号为“飞行 19 号”事故——1945 年 12 月，美国海军的 5 架轰炸机从佛罗里达州的罗德岱堡空军基地起飞执行例行的巡逻任务，一个小时之后，消失在百慕大三角，连救难队也没了影踪。1963 年，“硫磺女王”号货轮在百慕大三角失踪，只留下两个救生圈……

于是，在大致同一纬度，又“克隆”出了中国、英国、日本等国的“陆地百慕大三角”。有关“报道”和“研究”，当然也如火如荼。

2. 谎言与真相

让人“谈慕色变”的日子到了 1974 年，英国人贝利茨出版、卖出了 500 万册的畅销书《百慕大三角》。在这本书出版之后，他又声称在百慕大三角的海底发现了一座大金字塔。还说这座金字塔至少高 420 英尺，底座边长 540 英尺，并声称这座金字塔可以揭示那些神秘失踪的奥秘。

然而，就在《百慕大三角》出版后的第二年即 1975 年，美国亚利桑那州立大学图书馆员库舍就出版了《百慕大三角神秘——已解》一书，详细地介绍了他对每一起事例的调查结果。这本书主要就是为了反驳贝利茨的畅销书而写的，后来被美国海岸警备队、伦敦劳埃德保险公司和许多权威机构认为是对百慕大三角现象的定论。不过，贝利茨也没有闲着——1977 年，他又出版了《无影无踪：来自百慕大三角的新信息》，并不打算“缴械投降”。

于是，贝利茨和库舍的“生死”PK 就不可避免了。1978 年 3 月，

库舍要求与贝利茨打赌。打赌的内容是，各向一家银行存入一万美金，如果在1978年9月1日之前，贝利茨能够出示海底金字塔存在的证据，并被美国考古研究院、美国地球物理联合会、全国地理学会等权威机构证实，将赢得赌金；更重要的是，库舍将承认贝利茨是正确的。

然而，贝利茨却“不愿”抓住这证明自己正确的“大好机会”——在这场“大决战”前夕“临阵脱逃”。贝利茨怯战的事实是，在邀赌截止日期前一周的1978年4月24日，通知这家银行的副行长，他不愿接受库舍的挑战——等于承认自己是在毫无证据地信口开河。至此，这出闹剧在美国告一段落。

在库舍的《百慕大三角神秘——已解》中，得出了十条结论，主要内容可以归纳为：①大多数的事故都能合理解释，并不神秘；②许多“事故”是虚构的——包括细节的虚构和当事人、报道者的虚构；③发生在别处的事故也被算进了百慕大三角之中；④添油加醋，以讹传讹，越传越离谱。例如，“飞行19号”事故，是领头机机长的指南针被损坏，而且他没有戴手表，其他飞机又缺乏工具，于是机群在翻滚的海浪上空无法降落，最终因燃油耗尽而葬身鱼腹。再如，“硫黄女王”号事故更简单：出事时航行在百米高的海浪之间，还有飓风般强劲的大风。

于是我们可以得出肯定的结论：所谓百慕大三角是“神秘的死亡三角”的离奇传言和故弄玄虚的原因分析，完全没有科学依据，更与φ毫无联系。

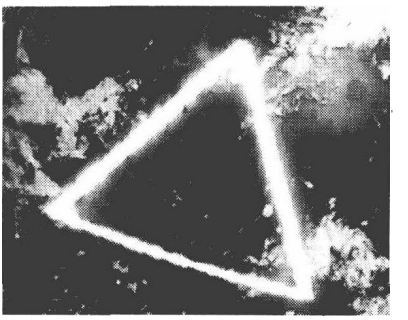
3. 百慕大三角的“φ兄弟”

不过，百慕大三角的迷雾虽然拨开了，但类似的迷信或伪科学的表演却一刻也没有消停——包括用这个题材的电影等。

在贝利茨和库舍的“生死”PK后11年的1989年，贝利茨又出版了“大作”《龙三角》一书，使“日本海的百慕大三角”——“龙三角”第一次有了现代恶名。

龙三角北起日本海中部，南到关岛的马里亚纳群岛。比起百慕大三角，当时的龙三角默默无闻，但后来越来越多地吸引了人们的注意。据

说，从 20 世纪 20 年代以来，发生在龙三角的神秘失踪等奇怪现象的数量之多、情形之奇，比百慕大三角有过之而无不及，更加波谲诡秘，令人瞠目结舌和不寒而栗。例如，第二次世界大战以来，据说有 1 500 多艘大船，数百架军用、商用和民用飞机在这里“离奇失踪”。



比百慕大三角更恐怖的龙三角

于是，龙三角的研究者就认为，百慕大三角和龙三角酿灾都有类似的原因——例如都在北纬 30°附近，还有神秘磁场的影响，等等。

还有对地理和人文现象的“ϕ 分析”。

例如，中国好茶的产地——如杭州、屯溪、祁门，位于北纬 30°附近；旅游胜地——如黄山、庐山、九寨沟，都在这一纬度上；太湖、洞庭湖也在这个纬度上；大城市上海、武汉、重庆、拉萨也位于北纬 30°附近；一些航天发射中心——如中国的西昌，美国的休斯敦、亚特兰大，也同样位于北纬 30°附近。地球是一个椭球体，纬度是椭球面的法线与赤道平面的交角。北纬 30°差不多是把北半球投影这个半椭圆按“ϕ 分割”。

再如，有不少人说，北纬 23.5°是一个奇特的地带，在这条太阳回归线上，有不少自然奇观与人文奇迹：世界最大的撒哈拉沙漠，世界上最深的海沟马里亚纳海沟，世界屋脊青藏高原上的珠穆朗马峰，著名的自然风景区张家界、西双版纳、桂林、云南石林，著名的能量异常区百慕大三角，世界上最大的金字塔群；世界名人有不少出生在这个地带上……

这些人还说，地球地轴的倾斜，具有其深刻的宇宙意义：倾斜的地轴造成的太阳回归线，用黄金分割律来分析恰好位于地球地轴的 ϕ 点上；有人把中东地区看成地球的“肚脐”——它不仅正好位于大约东

经30°、北纬30°处（接近34°），而且有最大的石油库，是世界两大宗教的圣地，又是历史上非常多事的地方……

“将地球表面纬度0～90°进行黄金分割，就得到34.38°:55.62°，这两个纬度之间被称为地球的‘黄金分割带’。从平均气温、年日照时数、年降水量和相对湿度等来看，这一地带都是最适合人类生活的区域，因此世界上几乎所有发达国家都在这个地带。”

4. 破除迷信任重道远

1）百慕大三角的“φ兄弟”并没有什么神秘之处

首先，龙三角真有那么多“失踪”事件，也没有任何“离奇”之处。例如，从引起事故的原因之一风浪来分析，比起百慕大三角处大西洋的飓风恶浪来说，位于太平洋最深处附近的龙三角从来都“不甘示弱”，当然也就不会“太平”。

第二，对前面说的“中国好茶地带”和“北纬23.5°地带”，如果我们另外分别找两个纬度，同样也能分别列出不少类似的“自然奇观与人文奇迹”。

第三，对前面“地球肚脐”处是“是非之地”的说法，如果另外去找一个地方，也能找到无数的“多事之秋”。

第四，对于前面纬度在34.38°和55.62°之间“最适合人类生活”的现象，并不能说明φ的特殊作用——地球的运行规律决定了它和太阳之间的相对位置，导致这个地带气候条件必然优越。

2）破除迷信任重道远

然而，像百慕大三角和它的“φ兄弟”在国外逐渐销声匿迹之时，却在中国紧锣密鼓地开演，至今仍未停息。举例来说，不止一家出版社出版了有关书籍，至于其他各种的宣传，更是随处可见，不绝于耳。

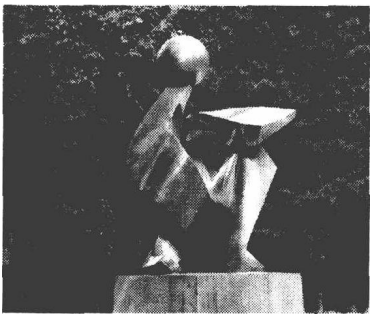
具体的实例之一是，直到2009年底，有媒体还在报道下面元世祖忽必烈和龙三角之间的“拉郎配”。1274年，忽必烈的大元帝国组织了一支由4万人、9百多艘舰船的庞大舰队进攻日本，结果约2/3被龙三角吞噬；1281年，他再率更大规模的14万人和3千艘战舰，第二次去

征服日本，最终 7 万官兵和一半战舰葬身龙三角。于是，“胜负原来是可想而知的。但是在龙三角发生的灾难阻止了庞大的舰队”。于是，“日本人说，这是‘神风’在袭击元军，挽救日本”。

面对这些随处可见的荒谬说法——包括常见的金字塔与 π，ϕ 有关的说法，我们千万不要信以为真而迷失方向，而应跟上世界“先进的脚步”。例如，在 2009 年 2 月 21 日《参考消息》转载的西班牙《趣味》月刊 1 月号文章“二十世纪六大谎言与真相”中，就将“百慕大三角之谜”“光荣”选人。

当然，科学与迷信的 PK 也仍将继续。而“一路的方向，照耀我心上”对我们就显得特别重要！

在北京大学的学生宿舍区，一座由扭曲字母“DS”组成的雕塑引人注目。这里的“D”代表“民主”（democracy）——人称“德先生”；而“S”则代表“科学”（science）——人称“赛先生”。关于这个雕塑，有下面的“雷人”演绎。一天，有两个学生从雕塑前经过，那个学自然科学的指着雕塑说：“看，科学顶个球，多形象的比喻。”另一个学社会科学的则叹了口气说：“你就别发牢骚了，科学还顶个球，民主连个球都不顶。”这个演绎，辛辣地讽刺了那些“假民主或科学而行”的罪恶或迷信。



北大学生宿舍区的“DS 雕塑”

不是么，2010 年 4 月 7 日，河南洛阳孟津西霞院初中的女生雷梦佳，不是就在“民主”的“全班公决”中，被超过“2/3 多数”的“26 人投票驱逐”后死于非命的么！这里的“民主”，应读作践踏“义务教育法”的伪民主和伪科学——法治精神本来就是科学精神的具体表现之一。而当我们成年人对民主还经常迷惘的时候，让一群未成年且更未受过系统民主训练的孩子，去投票决定一个同学的去留——即便这个同学极其顽劣

——是彻头彻尾的违背科学精神之举。而我们还要说的是：“五·四”运动的先辈们，当年是十分睿智地将“德先生”与“赛先生”一起请到中国的，只是这历程之艰辛，远远超过了他们想象；如果“德先生”不和“赛先生”结伴同行，就会陷入可怕的深渊——这就是我们前面所说的“先进的脚步”和“一路的方向，照耀我心上”。

由此看来，如果只要“赛先生”而不要“德先生”，那么“破除迷信”，也只是永远的水月镜花。

参考文献

阿·乌耶莫夫. 1958. 逻辑错误怎样妨碍正确思维. 上海：上海人民出版社

巴罗. 2000. 不论——科学的极限与极限的科学. 上海：上海科学技术出版社

北京矿业学院高等数学教研室、四川矿业学院数学教研室增订. 1976. 数学手册. 北京：煤炭工业出版社

陈仁政. 2004. 站在巨人肩上·科学悲剧故事. 北京：北京出版社

陈仁政. 2005a. 好玩的数学·不可思议的 e. 北京：科学出版社

陈仁政. 2005b. 好玩的数学·说不尽的 π. 北京：科学出版社

陈仁政. 2008a. 科学天梯·科学悖论故事. 南京：江苏科学技术出版社

陈仁政. 2008b. 科学天梯·科学趣味故事. 南京：江苏科学技术出版社

德里. 100 个著名初等数学问题——历史和解. 1982. 罗保华等译校. 上海：上海科学技术出版社

邓宗琦. 1990. 数学家辞典. 武汉：湖北教育出版社

杜瑞芝，王青建，孙宏安等. 1991. 简明数学史辞典. 济南：山东教育出版社

盖尔. 2001. 蚁迹寻踪及其他数学探索. 上海：上海教育出版社

杭斯伯格. 1985. 数学中的智巧. 李忠译. 北京：北京大学出版社

亨特，玛达其. 1998. 数学娱乐问题. 张远南等译. 上海：上海教育出版社

华尔德，皮特勒. 1978. 优选法基础. 尤云程译. 北京：科学出版社

简明社会科学词典编辑委员会. 1982. 简明社会科学词典. 上海：上海辞书出版社

解恩泽. 1987. 简明自然科学史手册. 济南：山东教育出版社

金玉满等. 1988. 实用百科知识库. 北京：北京科学技术出版社

康拉德等. 1987. 科学发现与发明辞典. 周忠德等编译. 上海：上海知识出版社

克莱因. 1979. 古今数学思想. 北京大学数学系数学史翻译组译. 上海：上海科学技术出版社

克莱因. 1999. 数学：确定性的丧失. 李红魁译. 长沙：湖南科学技术出版社

李天华，许济安．1989. 数学奇观．第二版．武汉：湖北少年儿童出版社

李毓佩，余俊雄．2003. 探索形状奥秘日光篇．北京：中国少年儿童出版社

梁绍鸿等．1958. 初等数学复习与研究·平面几何．北京：人民教育出版社

梁宗巨．1992. 数学历史典故．沈阳：辽宁教育出版社

刘以林等．1997. 世界科学演义．长春：吉林文史出版社

迈克尔·哈特．1988. 历史上最有影响的100人．苏世军等译．武汉：湖北教育出版社

帕帕斯．1998. 数学趣闻集锦．张远南等译．上海：上海教育出版社

裘宗沪．1981. 趣味数学三百题．北京：中国少年儿童出版社

让·迪厄多内．1999. 当代数学 为了人类心智的荣耀（书名中有间隔）．沈永欢译．上海：上海教育出版社

日本数学会．1984. 数学百科辞典．科学出版社组织国内学者编译．北京：科学出版社

单墫．1987. 趣味数论．北京：中国青年出版社

数学名词审定委员会．1994. 数学名词．北京：科学出版社

谈祥柏．2005. 乐在其中的数学．北京：科学出版社

王健．2003. 创新启示录：超越性思维．上海：复旦大学出版社

王青建．2004. 数学史简编．北京：科学出版社

吴国盛．1995. 科学的历程．长沙：湖南科学技术出版社

吴文俊．1995. 世界著名数学家传记．北京：科学出版社

吴振奎．2003. 数学的创造．上海：上海教育出版社

吴振奎．1987. 斐波那契数列．沈阳：辽宁教育出版社

新华通讯社译名资料组．1985. 英语姓名译名手册．修订第三版．北京：商务印书馆

伊夫斯．1986. 数学史概论．欧阳绛译．太原：山西经济出版社

伊夫斯．1990. 数学史上的里程碑．欧阳绛等译．北京：北京科学技术出版社

伊莱·马奥尔．2000. 无穷之旅——关于无穷大的文化史．王前等译．上海：上海教育出版社

易南轩．2002. 数学美拾趣．北京：科学出版社

尹斌庸等．1985. 古今数学趣话．成都：四川科学技术出版社

有趣的数学编写组．有趣的数学．1979. 上海：少年儿童出版社

俞润汝．2008. 32 阶三次全息数方集．重庆：重庆出版社

郁祖权．2004. 中国古算解题．北京：科学出版社

曾晓新．1990. 数学的魅力．重庆：科学技术文献出版社重庆分社

张景中．2002. 数学家的眼光．北京：中国少年儿童出版社

张其春，蔡文紫．1977. 简明英汉词典．北京：商务印书馆

张淑梅．2006. 世界各国国花国树．重庆：重庆出版社

张远南．1990. 数学故事丛书·未知中的已知——方程的故事．上海：上海科学普及出版社

赵殿泽．1987. 构成艺术．沈阳：辽宁美术出版社

赵荣芳，冯晓梅．2003. 探秘数学思维．北京：北京科学技术出版社

中国大百科全书编委会．1980～1993. 中国大百科全书．北京：中国大百科全书出版社

中国科学院自然科学史研究所近现代科学史研究室．1985. 20 世纪科学技术简史．北京：科学出版社

中学数学教师手册编写组．1985. 中学数学教师手册．上海：上海教育出版社

自然科学大事年表编写组．1975. 自然科学大事年表．上海：上海人民出版社

HORNBY A S，et al. 1978. 现代高级英汉双解辞典．第十版．香港：牛津大学出版社（香港）

后　记

为本丛书寻找信息、查抄资料、提供资料、编著书稿、誊写书稿、绘图、审核校对的，还有陈梅、陈雪、陈仕达、郭汉卿、黎渝、陈仁仲、李昌敏、陈立、陈楠、李开贵、梁聪、宋贵清、涂海、王东、杨素君、赵贤菊、席波、李骥、任洁等作者。此外，张景中、李敏、郭书春、宁挺、梁宗巨、张奠宙、查有良、吴振奎、丘和、曾润生、王青建、邹大海、彭定才、潘宁、毛雷尔（原德国驻华大使馆工作人员）等专家、学者和其他人士，对本书的写作、出版、提供资料等工作，分别进行了指教、帮助和支持。在此，对以上和未提到的、也提供帮助的其他人员均表示衷心的感谢。

由于本丛书参考的文献较多，所以许多参考文献未能列出，在此，谨向这些文献的作者表示感谢和歉意。此外，有少量图片的原始作者没有找到，请这些图片的原始作者与我联系。

陈仁政

2011年4月30日