解码三大数学常数

e的密码

2.718,

一个天设地造的数——永无止境又不循环，像宇宙一样没有尽头；

从17世纪“诞生”以来，像一位正值当打之年的科学泰斗，统御着科学的方方面面。

它一直都是个谜，令人感到神秘奥妙、玄机莫测，

迫使人们永无止境地探索。

陈仁政/著

科学出版社

(O-4254.01)
责任编辑：李 敏 赵 鹏
封面设计：黄华斌

本书以生动活泼的形式，通俗地介绍了对数的发明、这一发明的重大意义，如何用它来解决实际问题，以及常用对数的诞生和应用；翔实地揭示了自然对数的诸多之谜——它的底e为什么与圆周率π一样在整个科学中大放异彩？为什么数学家要用e作为自然对数的底？以e为底的对数为什么叫自然对数？e究竟是一个什么样的数？……

本书不但把e融入整个数学以至科学之中，而且把人文精神融入其中，对提高人的综合素质，特别是培养人的健康心理大有裨益。

本书适合具有中等及以上文化的青少年或成人阅读，也是研究e的重要参考书。

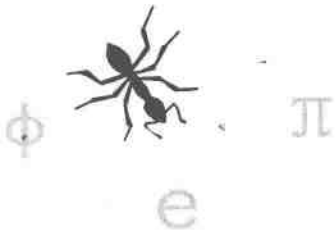
您想看凡尔纳小说中的“冒牌大力士”吗？您想独自在拔河比赛中让一群人俯首称臣吗？那就“跟我走吧”，现在就出发，穿过快乐的河流，就会到达e的“老家”！

www.sciencep.com
ISBN 978-7-03-030885-6
9 787030 308856 >
上架建议：数学/科普
定 价：38.00 元

01-49
C549-4

郑州大学 *04010712996$*

解码三大数学常数



e的密码

2.718,

一个天设地造的数——永无止境又不循环，像宇宙一样没有尽头；

从17世纪“诞生”以来，像一位正值当打之年的科学泰斗，统御着科学的方方面面。

它一直都是个谜，令人感到神秘奥妙、玄机莫测，

迫使人们永无止境地探索。

陈仁政 著

郑州大学图书馆
2011-03-09
藏书

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书以生动活泼的形式，通俗地介绍了对数的发明、这一发明的重大意义、如何用它来解决实际问题，以及常用对数的诞生和应用；翔实地揭示了自然对数的诸多之谜—它的底 e 为什么与圆周率 π 一样在整个科学中大放异彩？为什么数学家要用 e 作为自然对数的底？以 e 为底的对数为什么叫自然对数？e 究竟是一个什么样的数？……

本书不但把 e 融入整个数学以至科学之中，而且把人文精神融入其中，对提高人的综合素质，特别是培养人的健康心理大有裨益。

本书适合具有中等及以上文化的青少年或成人阅读，也是研究 e 的重要参考书。

您想看凡尔纳小说中的“冒牌大力士”吗？您想独自在拔河比赛中让一群人俯首称臣吗？那就“跟我走吧”，现在就出发，穿过快乐的河流，就会到达 e 的“老家”！

图书在版编目(CIP)数据

e 的密码 / 陈仁政著. —北京：科学出版社，2011

(解码三大数学常数)

ISBN 978-7-03-030885-6

Ⅰ. e… Ⅱ. 陈… Ⅲ. 数学－常数－普及读物 Ⅳ. 01-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 073468 号

责任编辑：李 敏 赵 鹏 / 责任校对：鲁 素

责任印制：钱玉芬 / 封面设计：黄华斌

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 5 月第 一 版 开本：B5 (720×1000)

2011 年 5 月第一次印刷 印张：17 1/4

印数：1—6 000 字数：333 000

定价：38.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

丛书序

在美国加州谷歌公司总部的四座办公大楼中，有三座以数学符号命名："Pi"（圆周率 π）、"e"（自然对数的底）和"phi"（黄金分割数 ϕ）。可见这"三大数学常数"在这个大公司中的至尊地位。无独有偶，以色列数学史家伊莱·马奥尔在《无穷之旅——关于无穷大的文化史》一书中，也称它们为"三个最著名的无理数"。

然而，国内除了出版为数不多的关于 π，e 的小册子和个别关于 ϕ 小册子之外，至今还没有以较大篇幅介绍这"数学三圣"的系统丛书。从国外译介到国内的作品也是如此。"苔花如米小，也学牡丹开。"《解码三大数学常数》丛书（以下简称"丛书"）的作者经过断续 29 年的努力，抛出了这套丛书之"砖"，以期引出各界的"玉"。

本丛书除了"数学三圣"和涉及的数学内容之外，还把包括物理、化学、天文、地理、生物、医学、文学、美术、音乐、环保等众多领域的内容有机地结合在数学之中。这不但显示出数学的广泛威力，而且展现出各学科之间的水乳交融；在这个意义上说，"数学三圣"是承载整个科学的"诺亚方舟"。"数学，无处不在。"德国 2008 年科普活动以数学为主题的这个口号，为这种威力和交融画龙点睛。而德国联邦教研部长莎万在这个活动的开幕式上说，应该让公众，特别是让青少年认识数学的丰富多彩和重要意义——数学是所有自然科学的共同语言。

本丛书由浅入深、化难为易，力图把"可怕"变为"可爱"，以消除"数学是可怕的专业"的误解。

本丛书将人文精神融入"好玩的数学"以至整个科学之中。这样，不但精彩纷呈的内容和妙趣横生的情节引人入胜，让读者充分感受数学之真、之美、之乐、之用，而且对提升人的综合素质——特别是锤炼健康心理大有裨益。

本丛书有一千多位各领域的科学家、文学家、艺术家和政治家等“大驾光临”，他们书写的人类可歌可泣的科学史和文化史，为我们留下了形形色色的宝贵财富。现在，先贤们的身影已经越来越模糊，但也越来越清晰——我们正在享受着这些财富带来的无穷福祉。当然，我们在“理所当然”和“习以为常”地享受这些福祉的同时，千万不能忘记这些财富本身的价值和意义：科学精神、科学思想、科学方法……

“天才和我们仅仅相距一步。同时代者往往不理解这一步就是千里，后人又盲目相信这千里就是一步。”对于这些“创造历史”的天才，日本“鬼才”小说家芥川龙之介在随想集《侏儒的话》中说，“同时代为此而扼杀了天才，后代又为此而在天才面前焚香。”我们相信，读者看了这套丛书之后，对这段关于天才与“我们”的精辟名言，能有更深刻的体会，从而“在你的心上，自由地飞翔”，幸福地走过人生的“水千条山万座”而有所作为。正是：“今夜，我在看星光灿烂。明晨，我要画朝霞满天。”

陈仁政

2011年4月30日

目　　录

从书序
第 1 章　激情相约爱丁堡——对数使科学家延寿 …… 1
1.1　从第一级到第三级——数学运算“步步高” …… 1
1.2　“在离天很近的地方”——斯蒂费尔的遗憾 …… 4
1.3　教授与贵族——激情相约爱丁堡 …… 7
1.3.1　“巨人肩上”的对数 …… 7
1.3.2　激情相约爱丁堡 …… 8
1.4　汗水、智慧加机遇——纳皮尔发明对数 …… 10
1.4.1　纳皮尔是如何发明对数的 …… 10
1.4.2　对数的发展 …… 12
1.4.3　“时代造就英雄，英雄创造历史” …… 14
1.5　科学更有力量——天才的遗憾 …… 15
1.5.1　富翁依然钟情科学 …… 15
1.5.2　多才多艺的天才 …… 16
1.5.3　天才的遗憾 …… 18
1.6　承伟业自有来人——从布里格斯到弗拉格 …… 19
1.6.1　布里格斯握紧接力棒 …… 19
1.6.2　郁金香花开的地方 …… 22
1.7　伟大发明生“龙胎”——红极一时的“尺子” …… 23
1.7.1　揭秘计算尺 …… 23
1.7.2　从冈特到武拉斯顿 …… 25
1.7.3　无可奈何花落去 …… 27
1.8　伟大发明生“凤胎”——红极一时的“表格” …… 28
1.8.1　常用对数表最受青睐 …… 28
1.8.2　编制对数表的“流水账” …… 29
1.8.3　“落红不是无情物” …… 33

1.9 并非“风景这边独好”——“杀鸡杀喉”比尔吉 …… 33
1.10 天文学家延寿一倍——拉普拉斯这样说 …… 36
1.11 “迟到的爱”——对数在中国 …… 38
第2章 无处不在的对数——“天地英雄”大显神通 …… 42
2.1 “吹拉弹唱”也要讲数学——音乐中的对数 …… 42
2.2 从希帕恰斯到普森——星星亮度的“对数尺” …… 44
2.2.1 “目视星等”的“对数尺” …… 44
2.2.2 “绝对星等”和“照相星等” …… 47
2.3 借得“贝尔”寻规律——噪声的“对数尺” …… 48
2.3.1 常用对数度量噪声 …… 48
2.3.2 响度感觉的实验研究 …… 49
2.4 里克特的“尺子”——地震中的对数 …… 51
2.4.1 里氏震级与常用对数 …… 51
2.4.2 地震的烈度 …… 53
2.4.3 里氏震级的改进 …… 54
2.5 科学家笔下的曲线——实用的对数图 …… 55
第3章 奇趣就在对数中——从2>3到3个2 …… 57
3.1 2>3——欧拉时代的人“自摆乌龙” …… 57
3.2 对数的奇迹——你也能当速算大师 …… 58
3.2.1 神奇的速算大师 …… 58
3.2.2 棋盘上的麦粒和梵塔中的金盘 …… 61
3.3 狄拉克也会疏忽——3个2的奇趣 …… 63
3.4 对数表引出的祸殃——海难、蜜蜂和数学家 …… 65
第4章 对数的华丽蜕变——“常用”和“自然” …… 66
4.1 以2为底的对数——神通广大应用广泛 …… 66
4.1.1 以2为底的对数与2进制 …… 66
4.1.2 从哈里奥特到莱布尼茨 …… 67
4.2 常用对数——“爱你没商量” …… 69
4.2.1 为什么选择常用对数 …… 69
4.2.2 对数的符号 …… 71
4.2.3 酸碱度与常用对数 …… 73
4.3 自然对数——不只是大自然的选择 …… 74

4.3.1　为什么要用 e 作对数的底 …… 74
4.3.2　以 e 为底的对数为什么叫自然对数 …… 76
4.4　e 的又一用武之地——编造对数表 …… 78
4.4.1　编造对数表的“原始”阶段 …… 78
4.4.2　新方法让编造对数表进入“高速公路” …… 79
4.4.3　如何编造对数表 …… 82
第 5 章　“王宫”中的漫游——数学殿堂中的 e …… 85
5.1　关系你的“钱包”——无处不在复利律 …… 85
5.1.1　大自然的复利律 …… 85
5.1.2　我们不会自成“大款” …… 88
5.1.3　富兰克林的捐款和拿破仑的带刺玫瑰 …… 93
5.2　数学珍宝——π 和 e 的“一家亲” …… 96
5.3　弟弟帮哥哥——e 为 π 开路立功 …… 97
5.4　π，e“连横合纵”之后——两种“桃园三结义” …… 99
5.4.1　π，e，i 的“桃园三结义” …… 99
5.4.2　π，e，ϕ 的“桃园三结义” …… 102
5.5　数学与物理——对数积分和指数积分中的 e …… 103
5.6　悄悄走近“数学王子”——素数研究中的 e …… 103
5.6.1　越来越先进的“筛子” …… 104
5.6.2　素数定理 …… 104
5.6.3　有趣的素数分布 …… 109
5.7　从麦齐里阿克到陈景润——华林－哥德巴赫猜想中的 e …… 113
5.7.1　不好解答的“1＋1” …… 113
5.7.2　华林的难题 …… 115
5.7.3　“纯数学问题”有用吗 …… 117
5.8　吉利斯猜想——梅森素数个数中的 e …… 118
5.9　半个世纪的积分探索——欧拉积分与 e …… 122
5.10　蠕虫能“如愿以偿”吗——欧拉常数中的 e …… 123
5.10.1　不老蠕虫爬长绳 …… 123
5.10.2　欧拉常数藏玄机 …… 125
5.11　自然数“切蛋糕”——“整数分拆”也要靠 e …… 128
5.11.1　自然数的“整数分拆” …… 128
5.11.2　从欧拉到波斯特尼科夫 …… 129

5.12 对数正态分布——概率论中的e …… 132
5.12.1 从钢丝长度到智商指数 …… 132
5.12.2 概率论中的e …… 134
5.12.3 买彩票有多少机会中奖 …… 136
5.13 “双曲”与“三角”——这里也有e …… 137
5.14 英国海疆长几何——分形公式中的e …… 141
5.15 积分方程的滥觞——拉普拉斯变换和e“结盟” …… 143
5.16 级数何名傅里叶——三角级数中“暗藏”的e …… 144
5.17 从达·芬奇到伯努利——“悬在空中”的e …… 147
5.17.1 来之不易的悬链线方程 …… 147
5.17.2 跨越300年的美丽 …… 149
5.18 聚首“中心”的“难题”——4只甲虫如何爬行 …… 151
5.19 数学也要“轻装上阵”——e与微积分 …… 153
5.20 众“神”朝拜“美猴王”——离不开e的数学 …… 155
第6章 “大众情人”——走出“王宫”的e …… 158
6.1 物理学的宠儿 …… 158
6.1.1 你也能当“大力士”——缆绳靠e系船舟 …… 158
6.1.2 “滴答”声中的物理公式——摆锤振动中的e …… 164
6.1.3 火箭飞天的奥秘——地球人借e上“青云” …… 165
6.1.4 匀速落地的降落伞——落体速度与e …… 169
6.1.5 牛顿小试牛刀做“小菜”——冷却定律中的e …… 171
6.1.6 从麦克斯韦到玻耳兹曼——刻在墓碑上的e …… 174
6.1.7 煮不熟的米饭——气压随高度变化公式中的e …… 177
6.1.8 植物学“联姻”物理学——布朗运动中的e …… 179
6.1.9 阿氏常数这样测——“微粒公式”借e建功 …… 180
6.1.10 电、光世界的宠儿——e和你时时相伴 …… 183
6.1.11 不吃草的“马儿”——“衰变时钟”用e揭秘 …… 185
6.2 化学中的反应速度和焓变 …… 191
6.2.1 反应速度这样定——阿仑尼乌斯公式中的e …… 191
6.2.2 “伤寒病”这样治疗——焓变公式中的e …… 192
6.3 生物学、医学中的奥秘 …… 193
6.3.1 生存竞争——弱肉强食方程中的e …… 193
6.3.2 从人类到细菌——生物增殖中的e …… 196

6.3.3　科学预测鼠疫病人数——疾病研究中的 e …… 202
6.3.4　生物体上的玄机——宇宙万物的“生长螺线” …… 204
6.4　生活与 e 相伴 …… 205
6.5　科学和 e——难舍难分的“情人” …… 208
第 7 章　掀起你的盖头来——e 的“质”“量”大白天下 …… 212
7.1　数系发展——从自然数到超越数 …… 212
7.1.1　从自然数到无理数 …… 212
7.1.2　从无理数到超越数 …… 213
7.2　e 的性质——从无理数到非二次代数数 …… 214
7.2.1　e 是无理数 …… 214
7.2.2　e 是二次代数数 …… 216
7.3　e 的性质——从无理数到超越数 …… 216
7.4　e 的定义和符号——是“贵人”也是“打工仔” …… 217
7.4.1　e 的定义 …… 217
7.4.2　e 的符号 …… 224
7.5　计算 e 值——从欧拉到亚历山大·伊 …… 226
第 8 章　妙趣横生的 e——数学界的快乐天使 …… 232
8.1　数学家的“魔术”——e 的六类表达式 …… 232
8.2　“乘积最大”和“开方最大”——这里 e 也显神通 …… 235
8.2.1　何时“乘积最大” …… 235
8.2.2　何时“开方最大” …… 237
8.3　ln（－1）＝?——伯努利和莱布尼茨的争论 …… 239
8.4　“不考虑它们的收敛”——交错级数的悖论 …… 240
8.5　“千条江河归大海”——$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\cdots\right)^{x}=e$ …… 241
8.6　大显神通靠“自然”——巧用欧拉公式解题 …… 243
8.7　“极限点”与数学竞赛——e 在几何中现身 …… 244
8.8　不平等的拔河赛——你也能以少胜多 …… 245
8.9　从 ω 与 e 的关系说起——万数回归“大自然” …… 246
第 9 章　何当痛饮黄龙府——等你揭开 e 的谜团 …… 249
9.1　移植布劳威尔的难题——e 是正规数吗 …… 249
9.2　“简单”的难题——π，e“家族”“无理”“超越”吗 …… 250

9.3 “亲兄弟”为何分离——黎曼函数ζ中为何有π无e …… 253
9.4 神秘的“近似”——e为何屡屡现身 …… 256
9.5 弟弟为何不像哥哥——e有“$\sqrt{\ }$”表达式吗 …… 256
9.6 寻找“准确”——π，e间有简洁的实数关系吗 …… 257
9.7 “怪”还是“不怪”——对数先于指数 …… 257
9.7.1 “不合逻辑”的发明 …… 257
9.7.2 “逻辑怪胎”的启示 …… 259
参考文献 …… 261
后记 …… 264

第 1 章　激情相约爱丁堡
——对数使科学家延寿

在能够对科学作出贡献的所有因素中，观念的冲破是最伟大的。

——英国物理学家约瑟夫·约翰·汤姆森

“混沌初分盘古先，太极两仪四象悬……”

可能，人类茹毛饮血的年代就有了数学，那我们就从数学运算谈起。

1.1　从第一级到第三级——数学运算“步步高”

山洞口坐着一个失明的老人，他的眼睛是被俄底修斯刺瞎的。

这个不幸的老人，就是独眼巨人波吕斐摩斯。他每天只有一件事：照料他的羊群。

早晨，母羊外出吃草，每出去一只，他就从石子堆中捡起一颗石子。

傍晚，母羊归来，他就扔下一颗石子。当他把早晨捡起的石子全部扔光的时候，他就知道全部母羊已经返洞归家。显然，他用的是“一一对应”的计数方法。

这是约公元前八九世纪古希腊著名盲诗人荷马，写在《荷马史诗》中的故事。俄底修斯和波吕斐摩斯都是希腊神话中的人物。

但是，用一一对应计数法，既不能解决有多少只羊的问题，也不能解决一群羊增加或减少几只之后，有多少只羊的问题。于是自然数计数的方法应运而生——它解决了前一个问题。数的加法和减法也发明出来了——它解决了后一个问题。

当然，我们知道，加法和减法不但有数的加法和减法，而且包括集合的加法和减法。

人类最古老的文字中就有用符号表示的第一级运算——加法和减法。例如，古埃及艾哈麦斯纸草书中就有了加法和减法的符号。艾哈麦斯是大约公元前20世纪或公元前17～前16世纪的埃及祭司和数学家，他的加号“ᐱ”是向右走的两只腿，他的减号“ᐱ”是向左走的两只腿。后来，经过各国许多数学家的努力，才有今天的加号“+”和减号“–”。

今天的加号“+”和减号“–”，最早是15世纪的最后20年由德国人首先使用的。在德国德累斯顿城图书馆，保存着1486年的手稿卷C·80，其中就有这两个符号。而最早（1489年）在印刷的书（在莱比锡出版）中使用它们的，则是出生在捷克的德国数学家维德曼。

1690年，大名鼎鼎的德国数学家莱布尼茨还发明了一个“概念加号”——“⊕”。它和“概念减号”——“⊖”或“–”表示逻辑概念演算和逆运算。在内涵方面，$A \oplus B$ 表示既 A 且 B 的那个性质；在外延方面，$A \oplus B$ 表示属于 A 或属于 B 的那个类。

但是，在遇到“连加”或“连减”的时候，加法或减法的效率就低了。于是第二级运算——乘法和除法，以及乘号和除号又应运而生了。

在西方，“×”被称为和数学毫无关系的“圣安德鲁斜十字”。安德鲁是耶稣的12门徒之一，由于他被钉在斜十字架上处死，所以斜十字被称为圣安德鲁斜十字。1631年，英国数学家奥特雷德，首先在他的《数学之钥》一书中使用了现代意义上的“×”。

用小圆点“·”表示乘号是为了避免乘号“×”和字母“X”混淆，它的发明者是莱布尼茨。他在1698年7月29日给瑞士数学家雅格

布·伯努利（1654—1705）即詹姆斯·伯努利，或他的弟弟约翰·伯努利（1667—1748）的一封信中，首先使用“·”表示乘号。

雅格布·伯努利

不过，有时“·”和“×”的含义是不同的，例如，在向量代数中，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 表示 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的“数量积”，即“点积”，也就是“内积”；而$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 表示 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的“矢量积”，即“叉积”，也就是“外积”。

现在，在中国用“×”或“·”都符合规定，通常在字母前或括号前可以略去。而欧洲大陆派（如德国、法国、俄罗斯）规定用“·”表示乘号，其他国家则用“×”表示乘号。

今天用的除号“÷”，被称为“雷恩记号”。它是瑞士数学家雷恩在 1659 年出版的一本代数书中，首先引用的。随着 1668 年这本书被译为英文，这个记号逐渐通用。

莱布尼茨是另一种除号——“:”的发明者。他是在 1666 年的论文《组合的艺术》中，用“:”作除号的，至今仍在使用。莱布尼茨不但是微积分的发明者之一，也是一位数学符号大师——我们知道，他发明的几乎所有的微积分符号，我们至今还在使用。

莱布尼茨

第二级运算已经进步了，但是人们发现在“连乘”或“连除”的时候，还需要第三级运算。这就是乘方、开方和对数。

我们知道，乘方有开方和对数两种逆运算，而加法和乘法分别只有减法和除法各一种逆运算，这是第三级运算和第一、二级运算的不同之处。

现在用的乘方中指数符号的滥觞，是苏格兰数学家詹姆斯·休姆。他于 1636 年居住在巴黎的时候，用小的罗马数字放在字母的右上角表示指数。1637 年，法国数学家笛卡儿完成了现代乘方中

的指数符号——在字母或数字的右上角用小的阿拉伯数字表示指数。

但是，笛卡儿的指数只是正整数，而法国数学家、物理学家和经济学家奥雷斯姆，荷兰数学家西蒙·斯蒂文、英国数学家沃利斯等，则先后使用或提到过分数指数和负数指数。法国数学家丘凯则最早使用了负数指数和零指数，符号与现代的比较接近。而现行的分数指数符号和负数指数符号，则出自大名鼎鼎的牛顿之手。1676 年 6 月 13 日，他给英国皇家学会秘书奥尔登伯格转给莱布尼茨的信中，创设了这种指数。

虚数指数的发明者，是一位最先使用虚数的意大利业余数学家法格纳诺。他在 1719 年将 π 定义为 $2i\ln\frac{1-i}{1+i}$的时候，就用了虚数指数。

1679 年，莱布尼茨在一封写给荷兰数学家、物理学家惠更斯的信里，在一个方程中引入了变指数。

在历经无数次变革之后，现代方根符号“$\sqrt{\quad}$”由法国数学家卢贝尔在 1732 年首先使用 $\sqrt[3]{25}$之后，才逐渐流行，并用于各次方根。

随着乘方运算的出现，指数函数也出现了。数学家们用“exp”或“Exp”表示指数函数。例如，有时用“exp$x$”表示“e^x”这个指数函数。

可以想象，乘方的一种逆运算——开方的诞生，是“顺理成章”的。可是，乘方的另一种逆运算——对数的出生，就有些“难产”了。

1.2 “在离天很近的地方”——斯蒂费尔的遗憾

“1533 年 10 月 3 日是世界末日！”16 世纪初，一个人这样预言。

听了他的宣传，他的追随者毁掉或消耗掉所有的财物，惶惶不安地等待着这一天的来临。但是，“世界末日”并没有如期而至。由于这一蛊惑人心的言论和传播被视为异端邪说的新教，他被当局投入监狱。

这个趣闻轶事的主角——“他”，就是德国数学家斯蒂费尔。

斯蒂费尔是德国厄斯林根地区的新教牧师，后来又在著名的哥尼斯

堡大学里担任神学和数学的讲师。

斯蒂费尔

作为数学讲师，斯蒂费尔当然懂得一一对应的方法，于是在 1544 年，他就写了一本名叫《整数的算术》的书。在这本书中，他就几乎用这种方法建造了一座数学丰碑。

斯蒂费尔在书中欣喜地写道："关于整数的这些奇妙性质，可以写成整本整本的书……"那么，斯蒂费尔发现了整数的什么"奇妙性质"，使他这样惊喜万分呢？我们还是先来看看他在书中的表 1-1 里的两个数列吧。

表 1-1

…	1/2	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1 024	2 048	…
…	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…

容易看出，表 1-1 的上一列，是一个通项公式为 2^n（n 为整数）的等比数列——他称为"原数"。下一列是一个整数构成的等差数列——他称为与原数对应的"代表人物"。这里说的代表人物，德文是 Exponent 或 exponent，也可翻译成"代表者"，而我们把它叫做"代言人"。

斯蒂费尔发现，如果要计算 16×128 的话，可以用下面的一种巧妙方法。

先找到 16 的代言人 4，再找到 128 的代言人 7，然后把 4 和 7 相加，就得到了 16×128 的新代言人 11，最后找到 11 对应的新数 2 048。这个 2 048，就是 16×128 的答案。

如果把斯蒂费尔的方法用今天的数学语言来表示，就是这样一个对应关系：

$$\begin{array}{ccccc} m & \times & n & = & mn \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \log_2 m & + & \log_2 n & = & \log_2(m+n) \end{array}$$

真是美妙极了，计算乘法变成了计算比乘法更简单的加法！对此，

当然我们很容易理解，因为 $x^a \times x^b = x^{a+b}$。所以，表 1-1 实际上是底数为 2 的、最原始的对数表。

美妙的感觉还没有完——用它们还可以做除法哩！

举例来说吧，算 2 048 ÷ 128 的时候，只要用它们各自的代言人 11 和 7 相减，就得到新代言人 4，再由 4 找到对应的新原数 16 就是答案。当然，我们知道，这是因为 $x^a/x^b = x^{a-b}$。

一句话说完，利用这两个数列，就可以把较复杂的乘除法变成加减法。大致同时，法国数学家舒开也意识到这一点。

对于我们来说，斯蒂费尔的这个结论已经没有什么神奇之处，因为一眼就能看出，斯蒂费尔的代言人，就是原数以 2 为底的对数。例如，$\log_2 64 = 6$ 等。

我们还可以看出，斯蒂费尔实际上已经掌握了对数运算法则 $\log_2(MN) = \log_2 M + \log_2 N$ 和 $\log_2(M/N) = \log_2 M - \log_2 N$。

遗憾的是，在斯蒂费尔的时代，还没有分数指数的概念；那么，不是数列中的数要进行运算（如 17 × 127 和 2 049 ÷ 257）又怎么办呢——它们没有“代言人”呀！

这些问题，把斯蒂费尔弄得焦头烂额，不知“云横秦岭家何在”。他只好说：“这个问题太狭窄了，所以不值得研究。”从此就“雪拥蓝关马不前”——把它搁到一边。

当然，斯蒂费尔也不是全然无功，他用的代言人这个词，后来被数学界正式采用，就是现在我们说的“指数（函数）”Exp 或 exp。而且，他还把这种对应关系推广到负指数、分指数的情形。

阿基米德

“在离天很近的地方，总有一双眼睛在守望”，这是歌曲《神奇的九寨》中的一句。可惜的是，斯蒂费尔在离天那么近的地方，却没能望见那神奇的“天堂”，已经走到发明天堂边缘上的脚又缩了回去，而把机会留给比他更

具慧眼的来者——约翰·纳皮尔。

不过，斯蒂费尔也不必懊悔。因为在他之前近两千年，比他更光辉夺目的巨星、古希腊数学家阿基米德，虽然也注意到类似关系的表 1-2 中的两个数列。可是，他也不知道，在高远的云端，还有对数那如花似玉般的容颜！

表 1-2

1	10	10^2	10^3	10^4	…
0	1	2	3	4	…

不过，阿基米德，特别是斯蒂费尔的前驱性工作，成了我们下面要说的纳皮尔发明对数的“巨人肩膀”。

1.3　教授与贵族——激情相约爱丁堡

1.3.1　“巨人肩上”的对数

弹指一挥间，半个世纪过去了。阿基米德、斯蒂费尔的前驱性工作，在大约 1594 年开始绽花结果。经过多年的潜心研究，苏格兰数学家、物理学家和天文学家约翰·纳皮尔站在这些的巨人的“肩膀”上，发明了对数，也成了“巨人”。

在大约 20 年以后的 1614 年 6 月，居住在豪华庄园梅尔契斯顿堡的贵族约翰·纳皮尔，在苏格兰首府爱丁堡出版了大作《奇妙的对数定律说明书》。

这本 200 余页的书，公布了纳皮尔发明的对数的一些详情，和他编制的间隔为 1′的 7 位（一说 8 位）正弦对数表——世界上第一个三角函数的对数表，以及对数的性质、对数表的说明、使用规则和实例。

MIRIFICI
Logarithmorum
Canonis descriptio,
Ejusque usus, in utraque
Trigonometria; ut etiam in
Authore ac Inventore,
IOANNE NEPERO,
EDINBURGI,
Ex officina ANDREÆ HART

《奇妙的对数定律说明书》封面

MIRIFICI
LOGARITHMO
RVM CANONIS
DESCRIPTIO,
EDINBURGI,
Ex officina ANDREÆ HART,
Anno 1619.

《奇妙的对数表的构造》封面

纳皮尔发明对数的消息很快就传开了，震惊了当时的伦敦数学界。这本书的第一个英译本由 S. 赖特（Wright）在 1616 年出版——译者是他的已经谢世的父亲爱德华·赖特（E. Wright）。

此外，在 1619 年，纳皮尔的遗作《奇妙的对数表的构造》出版。书中有他在生前承诺的、介绍他构想对数的方法和编造对数表的方法。这本书是纳皮尔的第二个儿子罗伯特·纳皮尔（Robert Napier）整理出版的。

1.3.2 激情相约爱丁堡

1. 教授初访贵族

纳皮尔大约在 1614 年发明对数的消息，很快就传遍英伦三岛的数学界。

一位伦敦的数学教授看到纳皮尔这一成果后，立即就看出了它的重大价值。他写道："纳皮尔用他新颖而巧妙的对数使我能够用脑和手来工作。我从未读过一本能够使我这样惊异和喜爱的书了。我希望今年夏天就能见到他。因为我从未读过一本能令我更加喜爱，更加惊异的书了。"真是难得的"慧眼识英雄"，慧眼识"好货"。

经过一些通信联系之后，第二年即 1615 年夏天，这位伦敦的数学

教授就不辞劳苦，从伦敦出发乘坐马车，初次专程到爱丁堡去会见这位他无比崇敬的、天才的苏格兰人。

这不是当今 4 小时的火车车程，也没有汽车和飞机，而是必须用“马蹄声碎”去踏遍“水千条山万座”。

在 4 天漫长而又崎岖的旅途上，数学教授在日记中写道，这个苏格兰人的前额一定很高，因为他头脑发达，否则是难以做出如此惊人的发明的。

真是好事多磨。由于意外的事故，教授在路上延误了时间。

焦急等待的苏格兰贵族终于失望了，他向一位朋友抱怨说：“咳！亨利教授不会来了吧？”可就在这时，有人敲门了，教授突然出现在他的面前。

相知无远近

“相知无远近”，这对“海内知己”相拥相抱，在沉默中相互凝视了达一刻钟之久。后来，教授说道：“阁下，我经历了长途跋涉专程来看望你，就是想要知道究竟是怎样富有聪明才智的头脑，才使得你首先想出对于天文学的这一极好的帮助。阁下，你发现了它，现在看来是很容易的，但是我很奇怪，在此之前为什么没有人能够发现它呢？”

“酒逢知己千杯少。”此时，这两位数学家已经“不知天上宫阙，今夕是何年”了——作为贵宾，这位教授在贵族的梅尔契斯顿城堡里滞留了一个月之久。

这位专程去访问纳皮尔的数学家，就是伦敦格雷沙姆学院的几何学教授亨利·布里格斯。这里提到的格雷沙姆，是英国皇家交易所的创始人，诺福克地区富商的世家。1537 年，他被选为伦敦市长，曾出资建立格雷沙姆学院。

这里有必要交代一下，怎么一会儿说爱丁堡，一会儿又说梅尔契斯顿堡。原来，梅尔契斯顿堡是苏格兰首府爱丁堡附近的一个小城堡，又译马其顿堡、曼彻斯特或梅奇斯顿堡。说大方向爱丁堡是因为它知名，

说梅尔契斯顿堡是因为它更准确具体。

2. 教授和贵族的遗憾

布里格斯在1615年夏天初访纳皮尔之后的第二年，布里格斯再次踏上去爱丁堡的艰难征途。

没有人会怀疑两个执著的数学家在“第二次握手”时的热忱和“对数话题”，也没有人会怀疑他们将“来年再相邀”。

遗憾的是，两人约定在1617年夏天布里格斯第三次移樽就教于纳皮尔之前的春末4月4日，纳皮尔就辞世了——永远不可弥补地“失约”了。纳皮尔死后，被埋葬在圣卡斯伯特教堂。

在“芳菲尽”的“人间四月”，刚刚步入老年的纳皮尔辞世，留给布里格斯的，唯有“始盛开”的“山寺桃花”……

1.4 汗水、智慧加机遇——纳皮尔发明对数

1.4.1 纳皮尔是如何发明对数的

1. 三角函数“变乘除为加减”的启发

那么，纳皮尔“究竟是怎样富有聪明才智”，才在“没有人能够发现它”的时候，发现“那人却在灯火阑珊处”的呢？

我们知道，对数作为一种计算方法的作用在于，把较复杂的乘除运算化为较简单的加减运算。这种化简的原始思想，在以下4个三角函数公式中已经初露端倪：

$$2\sin A\ \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B),$$

$$2\sin A\ \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B),$$

$$2\cos A\ \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B),$$

$$2\cos A\ \sin B = \sin(A+B) - \cos(A-B)。$$

这4个公式，有时被称为沃纳公式——德国数学家、天文学家沃纳曾用它们简化天文计算。沃纳也是欧洲最早使用公式$2\sin A\ \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$的人之一。他在1514年完成的、现已

失传的手稿《论大圆弧构成的三角形》，对三角学的发展具有重要意义。

这 4 个公式在纳皮尔所处的时代已广为人知。纳皮尔发明对数的思路，很可能就是从这些公式出发的，否则很难解释为什么最初他仅用于研究角的正弦的对数。

更直接的“旁证”是，据说，法国数学家韦达和德国数学家克拉维乌斯，发表了利用三角函数表简化计算的方法。而纳皮尔则从中受到启发，从而发现了对数。

纳皮尔

那么，三角函数表是怎样具体使计算简化的呢？我们用一个实例来加以说明。

笔算 0.173 6 × 0.990 3 是比较麻烦的，但是用下面的方法就简便多了。先用三角函数表查得 0.173 6 = sin10°，0.990 3 = cos8°，再由

$$2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$$

就知道

$$\begin{aligned}0.173\,6 \times 0.990\,3 &= \sin 10^\circ \cos 8^\circ \\ &\approx \frac{1}{2}[\sin(10^\circ + 8^\circ) + \sin(10^\circ - 8^\circ)] \\ &\approx \frac{1}{2}(\sin 18^\circ + \sin 2^\circ) \approx \frac{1}{2}(0.309\,0 + 0.034\,9) \\ &\approx 0.171\,95。\end{aligned}$$

当然，我们知道，这个近似计算的结果 0.171 95 中，只有 3 位有效数字才可靠，因此答案是 0.172。

由此可见，我们用三角函数表和三角公式 $2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$，通过非常简单的计算，就得到了 $0.173\,6 \times 0.990\,3 \approx 0.172$。

2. 纳皮尔“站在巨人肩上”

纳皮尔大约从 40 岁（1590 年）之前开始潜心研究对数，他最终给出对数的如下定义。

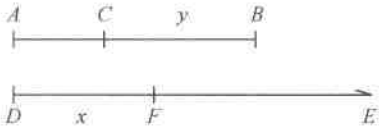


图 1-1

如图 1-1 所示的一条线段 AB 和一条射线 DE，设点 C 和点 F 以同样的初始速度分别从 A 和 D 出发，沿线段 AB 和射线 DE 运动。假设点 C 运动的速度在数值上总是等于 CB，而点 F 运动的速度始终不变。

显然，$CB = y$ 是一个无穷递缩等比数列，而 $DF = x$ 则是一个无穷递增等差数列。这时，纳皮尔把 y 看成是斯蒂费尔所说的“原数”，把 x 看成是“原数” y 的“代表人物”。

不过，纳皮尔没有这样叫，而是把 x 定义为 y 的对数。用数学式子表示是 $x = \text{Nap log } y$。这里“Nap”是指“纳皮尔”，“Nap log y”或“Nap · log y”是“纳皮尔对数”。

纳皮尔首创的“对数”（logarithm）这个词——他用没有简化的全文，由两个希腊文的词 λόros（拉丁文 logos，意思是“表示思想的文字或符号”，在这里表示“比率”或“计算”），和 áριθμός（意思是“数”）组合而成。而这里的含义，则是“比的数”即“比数”（ratio number），意思是指数与数之间总保持相同的比。他最初把“比数”称为“人造数”（artificial number），后来才用的“对数”。在 1852 年第 4 版的《平面几何》一书中，德国数学家科珀却用“取对数”这个动宾结构的词。

1.4.2 对数的发展

琼斯

不过，虽然纳皮尔发明了对数，但却没有给出对数的定义。直到 1742 年，英国数学家、作家琼斯才给出实数对数的定义：已知 a 是不等于 1 的正数，如果 a 的 b 次幂等于 N，那么 b 叫做以 a 为底的 N 的对数。这个定义写成数学式子就是 $b = \log_a N$，其中 $a > 0$、$a \neq 1$，$N >$

0。这一年，琼斯在给他的同胞伽迪纳的《对数表》写的序言中，第一次使用了这个定义。

复数（或虚数）的对数的定义是，已知复数 $z\neq0$，对于正数 e，有无限多个复数 W（它们的模相等，辐角相差 2π 的整数倍），如果 $e^W=z$ 成立，那么 W 叫做以 e 为底的复数 z 的对数，记作 $W=\ln z$。这个定义是瑞士数学家雅格布·伯努利给出的。

1702 年，雅格布·伯努利在科学院的《纪要》上，发展了 $\frac{a^2}{a^2-x^2}=\frac{a}{2}\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)$，引入了部分分式的方法。在求积分 $\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$ 的时候，因为 ax^2+bx+c 的一次因式可能由复数构成，求部分分式就成了 $\int\frac{dx}{ex+f}$（其中 f 为复数），他仍然用对数的法则来积分，这样就出现了复数的对数。

在上面的复数（或虚数）的对数定义中，隐含了“每个复数有无限多个对数值”这一命题。这个命题是瑞士数学家欧拉最早提出来的。欧拉关于对数的另一贡献是，他指出了“对数源于指数”之后，对数才大大方方走进学校的数学课堂。

邮票上的欧拉

纳皮尔对数（函数）既不是常用对数（函数），也不是自然对数（函数）。不过，纳皮尔对数和自然对数可以用 $\text{Nap}\log y=10^7\ln(10^7/y)$ 来换算；此外，据说在 1618 年纳皮尔的一本对数遗作附录的一张表中，第一次实际提到 e（但没有明确记录）。所以有少数人把自然对数的底 e 称为纳皮尔常数，以纪念他发明了对数。一些人说纳皮尔对数是以 e 为底的自然对数，这是不正确的。可以看出，纳皮尔对数随着真数的增加而减小，这和自然对数随着真数的增加而增加的情况，正好相反。

事实上，纳皮尔对数的底是1/e。这一点，只要我们把 Nap log $y = 10^7\ln(10^7/y)$ 改写成 Nap log $y = 10^7\log_{1/e}(y/10^7)$ 就可以看到。

这里，读者可能会问，在纳皮尔对数中，这个“10^7”是哪里来的？它的底为什么是1/e？

我们用微积分很容易说明，在图1-1中，纳皮尔假设 $AB = 10^7$，那么 $AC = 10^7 - y$，因而 C 点的速度就是 $-\frac{dy}{dt} = y$，即 $\frac{dy}{y} = -dt$，积分后就得到 $\ln y = -t + C$。把初始条件 $t = 0$ 和 $y = 10^7$ 代入这个式子，就得到积分常数 $C = \ln 10^7$，因此 $\ln y = -t + \ln 10^7$，就是 $t = \ln 10^7 - \ln y$。

现在，点 F 的速度是 $\frac{dy}{dt} = 10^7$，因此 $x = 10^7 t$，所以

$$\begin{aligned}\text{Nap log } y = x &= 10^7 t = 10^7(\ln 10^7 - \ln y)\\ &= 10^7\ln(10^7/y) = 10^7\log_{1/e}(y/10^7)。\end{aligned}$$

从这个过程可以看出，纳皮尔发明对数的时候，已经涉及样子像 $y = \frac{d(a-y)}{dt}$ 的这类微分方程了。

当然，当年纳皮尔并没有“底”这个概念，他的目的是为了制表。

另一个问题是，纳皮尔为什么要设 $AB = 10^7$ 呢？这显然是为了避免小数运算。

1.4.3 “时代造就英雄，英雄创造历史”

纳皮尔为什么要发明对数呢？“我要尽我的力量，来免除计算中的困难和繁重工作，许多人由于讨厌它们，吓得都不敢学数学了。”纳皮尔曾经这样谈到它发明对数的动机。

作为一位天文爱好者，纳皮尔的“自我表白”是完全可信的，发明对数也绝非偶然的心血来潮。首先，那时天文学家们十分热衷于研究星系，就要处理观测星象时所得的大量数据——当时一般人很少涉足的“天文数字”。其次，航海家已经要频繁计算船舶的位置和航线。还有，商人要计算“驴子打滚”式的复利，等等。这类大量的繁复计算实在

令这些人头痛不已。

随之而来的是两个现象。一个现象是“埋头勤拉车”，诞生了一门新的职业：一些专门从事计算的人——大家叫“计算师”的人开始登场。这些计算师们一天到晚忙忙碌碌，又被人称为“计算工匠”。可是，他们没有想到“抬头远望路”——如何创新，去改善计算方法或计算技术。另一个现象是，纳皮尔“与时俱进”寻找“新式武器”而发明对数。于是，时代造就了智慧的纳皮尔，纳皮尔用汗水创造了历史。

“寄语洛城风日道，明年春色倍还人。”这是唐代“诗圣”杜甫的祖父杜审言《春日京中有怀》中的佳句。人生的机遇无处不在、无时不随，就看我们自己能否像纳皮尔那样“与时俱进”，走在“洛城风日道”上，去迎接那必将来临的“倍还人”的“春色”——当然，还得加上用汗水浇灌的智慧……

1.5　科学更有力量——天才的遗憾

1.5.1　富翁依然钟情科学

纳皮尔出生在爱丁堡附近的小镇梅尔契斯顿堡一个贵族家庭。他天资聪慧，才思敏捷，从小受家庭的良好熏陶，所以在 1563 年 13 岁时就进入圣·安德鲁斯大学的斯帕希杰尔学院（或圣萨尔瓦特学院）学习。1566 年，他 16 岁没毕业时，就在他的舅父、奥克尼的主教博瑟韦尔的支持下，出国到欧洲游历求学，1571 年抱志回乡。

1572 年，纳皮尔与斯特林（J. Stirling）爵士的女儿伊丽莎白结婚后，定居在加尔特内斯。1579 年妻子去世后，纳皮尔又娶了珀思州克罗姆利克斯的奇斯霍姆为妻。

纳皮尔非常机智而怪招迭出，但有人却因此认为他有精神病，而另外一些人则认为他是一个妖术贩子，下面是这方面的两个传说。

一次，纳皮尔发现有仆人偷东西，就宣称他的一只黑毛公鸡能帮他破案。于是所有的仆人都被他叫进暗室，去拍这只有魔力的黑毛公鸡的背，以证明自己的清白。原来，纳皮尔事先悄悄用烟灰涂在了鸡背上，由于那个小偷不敢去拍，所以从暗室出来后他的手是干净的，结果被纳皮尔查了出来。

还有一次，纳皮尔邻居的鸽子偷吃了他的粮食，但邻居不理睬他“要没收鸽子”的警告——认为纳皮尔捉不住鸽子。然而，第二天的一幕让这位邻居目瞪口呆：那些鸽子在纳皮尔的草坪上蹒跚而行，而纳皮尔则镇静自若地把它们装进一只大口袋。原来，纳皮尔撒了用白兰地酒泡过的豌豆，使这些鸽子吃后成了“醉汉”。

纳皮尔于1580年继承父亲产业，1608年迁居梅尔契斯顿，当上了梅尔契斯顿堡的第八世领主，直到1617年4月4日辞世，就再没有离开过此地。

1.5.2 多才多艺的天才

纳皮尔经历丰富、爱好广泛：参过军，搞过发明，研究过数学。

纳皮尔当然是一个天才。他多才多艺，对天文学、机械学都有深入的研究——例如发明过螺旋抽水机、农业机械、燃烧镜、大炮、金属战车等军用器械或仪器。

纳皮尔有天才般的丰富想象力。他曾预言将来会出现许多穷凶极恶的武器：能“清除4英里（1英里合1.609 344千米）内所有超过1英尺（合0.304 8米）高的生物”的枪炮；能“在水下航行”的机器；有“一张栩栩大嘴，能毁灭前进道路上任何东西”的战车……后来，这些武器在第一次世界大战中诞生：机关枪、潜水艇和坦克车……

美国数学史家伊夫斯在1983年出版的《数学史上的里程碑》一书中说，除了发明对数以外，纳皮尔至少还有如下3项天才的成果被载数学史册。

（1）他发现了在三角学中用于求解球面非直角三角形的4个比例式中的至少2个——“纳皮尔比例式”，或称“纳皮尔比拟”。

用 A，B，C 和 a，b，c 分别代表三角形的 3 个角和对应的 3 条边，这 4 个比例式是

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}=\frac{\tan\frac{1}{2}(a-b)}{\tan\frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}=\frac{\tan\frac{1}{2}(a+b)}{\tan\frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\cot\frac{1}{2}C},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\tan\frac{1}{2}C}。$$

（2）三角学中 10 个公式的巧妙记忆法——“纳皮尔圆部法则”即“圆的部分法则”。

以上两项成果在 1614 年发表。

（3）在 1617 出版的《算筹术》一书中，他介绍了机械进行乘除计算和平方根计算的“纳皮尔算筹”（图 1-2）。这个也被叫做“纳皮尔的骨头”的“纳皮尔尺”，发明于 1612 年，被誉为世界上计算机的萌芽。

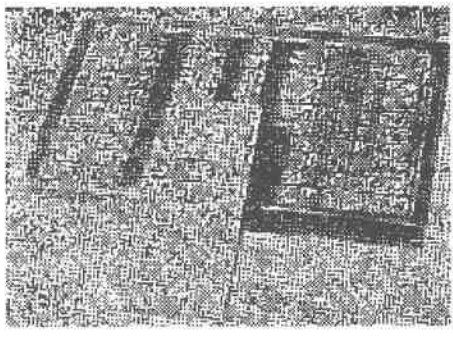


图 1-2

纳皮尔发明的算筹不是中国古代的那种算筹，并不是根据对数的原理制成的计算尺，而是一种根据 15 世纪以后流行在中亚和欧洲一带的“格子算法”的原理，制作的 10 条尺子（“卡片”）——由纸、骨板、木板、

金属板等材料制成。图 1-3 的左边是这 10 条卡片中的一条，上头的“6”的下面，是 6 的各种倍数，例如 6 往下数第 3 行的“18”，就是 6 的 3 倍。

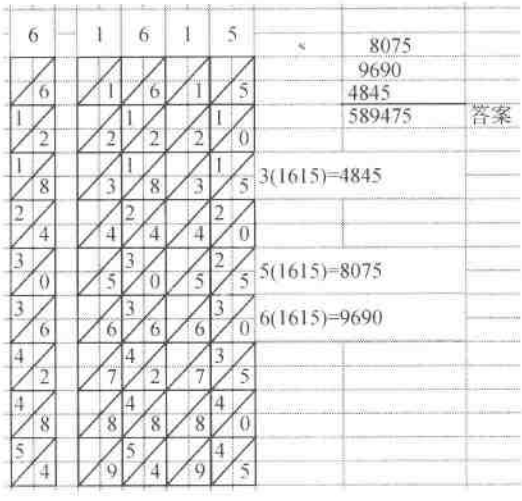


图 1-3

格子算法的计算方法是“斜行相加”。下面是《算筹术》中计算 1 615 × 365 的一个实例。

如图 1-3 的右边，先把分别“代表”1，6，1，5 的尺子按顺序排列。再分别读出 3，6，5 和它们的乘积 4 845，9 690，8 075——如果对角线上有两个数字，应把它们相加。然后把 4 845，9 690，8 075 如图 1-3 右上角错位相加，就得到答案 589 475。

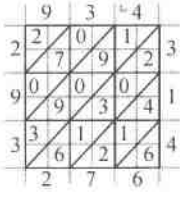


图 1-4

图 1-4 表示出了 934 × 314 = 293 276，读者可自行体验计算方法。

此外，纳皮尔还写了《小数计算法》一书。

1.5.3 天才的遗憾

作为一位严格的长老会教友，纳皮尔拥护清教徒领袖约翰·诺斯克和英国国王詹姆斯一世的事业。他在 1593 年出版的《约翰启示录大全》

一书中，强烈反对天主教，努力证明教皇是反基督的，猛烈抨击罗马教会，声称上帝将在 1688 ~ 1700 年间把世界推向末日。这本当时流传很广的书一直出了 21 版，至少有 10 版是他在世时出版的。这本书还因为他的大名而不得不被我们频繁提到，以至于书名被各家翻译得如此眼花缭乱：《约翰启示录大全的一般发现》、《圣约翰启示录的一个清晰发现》、《约翰启示录简释》、《清晰地看到圣徒约翰整个显现》。

可悲和的遗憾是，纳皮尔深信，他的子孙将因为《约翰启示录大全》而享受巨大的荣誉和福祉。然而，历史和他开了一个“国际玩笑”——事实证明他完全“南辕北辙”。我们现在知道他的英名，是因为他认为是实用而“消遣”的对数，而不是现在已鲜为人知的这本书。

于是，我们想起了纳皮尔的同胞、著名哲学家弗朗西斯·培根在《学术的进展》一书中的名言：“我们会看到智能和学问之碑是怎样远比权利或武力之碑更加长垂不朽。”可以设想，如果他不是在这些政治与宗教的纷争中浪费了大量时间和精力，就会在自然科学上“飞得更高”。

然而，历史不相信如果，只诠释已然。因此，纳皮尔的遗憾就只能而且应该成为我们的前车之鉴。

1.6　承伟业自有来人——从布里格斯到弗拉格

1.6.1　布里格斯握紧接力棒

1. 格雷沙姆学院的几何学教授

其实，纳皮尔还有另一个遗憾，那就是他和布里格斯共同伟业的伟业——关于对数的改进还没有完成，他就辞世了。

但是，年已 55 岁的布里格斯继承了双方未竟的宏伟事业，以坚忍不拔的精神，继续研究、改进对数和编制对数表。

数学家、天文学家布里格斯生于英国约克郡的乌里·乌顿，曾在牛

布里格斯

津大学读书。另外两种说法是："1577 年入剑桥大学的圣约翰学院"学习，"分别于 1581 年和 1585 年获学士学位和硕士学位"；"在坎布里奇的约翰森中心学院毕业"。1596 年，他在当年新建成的伦敦格雷沙姆学院光荣担任几何学教授席位——英国第一个数学教授席位，教几何和初等代数。

1619 年，布里格斯又到牛津大学萨维尔学院，当了新设立的第一任萨弗尔数学教授，另一说是他"后来成为奥克斯夫大学的天文学教授"。这里提到的亨利·萨弗尔爵士，是伊丽莎白一世女王的希腊文和数学私人教师。他在 1585 年担任麦尔顿县知事，1596 年成为伊登市的市长，1619 年在牛津大学设立几何学和天文学讲座。

2. 布里格斯的贡献

布里格斯关于对数的贡献主要有两个。一是采用 10 为底，使计算更加方便。二是把纳皮尔的只限于三角函数的对数，扩改为一般数值的对数。

当然，布里格斯还有其他关于对数的贡献。例如，引进对数的"尾数"（mantissa）一词——表示对数的小数部分，也是他引进的。它起源于伊特拉斯坎语的一个晚期拉丁名词，原来的意思是"附加"（addition）或"补缺"（make weight），到了 16 世纪才有"加尾数"的意思。

不过，"尾数"这个词，在数的"浮点表示法"（$x=10^n a$）中，也用来表示其小数部分 a；这里，$0.1 \leqslant |a| < 1$。所谓浮点表示法，简称浮点（floating point）法，是误差分析中数的舍入方法中的一种，另一种是定点（fixed point）法。

又如，"首数"（characteristic）一词——表示对数的整数部分，也是布里格斯最早使用的。不过，另有一种说法是，"对数尾数"一词，最早出现在英国数学家沃利斯于 1693 年出版的《代数》一书第 4 页中。

当然，这些术语在欧拉的《无穷分析引论》一书于 1748 年在洛桑出版之前，都没有流行起来。

此外，布里格斯在数学领域还有其他贡献。例如，他编制的 15 位数字的正弦函数表和 10 位数字的正切和正割函数表，在 1633 年刊行后，被沿用了 200 多年。他还在 1620 年编辑出版了欧几里得的《几何原本》（以下简称《原本》）前 6 卷。

ΕΥΚΛΕΙ-
ΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΝ
Ε'ΒΔΟΜΟΝ.
EVCLIDIS ELEMEN-
TVM SEXTVM.
ΟΡΟΙ.
α
ΜΟνάς ἐστι, κατ' ἣν ἕκαστα τῶν ὄντων ἑνίζεται.
DEFINITIONES.
I
Vnitas est, secundum quam entium quodque dicitur vnum.
β
Ἀριθμὸς δὲ, τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος.
2
Numerus autem, ex vnitatibus composita multitudo.

1573 年出版的《几何原本》首页：希腊文和拉丁文对照

经过 1 年多的努力，布里格斯在 1617 年制成了真数 1 ~ 1 000 的 14 位尾数的常用对数表。这是一本 16 页的 8 开本小册子，书名是《100 个数的对数》。其中的一部分如表 1-3 所示——它是有史以来的第一张 14 位常用对数表。

表 1-3

数	对数
1	0. 000 000 000 000 00
2	0. 301 029 995 663 98
3	0. 477 121 254 719 66
…	…
34	1. 531 478 917 042 26
35	1. 544 068 044 350 28
…	…
67	1. 826 074 802 700 83

接着，布里格斯又开始了一项庞大的计划——把 1 ~ 100 000 的全部整数的 40 位对数计算出来。

又经过7年多的努力，63岁的布里格斯在1624年出版了《对数算术，或3万个数的对数》一书。由于书名较长，所以被简称为《对数算术》，或《对数》，或《3万个数的对数》。书中载有真数1～20 000，90 000～100 000这3万个数的14位尾数的常用对数表——世界上第一个常用对数表。这样，1624年也被一些学者看成布里格斯发明实用的常用对数的年代。

可是，布里格斯也是“出师未捷身先死”——他的常用对数表中20 000～90 000的“空隙”还没来得及填补，就飘然而去了！

前面提到的纳皮尔的“我要尽我的力量”和布里格斯的“未捷先死”，毋庸置疑地表明科学之路艰辛漫长——这也是所有成功者的主要“秘诀”。于是，我们把中国唐代诗人刘禹锡的《浪淘沙》中的诗句献给他，献给所有的科学先贤：“千淘万漉虽辛苦，吹尽狂沙始到金。”

为了纪念布里格斯，国际天文联合会（IAU）把月球上一座直径37千米的环形山，用他的名字命名。

接过接力棒的还有约翰·纳皮尔的第二个儿子罗伯特·纳皮尔，以及他们的后裔M. 纳皮尔等。例如，罗伯特和布里格斯一起整理了约翰的遗作，罗伯特单独整理出版了《奇妙的对数表的构造》。M. 纳皮尔也整理了约翰的一些研究成果，在1839年出版了《算术技巧》一书。

在17世纪，接力棒还传到了英吉利海峡的对面——欧洲大陆。

1.6.2 郁金香花开的地方

荷兰西面和英国隔海相望、东邻德国，是欧洲大陆上有名的“低地国”——超过三分之一的国土低于海平面。我们知道，这个又叫尼德兰（意思是“低地”）的国度，盛产郁金香。

在17世纪，“对数郁金香”在荷兰绽放出了绚丽的花朵。

在郁金香盛开的国度，接过纳皮尔和布里格斯接力棒的是荷兰数学

家德斯克，以及荷兰数学家、出版商兼书商阿德里安·弗拉格。1628 年，他们补齐并于次年在荷兰高达出版了《对数算术》一书。这本书填补了布里格斯对数表中 20 000 ~ 90 000 之间的“空隙”，但据说后来发现了表中有 603 处错误。如果从 1615 年布里格斯访问纳皮尔算起，他们这个 10 位数的对数表造了 13 年！这本书的 1670 年的版本，曾由 1699 年来华的法国耶稣会传教士傅圣泽编译传入中国。

后来，弗拉格又整理出版了布里格斯的三角函数十进制对数表。他修订出版的这些对数表，很快在欧洲得到普遍使用。

弗拉格在 1632 年曾定居伦敦，开还开了一家书局。但发现当时政局不稳，伦敦不好卖书，就在 1642 年到巴黎重操书商业。6 年之后，他又回到荷兰实际的首都海牙（王室、国会和多数政府机关、外交使团所在地，法定首都阿姆斯特丹），继续卖书和出书。

一代著名的多产数学家弗拉格生于高达，死于海牙，他的许多著作传入中国。

当然，在欧洲大陆的其他国家——例如德国，也接过了对数的接力棒。

在德国的乌尔姆城，有一位被官方指定的“城市全民数学家和测量员”范哈贝尔——因为他具备熟练的筑城技巧。就是这位范哈贝尔，在德国首先办起了一个关于对数的刊物。

1.7　伟大发明生“龙胎”——红极一时的“尺子”

对数诞生之后不久，就生下了“龙凤双胞胎”——“龙胎”对数计算尺（以下简称计算尺），“凤胎”对数表。

1.7.1　揭秘计算尺

当本书主要作者之一在 20 世纪 60 年代第一次接触计算尺的时候，

就被它的神奇所折服——只要把尺子一拉，什么乘法、除法、乘幂、开方、对数、三角函数……的结果，就出来了！

那为什么它有这么大的威力呢？这得从计算尺的结构和工作原理说起。

对数计算尺旧名 Rechenschieber，是尺形或盘形的一种计算工具，通常由上下定尺、滑（动）尺和游标这三部分组成。

以作乘除法为例，计算尺的工作原理，就是用 1.2 节中提到的德国数学家斯蒂费尔计算 16×128 和 $2\ 048 \div 128$ 所用的“化乘除为加减”的方法。这种方法的部分理论依据，是 $\log_a M + \log_a N = \log_a(MN)$ 和 $\log_a M - \log_a N = \log_a(M/N)$。

图 1-5 是一种近现代实用的计算尺，一条动尺可以在上下两条定尺之间的滑槽中滑动。这些尺的正反两面都刻有密密麻麻的、供进行各种计算的数字和刻度。右侧的矩形“方块”$MNPQ$，是可以滑动的游标。下面以 2×3 为例，具体说明计算尺是如何工作的。

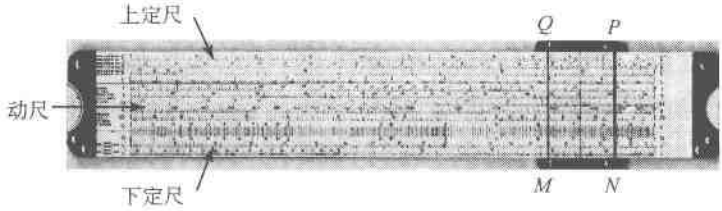


图 1-5　20 世纪的双面直计算尺

图 1-6 中的 D 尺和 C 尺，分别是图 1-5 中的下固定尺和动尺。运算的时候，只要如图 1-6 把动尺上“原数”3 的“代言人”lg3（=

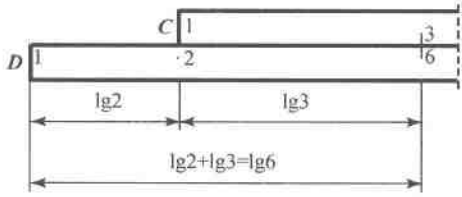


图 1-6　$\lg 2 + \lg 3 = \lg 6 \approx 0.301 + 0.477 = 0.778$

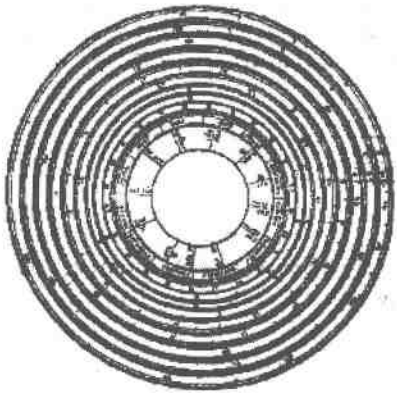
0.477）和下固定尺上“原数”2 的“代言人”lg2（=0.301）“相加”，就得到 2×3 的“代言人”lg2+lg3（=0.301+0.477=0.778）了。

具体操作是，滑动 C 尺，把 C 尺上的 1 对准 D 尺的 2，再用游标中间的游丝对准 C 尺的 3，就在 D 尺上得到答案 6——“代言人”lg2+lg3=lg6 的“原数”。整个计算过程可以用“1 对 2 看 3 得 6”来概括。

1.7.2　从冈特到武拉斯顿

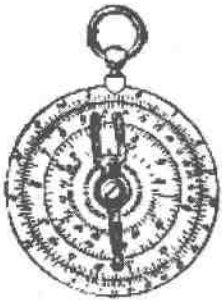
近现代实用的计算尺也是许多先贤劳动的结晶。

最早的计算尺是纳皮尔创制的“小计算尺”。



奥特雷德的圆形计算尺

最早研制出较实用计算尺的，是英国数学家冈特。他和布里格斯一样，也毕业于牛津大学，而且和布里格斯在同一个大学——格雷沙姆学院教授天文学。同胞、同学、同事、同研究对数，这也是数学史上一个有趣的巧合。冈特在 1624 年设计的正弦和正切的对数计算尺有近现代计算尺的萌芽——被称为“冈特之链”，当时用于航海，为当时的测量员熟知。



夏庞蒂埃的计算尺

鲍彻的计算尺

1630 年，冈特的同胞温盖特在《天然与人工的算术》中也有类似的发明。同年，英国数学家德拉曼写了《数学环》一书。书中说明了他发明的圆环形计算尺，并献给英国国王

郑州大学图书馆
2011-03-05

查理一世，得到了国王的赏赐。

1632年，奥特雷德在用拉丁文写的《比例圆与水平仪器》一书中详细地描绘了他的圆形计算尺。它是几个套在一起的圆环，可两面使用。这本书由他的学生福斯特翻译成英文时，在序言中特别提到“有人窃取了这一发明成果”，暗指德拉曼的圆形计算尺。这引起了一场发明优先权的争辩。德拉曼也曾是奥特雷德的学生，有可能在学习过程中得到某种启示，但历史学家们则更倾向于两者都是独立的发明。

1654年，英国数学家比萨克研制的世界上第一个有固定尺身和滑尺的计算尺，现收藏在伦敦南肯辛顿科学博物馆。类似的发明还出自英国数学家帕特里奇等人之手。

比萨克的计算尺

其后200年间，形形色色的计算尺如雨后春笋，但直到1859年法国海军中尉曼海姆把游标装上之后，才有了近现代计算尺的雏形。自古英雄出少年——当时曼海姆年仅28岁。

夏庞蒂埃和鲍彻，也各自发明了圆形计算尺或表形计算尺。富勒发明的则是螺旋形计算尺。

美国数学家撒切尔发明的圆柱形计算尺，它相当于一本5位对数表，是所有对数计算尺里最精密的。缺点是携带不方便。

在19世纪，计算尺已经基本定型并在该世纪末大量生产，所以总共显示了大约3个世纪的威力。例如，当年牛顿就很熟悉它，曾用它解过3次数字方程。当然，形形色色、种类繁多的计算尺不仅用于数学，还可用于快速计算各种描述量。

不但数学家对研制计算尺兴趣盎然，其他科学家也饶有兴味地加入

研制的行列。例如，英国物理学家、化学家武拉斯顿就发明过一种化学当量对数计算尺，用于工业化学家计算化学反应的产量，使当量定律在生产中广为应用。

1.7.3　无可奈何花落去

弦、切、割正余都相通，
对数不论自然或常用，
双曲函数一起弄，
三点一四一五九，
快把计算尺拉动，
理工，理工，理工！

这是美国加州理工学院当年的“勤奋者”之歌。由此可以看出当年计算尺的重要和“红火”。的确，使用对数计算尺曾是理工科大学生必须掌握的基本功，也是工程师身份的一种象征。

学生们正在拉计算尺

科学家们又何尝不是如此呢？苏联航天科学家科罗廖夫在设计人造地球卫星和东方号宇宙飞船时，使用了 Nestler 计算尺；爱因斯坦对计算尺也是爱不释手……

说起计算尺那 300 年“火红的年代”，现在的年轻人难以理解其间的“红火”——直到 20 世纪六七十年代，学者、工程师们还在为拥有一只“ARISTO”（一种著名的通用计算尺的型号）而骄傲，或者为得

到它而努力。在中国，直到1965年，还有《计算尺的原理与用法》这类书籍出版。

1963年，美国加利福尼亚州圣林德罗市的拉根开发出了最早一代晶体管电子计算器 Friden130（弗里登130）——袖珍电子计算器的始祖。

现在，计算尺完全被袖珍电子计算器取代，进了历史博物馆，生产厂家也“关门大吉”。

先进取代落后，这是科技发展和社会进步的必然结果。但是，它们和计算尺一样，在历史上依然各自有光辉不灭的一席之地。

1.8 伟大发明生“凤胎”——红极一时的“表格”

1.8.1 常用对数表最受青睐

自从纳皮尔造出正弦的对数表之后，形形色色的对数表应运而生。

但是，纳皮尔的正弦对数表是以1/e为底的，使用起来很不方便。于是，当1615年布里格斯访问纳皮尔的时候，双方就一致认为，如果把对数改变一下，使得1的对数是0，10的对数是10的一个适当的幂，那么编造出来的对数表会更加有用。这样，就有了后来中学课本中的那种常用对数表，也就是布里格斯对数表——以10为底的对数表。

那么，为什么以10为底的对数表“更加有用”呢？

这是因为在数值计算的时候，以10为底的对数表具有很大的优越性。

为什么会有这种优越性呢？

我们知道，在大多数时候，我们现在使用的数系是以10为基数的。同样的道理，对于以其他数（例如2）为基数的数系，也应该编造以其他数（例如2）为底的对数表。

布里格斯访问纳皮尔返回伦敦之后，就全力编造常用对数表，于是有了我们在 1.6.1 小节中提到的 14 位常用对数表——世界上第一个常用对数表，以及弗拉格的补充。他们发表的 4 个对数表，直到 1924 ~ 1949 年，才被为纪念对数发明 300 周年在英国出版的 20 位对数表所代替。由此可见，布里格斯和弗拉格的对数表也显示了大约 3 个世纪的威力。

此后，对数表的发展，主要体现在以下两个方面：研制各种用途的对数表，改进对数表的位数。至于编制对数表“技术”的改进，我们将在 4.4 节叙述。

1.8.2　编制对数表的“流水账”

在编制各种用途的对数表方面，数学家们进行了不懈的努力。下面是一笔“流水账”。

1616 年，“第一张自然对数表”以 $\ln(10\times10^6)$ 的形式，出现在 1.3 节提到的英国数学家 S. 赖特（Wright）出版的那本译著的附录中。我们已经知道，这本译著是纳皮尔的《奇妙的对数定律说明书》的英文版，翻译者是 S. 赖特的父亲爱德华·赖特（E. Wright）。不过，此时爱德华·赖特已经辞世。

这本译著中包括 72 个正弦值的对数，都是略去了小数点的自然对数值。这本译著附录的思想，来自乌特勒，其中有一个关于 $\ln10 = 2\ 302\ 584$的说明，它是略去了小数点的 10 的自然对数值——$10^6\log_e10$。

不过，一般认为第一张自然对数表是由英国数学家奥特雷德制作的。

1619 年，伦敦的中学教师斯皮德尔出版了《新对数表》一书，书中有包括 0° ~ 90° 以每 1′ 为间隔的正弦、正切和正割的 5 位（一说 6 位）对数表。当这本书于 1622 年再版的时候，载有 1 ~ 1 000 的对数表。它虽然不是自然对数表，但书中的方法可以导出 1 ~ 1 000 自然对数表来，所以一些文献也把这个表称为“第一个自然对数表”。

1620年，英国数学家埃德蒙·冈特，出版了间隔为1′的0°~90°的正弦和正切的7位常用对数表。这个对数表的书名较长——《三角形规则，或到10^8的正弦和正切的对数表》我们多次提到的冈特，也是余弦（cosine）和余切（cotangent）这两个名词的创造者。

1624年，德国数学家开普勒在马尔堡出版了一种纳皮尔的正弦对数表，促进了对数在德国的流行。

开普勒

开普勒更是一位著名的天文学家，他先后在1609年和1619年发现的行星运动三大定律，是数学史和天文学史上的里程碑。他自信而自豪地在记有这些定律的《宇宙谐和论》一书中写道："我沉醉在神圣的狂喜之中……我正在为同时代的人或后代——那无关紧要——写一本书。我的书也许要等100年才有一个读者，上帝不是等了6 000年才等到一个观测者吗?"

这里之所以说是数学史上的里程碑，是因为经过古希腊数学家阿波罗尼奥斯系统化了的圆锥曲线理论，此时才第一次用在实际问题——行星运动三大定律之中，为"纯理论"迟早会大放光芒提供了一个有力的实证，并提醒人们不要轻视"基础科学"。

这里之所以说是天文学史上的里程碑，是因为行星运动三大定律为行星的运动制定了"法律"——此前的天文学家们被"无法可依"的行星运动搞得焦头烂额。所以，人们把开普勒誉为"天空立法者"。

1625年，英国数学家温盖特又在巴黎出版了《对数算术》一书，包括1~1 000的7位对数，还包括正弦和正切的对数。这是出现在欧洲大陆的第一本布里格斯对数表。

1631年，雷恰·诺乌出版了《三角学，或关于三角形的学说》两卷本，都是根据对数这一杰出成果编制而成的。这本书有助于对数的推广和对数表的编制。

晚年的布里格斯也一直在计算间隔为0.01°的13位三角函数的对

数，在他逝世的时候几乎完成了。后来，这项工作由他在格雷沙姆的另一个同事亨利·杰利伯兰全部完成，并在 1633 年以《不列颠的三角，或关于三角形的学说》为名发表。大致同时，弗拉格也出版了他的《三角对数表》，给出了以 10″为间隔的正弦、正切和正割的 7 位对数值。

1670 年，法国数学家奥扎南在里昂出版了一本书名很长的书，内容包括正弦的对数表和正切的对数表等三部分，曾有 1685 年的版本传入中国。

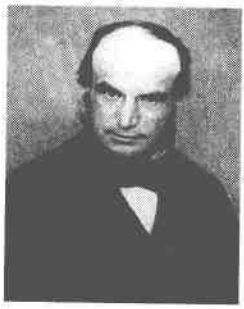
1778 年，荷兰数学家沃尔弗拉姆，完成了 1 ~ 10 000 的有 48 位的 10 进数码自然对数表。此外，他还计算出具有 63 位和 88 位 10 进数码的素数对数表。

1827 年，计算机先驱、英国数学家巴贝吉也编制了一个对数表，包含 1 ~ 108 000 的自然对数的值。

在编制位数不同的对数表方面，数学家们更是不遗余力。

从布里格斯和弗拉格的 14 位对数表，到 1795 年法国数学家卡莱编的 2 ~ 1 200 的 20 位对数表，到沙尔普的 61 位自然对数表，位数越来越多。而帕尔克赫尔斯特的自然对数表，竟多达 102 位！

不过，这 102 位还不是对数表位数的冠军。冠军应该属于英国天文学家、数学家亚当斯的 260 位对数表。他就是大家熟悉的、独立计算出海王星轨道的两个人之一，另一个独立计算者是法国天文学家、数学家勒·威烈。



亚当斯

勒·威烈

实际上，亚当斯的这个表实际上并不是表，而只是 2，3，5，7，10 这 5 个数的自然对数，以及一个 260 位的“换算因数”用来把它们换算成常用对数。

不难明白，有了这 5 个数的自然对数，就可以用简单的加法或乘法得到各个合数的对数来；例如，12 的对数，就等于 2，2，3 各自的对数的和。这就怪不得苏联数学教育家、科普作家别莱利曼，在《趣味代数学》一书中，把这个表称为“超级壮观”呢！

越来越多位数的对数表，自然是为了实际需要。但是，这也有三个缺点。一是“本本”太厚，携带不便。二是因太厚而查阅不方便，使计算速度减慢。三是在多数情况下，多位值没有用，因为计算的准确度不可能超过测量的准确度。于是，弗拉格就把他填补的 14 位对数表压缩为 10 位。1794 年，出现了 7 位表，但这时仍有 200 页。后来，又演化为学校里用的只有 30 页的 5 位表——用它来计算，比 7 位表省时一半。最后，变为中学生们书包里的 3 页 4 位表。

在这类 4 位对数表中，最著名的有 1953 年在莫斯科出版（第 24 版）的《四位数学用表》中的（4 位）对数表。它由苏联数学家伯拉基斯编著。人民教育出版社在同年翻译、改编后出版，曾长期作为在普通中学使用的数学用表。

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31

一种四位常用对数表的一部分

把“本本”变薄的另一个措施是，只印尾数，不印首数来节约篇幅——这个“现代习惯”从 18 世纪起已“约定俗成”。但是在早期的对数表中，却既印尾数，也印首数，而不是像后来这样只印尾数。

由于大部分技术计算只需要 3 位尾数的对数表就够了，所以别莱利曼建议，只要 1 页的 3 位对数表就行了。

有人统计过，各种各样的对数表已经超过 500 种。

当然，随着科技的发展，现在对数表基本上被袖珍计算器取代，退出了历史舞台，甚至一些著名的数学手册已经删去对数表，但它在历史上的光辉却不可磨灭。

1.8.3　“落红不是无情物”

现在，对数计算尺和对数表这些传统计算工具，基本上已经退出了历史舞台，说明对数在计算技术上的重要作用已经日见消失，甚至一些学校中已经不把对数作为一种纯计算的方法来讲授。这说明科技发展的迅潮猛浪是何等惊人。

“花落水流红，闲愁万种，无语怨东风。”对于对数计算尺和对数表这些“落花”，我们可不能有元代杂剧作家王实甫笔下《西厢记》中的这类“万种愁”和“东风怨”啊！于是，我们更乐于看到对数将“乘除化为加减”以简化繁难计算的思想方法依然闪耀着千古不灭的强光，并逐步形成现代数学中的“关系－映象－反演”（RMI）原则。这些，也是我们至今对它“宠爱有加”的原因之一。

“落红不是无情物，化作春泥更护花。”现代科学的满园艳丽之花，不就是在对数计算尺和对数表这些“落红”的沃土中成长起来的么！

1.9　并非“风景这边独好”——“杀鸡杀喉”比尔吉

“莫道君行早，更有早行人。”把这句中国的谚语用在对数的发明上，也十分恰当。

原来，在纳皮尔制成对数表之前，已经有一位“早行者”制成对数表了。他就是瑞士的一位教师，也是一位“仪器制造者”——主要

比尔吉在1585年制作的精密仪器

从事钟表生产的杰斯特·比尔吉。

比尔吉生于瑞士列支敦士登，1579年被推荐去当了威廉四世的钟表匠——计时师，1604年成为哈布斯堡王朝的神圣罗马帝国皇帝鲁道夫二世的皇家技师，居住在布拉格。爱好天文研究的比尔吉，曾经得到开普勒的赏识，并在卡特琳天文台工作时当过他的助手。比尔吉能“文”（发明对数等）善“武”（双手灵巧），当时被尊为难得的数学家、天文学家和工艺家。也有人把他称为力学家。

虽然比尔吉在数学上留下来的成果不多，但他和开普勒用逗号把整数和十进分数分开的做法，被看成是发明了小数。而开普勒则把小数的发明权归功于比尔吉：“小数和对数是比尔吉发明的。”

比尔吉花了大约8年时间，造出了如表1-4的等差数列和等比数列表。

表1-4

等差数列	0	10	20	…	$10n$
等比数列	10^8	$10^8(1+1/10^4)$	$10^8(1+1/10^4)^2$	…	$10^8(1+1/10^4)^n$

其中第一行等差数列被印成红色，第二行等比数列被印成黑色。

可以看出，上面等差数列中的$10n$始终对应着下面等比数列中的$10^8(1+1/10^4)^n$。现在，我们按照比尔吉的基本思想，对他的表稍微加以改动——换为另外的如表1-5所示的等差数列和等比数列。

表1-5

等差数列	0	0.000 1	0.000 2	…	$0.000n$
等比数列	1	1.000 1	$(1.000\ 1)^2$	…	$(1.000\ 1)^n$

在这里，等差数列中没有写出的 1（它显然出现在第 10 001 项），对应于等比数列中的 $(1.000\ 1)^{10^4}$（它显然也出现在第 10 001 项）。由此可以看出，比尔吉在造他的对数表的时候，把对数的底选为 $(1.000\ 1)^{10^4}=2.718\ 145\ 93\cdots$——和 $e=2.718\ 281\ 828\cdots$ 相比，仅仅从第 4 位小数起才开始不同。

这就是说，比尔吉选的对数的“底”，已经非常接近 e 值了！所以，有人说，比尔吉的对数是以 e 为底的，而另有人则把他的对数称为“比尔吉对数”。此外，有不少人说比尔吉的对数以 1.000 1 为底，这是没有看 $(1.000\ 1)^{10^4}$ 中的 10^4 所致。当然，比尔吉在编制对数表的时候，他也并没有“底”的概念。

对数书封面上的比尔吉

可能有读者要问，为什么要选等差数列中没有写出的 1 来研究呢？答案很简单：底的对数才是 1，所以只要找出对数是 1 的时候的真数 $(1.000\ 1)^{10^4}$，就找到这个对数的底了。

那么，比尔吉实际上选了非常接近 e 的值作对数的底，这是巧合还是必然？我们将在 4.4.2 小节中解答这个问题。

1620 年，比尔吉出版了简称《进数表》的大作《等差数列和等比数列》，公布了他的发明。不过，他没有署名。此时，离纳皮尔发表对数成果 6 年，或纳皮尔老去 3 年。

但即使如此，究竟谁是对数的发明者，是否其中有一个人是抄袭，等等，还是引起了一场争论。由于他们两人都曾声称花了很多年时间进行研究，各自开始的时间又没有确切的文字记载，所以除了比尔吉发表

的年代比纳皮尔晚6年以外，其他都得不出令人信服的、有确实证据的结论。但是，多数人认为，纳皮尔的对数思想略早于比尔吉；而根据比尔吉的手稿推断，他写成功于1610年，作品早于纳皮尔；他们俩都是对数的发明人。

此外，从纳皮尔和比尔吉创立对数的简单介绍可以看出，前者是通过几何途径的，而后者则是通过代数途径的。

在科技史中，有一个并不奇怪的、屡见不鲜的“同时现象”，而且经常伴生一个“殊途同归现象”——这两种现象，我们简称“双胞胎”。

举例来说，19世纪上半叶发现的能的转化和守恒定律，就是几乎同时由几个国家的不同科学家，各自独立创立的。这是物理学中的“双胞胎”最典型的例子。

当然，数学也不例外——熟悉数学史的人都知道，数学中的“双胞胎”不计其数，微积分、解析几何、非欧几何的创立就分别是典型的例子。

……

科技中的“双胞胎”，应了一句中国谚语“杀鸡杀喉，各有各的刀路”，给我们以深刻的启示：“条条大道通罗马”；当时代召唤某项科技的时候，当科技时机成熟的时候，我们必须“只争朝夕”，否则就会落后。

科技中的“双胞胎”现象，值得深思和研究。

1.10 天文学家延寿一倍——拉普拉斯这样说

“现代计算方法之所以有奇迹般的力量，是由于三个发明，即阿拉伯记数法、小数和对数”。在两卷本的《数学符号史》一书中第149页这么说。这本书是研究数学符号的经典之作，由瑞士-美国数学史家卡约里编著，在1928~1929年出版。

对数这项伟大的发明，得到的许多赞美和史书记载远不止卡约里的《数学符号史》。例如，英国数学家哈顿在他的《数学纵览》一书中，就辟出专门篇幅写“对数发展史”。又如，伊夫斯在《数学史上的里程碑》中，就把“纳皮尔发明对数”列入 43 个“数学里程碑”中——按发明年代先后排第 19 位。

科学家中最有名的赞美，来自法国著名的天文学家、数学家拉普拉斯——他在数学上的贡献我们将在后面的章节中多次提到。

“可以把几个月所做的计算减少到几天完成，由于缩短了计算工作的时间，我们可以说这种方法使天文学家的寿命被延长了一倍，而且使他们少犯错误，以及因为长时间计算而造成的不可避免的烦闷。”拉普拉斯在他的天文学巨著《宇宙体系论》一书中，深有体会地赞美对数，“这种完全由学识而来的发明是人类精神上的宝贵成就；在工艺上人们依赖自然界的物质和能量才能作出发明，而计算技术却只靠人们自己的创作。”

拉普拉斯

是的，对数把乘方、开方这第三级运算，转化成乘、除等第二级运算，而第二级运算又可转化成加、减这第一级运算。这样，“繁难”就变成了“简单”。这可看出对数的魅力，于是拉普拉斯这么兴奋和不吝啬溢美之词。

由于对数的巨大作用，所以它被整个欧洲积极采用，“特别是在天文学界，简直为这项发明而沸腾起来了”——伊夫斯在《数学史上的里程碑》中写道。于是，开普勒于 1624 年热情地在德国大量推广，如在马尔堡出版一种纳皮尔对数表。1625 年，长期滞留在法国的英国数学家埃德蒙·温盖特在法国，也做了类似的工作。而在 18 世纪末，法国政府曾动员 150 人花了两年时间完成了一个 1 ~ 20 000 的对数表。意大利数学家卡瓦列里在意大利也热忱宣传。

当然，赞美发明对数的不只是数学家或其他自然科学家。例如，

1971年尼加拉瓜纪念纳皮尔发明对数的邮票

"哪一样都不外行"的、"欧洲最博学的人"德国社会主义理论家、哲学家恩格斯，在谈到近代科学产生时期的主要成果时，不但把对数看成是17世纪被确定了的最重要的数学方法之一，而且进一步把它和解析几何、微积分，并列为"最重要的数学方法"。

为了纪念对数这一伟大发明，尼加拉瓜在1971年5月15日发行了一套主题是"10个最重要的数学公式"的纪念邮票。这10枚邮票中的一枚，就印有发明对数的公式——和其他9枚一样，邮票背面还用西班牙文对公式的重要性作了简要说明。

对数的诞生对于科技发展、社会进步的巨大作用，使人想起了邓小平（1904—1997）在1988年9月的那句名言："科学技术是第一生产力。"而它的发轫是德国社会主义理论家、哲学家马克思的"生产力中也包括科学"和"社会劳动生产力，首先是科学的力量"。

1.11 "迟到的爱"——对数在中国

1648（一说1646）年，波兰传教士穆尼阁来华，向薛凤祚、方中通等明清时代的天文学家、数学家传授对数、三角学等。从此，对数开始传入中国。

1653年，薛凤祚和穆尼阁共同编译出版了中国最早的对数书——《比例对数表》，正式把对数介绍到中国。穆尼阁死后，这本书成为薛凤祚编撰的《历学汇（会）通》中数学部分的重要内容。

在《比例对数表》中，把logarithm（对数）一词翻译成"比例数"或"假数"。对于对数表的作用，也赞美有加："今有对数表，则省乘

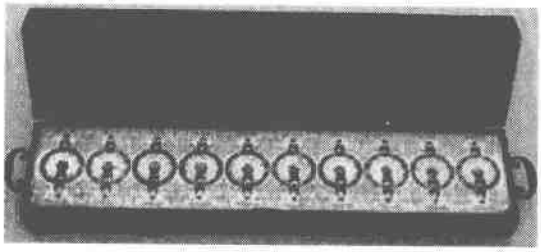
除、而况开方、立方、三、四、五方等法，皆比原法工力十省六七，且无舛错之患。”书中还列出了 1 ~ 20 000 的 6 位的常用对数表。而《历学汇通》中的《比例四线新表》里，则列出 6 位的 4 种三角函数（正余弦、正余切）对数表。

1723 年，康熙皇帝（1654—1722）组织编撰的“康熙御制”《数理精蕴》出版。其中下篇 · 卷三十八“对数比例”一节中，首先就说：“对数比例乃西士若往 · 纳白尔（John Napier）所作，以假数与真数对列成表，故名对数表。又有恩利格 · 巴理知斯（Henry Briggs）。”这里的“假数”，也是指 $\log_a N = b$ 中的 b——我们现在叫“对数”，而“真数”和现在的含义一样——指式中的 N。这样，把“真数与假数对列成表”，所以叫“对数表”。后来，“假数”逐渐不用，只把 b 叫 N 的对数。这里的“纳白尔”和“巴理知斯”，分别指纳皮尔和布里格斯。

《数理精蕴》中的“对数比例”一节，比《历学汇通》更详细地阐述了对数和对数表，并给出编造对数的三种新方法。此外，还列有 1 ~ 100 000 的 10 位常用对数表、间隔 10″的 7 位三角函数表和 10 位三角函数对数表。

说起对数在中国，还有一个趣味故事呢。

清代数学家戴煦无心功名，但对于对数却“情有独钟”。他认为，旧的求对数的方法头绪纷繁、让初学者一头雾水，接着望而却步，于是他潜心着力改进。功夫不负有心人，他终于发现几种计算对数的捷法，并在 1845 ~ 1852 年间编著成总书名为《求表捷术》（《求表捷法》）的一部书。这部共 4 卷的书，是当时最有影响的数学著作。



故宫博物院收藏的清代十位圆盘计算器

1854年，英国传教士艾约瑟在李善兰、张福僖两位中国数学家那里，看到戴煦的《求表捷术》后，大为折服。于是他专程到杭州拜访戴煦，但戴煦拒不接见。虽然艾约瑟大失所望，但对戴煦的崇敬不减，就把他的书翻译成英文，寄回到英国的“算学公会”。这是一段“对数佳话”。

故事中提到的李善兰，研究对数也有成就。他说，对数可以用几个“尖锥”的合积来表示。这里提到的“尖锥”，是指他发明的“尖锥求积术”中的一个图形。

在对数传入中国的时候，大约在1680年，英国数学家埃德蒙·温盖特那种计算尺已经传入中国，现在北京故宫博物院还藏有仿制品，上面写着“康熙御制”的字样。

中国数学家不但仿制计算尺，有的还有深入研究呢——邹伯奇就是其中的一个。他研究的成果汇入他所著的《对数尺记》一书中，死后刻入1873年出版的《邹征君遗书》中，而实物则在1853年制成。

李俨

此外，在1962年，中国数学史家李俨还写过一本《计算尺发展史》，这是中国数学家对于计算尺的重要研究成果。

由此可见，对数是在17世纪中叶从西方通过传教士传到中国的，不但很快得到中国数学家们“迟到的爱”，而且在继承的基础上还有发展。

有中国学者的研究指出，“其实对数思想在我国古代就有了”，但却没能开花结果——就像我们说过的阿基米德和斯蒂费尔没有发明对数那样。由此可见，在世界的各个角落，先贤们在跨过“水千条山万座”的时候，在黑暗中探索了不知多少岁月！

但问题还不仅仅如此。

为什么中国的对数幼芽在开花之前就枯萎了呢？

其实，这是一个大问题中的一个小问题。这个具有深刻启发性和重

大理论价值与现实意义的大问题是，以三大发明（指四大发明中的指南针、火药、活版印刷术）促进欧洲近代文明兴起的中国，却没能产生近代科学，反而在明清开始落后？这个大问题，也是著名的“李约瑟难题”即“李约瑟之谜”的近似版。李约瑟提出的难题是：“为什么资本主义和现代科学起源于西欧，而不是中国或其他文明？”

第 2 章　无处不在的对数
——“天地英雄”大显神通

你以为一切都已经发现了吗？那真是绝顶的荒谬；这无异于把有限的天边，当作了世界的尽头。

——法国天文学家、科普作家、诗人弗拉马里翁

“对数”二字几乎和“数学”形影不离：对数不等式、对数方程、对数函数、对数的幂级数展开、对数螺线、对数正态分布……

地上响的、天上亮的、地下动的，都有对数——一个不折不扣的“天地英雄”。

2.1　“吹拉弹唱”也要讲数学
——音乐中的对数

搞音乐还要用对数吗？是的。

在音乐里的“等音程半音音阶”中，各“音程”并不是按照声音的频率——等价于按照声音的波长来等距离安排的，而是按这些数量的对数来安排的。当然，这种对数的底不是 10 或者 e，而是 2。

我们假定最低八音度（“零八度”）的“do”音的频率为 n 赫兹，那么，第一八音度的“do”的频率就是 $2n$ 赫兹，而第 m 八音度的“do”的频率就是 $2^m n$ 赫兹，等等。我们再用 p 来表示钢琴的半音阶里的任意一个音调，把每一个八音度的基音“do”作为 0；那么，如果

“sol”就是第 7 个，“la”就是第 9 个，等等。第 12 个音还是“do”，只不过高了一个八音度。因为在等音程半音音阶里，每一个后面的音的频率都要比前面一个的频率增大到$\sqrt[12]{2}$倍，所以任意一个音——第 m 八音度里的第 p 个音的频率 N_{pm}，都可以用以下公式来表示：

搞音乐也要懂数学

$$N_{pm}=2^m n\left(\sqrt[12]{2}\right)^p。$$

现在，把这个式子两边取以 2 为底的对数，就得到

$$\log_2 N_{pm}=m\log_2 2+\log_2 n+(p/12)\log_2 2$$

或

$$\log_2 N_{pm}=\log_2 n+(m+p/12)。$$

把最低的“do”的频率定为 1（即 $n=1$），上面这个式子就变成

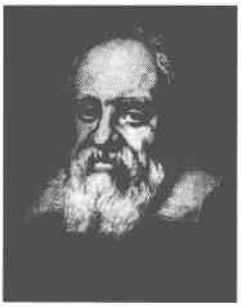
$$\log_2 N_{pm}=m+p/12。$$

从这个式子可以看出，钢琴键盘的号码 p 就是相应音调的频率的对数 N_{pm}乘以 12。还可以看出，表示出八音度的号码 m 乘以 12，就是对数的首数，而表示出音调在这个八音度里的次序的 p，则是对数的尾数。

例如，在第三个八音度中的“sol”这个音，就是说在 $3+7/12\approx 3.583$ 这个数里，数 3 是这个音的频率的用 2 作底数的对数的首数，而 $7/12\approx 0.583$ 是这个对数的尾数；因此，它的频率是最低八音度中的“do”音的 $2^{3.583}$倍，即约 11.98 倍。

对于音乐的数学研究，科学家们从来就没有停止过，而最伟大的成就来自中国。

中国明代数学家朱载堉，在世界上首先于 1581 年创立的“新法密律”，即十二平均律理论，就用第一弦的长度除以$\sqrt[12]{2}$得到第二个音的弦长，以下用相同的方法求得各个音的弦长，这种算法和得到的数据，我



伽利略

们现在还是照用不误。后来，他还把这个理论推广应用到律管上。

从这个例子可以看出，音乐也离不开数学。这正如伽利略的那句名言所说："数学是科学的语言。"而比他早一千多年的希腊数学家阿纳托利厄斯则说，虽然数学是从点和线开始的，但数学很快就把自己扩展到整个宇宙，使得他包罗万象。难怪有人说，如果一门科学离开了数学，那么它就还不成熟。

2.2 从希帕恰斯到普森——星星亮度的"对数尺"

2.2.1 "目视星等"的"对数尺"

1. 量化星星亮度的"对数尺子"

"天街夜色凉如水，卧看牵牛织女星。"在中国唐代诗人杜牧的《七夕》诗中，以这样优美的诗句来描写宫女哀怨与期望相交织的复杂感情。当我们面对繁星满天的夜空"巡天遥看一千河"时，就会发现天上的星星——包括恒星和其他天体的"物理亮度"（以下简称"亮度"）各不相同。那么，我们的眼睛对亮度的感觉与光的强度——物理学上叫"光强"，又是什么关系呢？

普森

1856年（一说1850年），英国天文学家普森开始定量解决这个问题，并得到了正确的答案——也是他在天文学上最广为人知的贡献。他用对数标度把天体的亮度分成6个等差级数的等级——称为"目视星等"（以下简称"视星等"

或“星等”）m，通常在数字右上角标注小写字母“^{m}”来表示。例如，北极星为 2^{m}，轩辕十四星为 1.35^{m}。1 等星（1^{m}）最亮，2 等星（2^{m}）暗一些……6 等星（6^{m}）最暗。

后来，对亮于 1^{m} 的星，依次延伸为 0^{m}，-1^{m}，-2^{m}，…。例如，全天最亮的恒星——天狼星为 -1.45^{m}，金星在最亮时为 -4.4^{m}。

对暗于 6^{m} 的星，则依次延伸为 7^{m}，8^{m}，9^{m}，…。例如，肉眼看不见的巴纳德星为 10^{m}。

普森指出，我们在地球上用仪器测定亮度相差约 2.512 倍的两颗星，用肉眼看起来只感觉相差 1 等。例如，在地球上看起来 1 等星只比 3 等星亮两个等级，但它们的亮度之比却是 $1:2.512^{(3-1)}\approx 1:6.3$。

2. “对数尺子”的来历和希帕恰斯

那么，这个 2.512 又是怎么来的呢，它与对数又有什么瓜葛呢？原来，“星等”就是星星的亮度的负对数，而这个对数的底是 $\sqrt[5]{100}\approx 2.512$。

那这个 $\sqrt[5]{100}$ 中的 5 和 100 又是怎么来的呢？原来，普森把 6 等星的“6”减去 1 等星的“1”，就得到 5；1 等星与 6 等星的亮度之比是 100。所以，$\sqrt[5]{100}\approx 2.512$ 就被后人称为“普森比率”。而这个 100，来自普森根据下面要说到的约翰的实际观测。

下面，我们用这个方法计算一个实例。我们用光度计测得某一颗星的亮度是 1 等星的 1/40，那么，它的“星等”就是 $1+\left(-\log_{\sqrt[5]{100}}\frac{1}{40}\right)\approx 5$ 等。

当然，“星等”大小还可以由采用了常用对数的“普森公式”$m_2-m_1=-2.5\lg(L_2/L_1)$ 得到。这里的 m 是天体的“星等”，L 是对应天体的亮度。

由此还可以看出，“星等”有可能出现前面提到的小数。比如，满月时月光的亮度是 -12.6 等，而太阳最亮时是 -26.8 等。

不过，最早把星星分成 6 等的并不是普森，而是希帕恰斯。他把整个天空大约 20 颗最亮的恒星定为 1 等，把用肉眼勉强能看到的最

希帕恰斯

暗的星定为6等。从此，星星的亮度单位——“星等”就被沿用下来。

希帕恰斯是西方天文学的创始人、当时希腊最伟大的天文学家，他对天文学的贡献包括发现“岁差”和精确的天文观测——例如，他测得“回归年”的时间长度和现代值相差不到6分半钟。他也是一位贡献卓著数学家，开创了三角学的研究。希帕恰斯对后世的影响如此之大而反复被各种媒体提到时，中译名就多得出奇：伊巴谷、希帕克、西帕克斯、希帕库斯、西帕求斯……

当然，普森公式的创立，还得感谢19世纪上半叶发明的分光计，以及将在2.3.2小节的1.中提到的韦伯和费希纳对人体感觉的研究。

17世纪天文望远镜诞生以后，人们用它看见了更多更暗的星，于是又有了前面提到的7，8，9，…等星。

当然，如果用人眼的感觉来估计星星的亮度，无疑会产生误差——“人差”。例如，由出生在德国的英国著名数学家、天文学家弗里德里希·威廉·赫谢尔发现天王星的时候，把它定为20等，而在20世纪，天文学家们则把它更准确地订正为14等。

那么，西帕恰斯把“星等”分成6个等级，又有没有科学性呢？

1830年，弗里德里希·威廉·赫谢尔唯一的儿子、英国数学家、天文学家约翰·弗里德里希·威廉·赫谢尔，把这6个等级的星的亮度详细测定出来，结果发现1等星的亮度大体是6等星的100倍。这样，普森根据他的这一研究成果，才有了前面说的用亮度相差$\sqrt[5]{100}=2.511\,886\cdots\approx 2.512$倍来区分“星等”的科学“对数尺子”，并沿用至今。

由此可见，西帕恰斯把“星等”分成6个等级是有科学性的。

弗里德里希·威廉·赫谢尔

约翰·弗里德里希·威廉·赫谢尔

2.2.2　“绝对星等”和“照相星等”

1. “绝对星等”是“公平尺”

但是，上面这种不考虑星星离我们远近来比较亮度的“星等”计算法，显然对遥远的星星“有失公平”。于是科学家们又“心生一计”——采用绝对星等 M。

绝对星等是指距离天体 10 秒差距的这个距离看到的亮度，通常在数字右上角标注大写字母“^{M}”来表示。这里提到的秒差距（pc）和光年（light year，缩写为 l. y.）一样，都是天文学上的“大尺子”：1 pc ≈ 3.262 l. y. ≈ 3.086×10^{16} 米。

例如，太阳最亮时的 $M=4.83^{M}$，这样，视力稍差的人就看不见，因为他站在距离太阳约 3.086×10^{17} 米远的地方。又如，绝对星等最大的星——天蝎 ξ_1，比太阳亮 50 万倍。

某个天体的 M 和 m，用公式 $M=m+5-5\lg d$ 进行换算。式中 d 为观测点（例如地球）和该天体的距离（单位为 pc）。例如，地球距太阳为 1 天文单位即 $1\text{AU}=1.496\times10^{11}$ 米 $=4.848\times10^{-6}$ pc；那么，看到太阳最亮为 $m=-26.8$ 时，$M=-26.8+5-5\lg(4.848\times10^{-6})^{M}\approx4.8^{M}$。这个结果和上述 4.83^{M} 吻合。

对天文学家来说，绝对星等比目视星等更为重要。因为它更能反映

恒星的真实发光本领，同时也是衡量恒星年龄、寿命的参数，演化进程的标志。

2. “照相星等”

此外，天文学上还有“照相星等”的概念——用光的波长来当“尺子”。

照相星等的UBV（测光）系统，是通过在检测系统前放置标准滤光片对天体在三个波长段辐射的测量得到的。三个波长段指：①U段的波长为360纳米上下，测量近紫外线成分，所得为“紫外星等”；②B段的波长为440纳米上下，测量蓝色成分，所得为“蓝色星等”；③V段的波长为550纳米上下，测量黄、绿色成分，和人眼所见亮度接近，所得为“可见星等”。这三个星等的每一个，又各自分为视星等和绝对星等。

UBV系统，是国际上的标准测光系统，由两位美国天文学家约翰逊和摩尔根，在20世纪50年代首先提出。

当然，类似的测光系统还有更复杂的uvby测光系统和Stebbins-Whitford-Kron六色（UVBRGI）系统等。

2.3 借得“贝尔”寻规律——噪声的“对数尺”

2.3.1 常用对数度量噪声

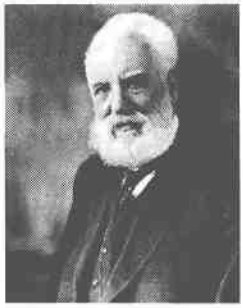
当今世界，各行各业高度发达。然而，各种污染也十分严重，特别是近年人们日益关注的噪声污染——它严重影响工作效率和身心健康。

可是，你知道吗，噪声和对数也有密切关系呢！

为了研究包括噪声在内的各种声音，就逼迫科学家们研究出能准确量度声音“响度”的方法来。

科学家们终于取得了初步的成功。这种响度的单位就是“级差”

的单位“贝尔”（Bl）——来自出生在苏格兰的美国电话发明家贝尔。这样，1 贝尔，2 贝尔，3 贝尔等，对于我们的耳朵的响度感觉就成了一个等差级数。这些声音的“强度”——准确地说是能量，就成了一个公比是 10 的等比级数。也就是说，如果两个声音的响度相差 1 贝尔，那它们的强度即“声强”就是 1∶10。可以看出，声音的响度用贝尔来表示的时候，正好是它的声强的常用对数。



贝尔

你看，对数在研究声音的时候，又大显神通了。

有的时候，人们嫌贝尔这个单位太大，就用它的 1/10 作为实用单位，叫“分贝”（dB）。

下面，用几个实例来说明。

高声说话的响度是 6.5dB，是树叶的沙沙声的响度 1dB 的 6.5 倍。可以算出，前者的声强比后者大 $10^{(6.5-1)}$ 倍≈316 000 倍。

尼亚加拉大瀑布最大的噪声是 90dB，而锤子打在钢板上的声音可以达到 110dB，两者响度相差 20dB，而声强之比则是 $1:10^{(110-90)}=1:10^{20}$！

《中华人民共和国城市区域环境噪声标准》规定，居住、文教机关为主的区域以及乡村居住环境的噪声，白天应不超过 55 分贝，夜间应不超过 45 分贝；商业、工业混杂区白天应不超过 60 分贝，夜间应不超过 50 分贝；城市中交通干线两侧，白天应不超过 70 分贝，夜间应不超过 55 分贝。而为了保护听力，噪声不应超过 90 分贝；为了保证工作和学习，噪声不应超过 70 分贝；为了保证睡眠，噪声不应超过 50 分贝。

2.3.2　响度感觉的实验研究

1. 韦伯－费希纳心理物理定律

那么，为什么我们的耳朵的响度感觉不是与声强成正比，而是大致

与声强的常用对数成正比呢?

原来，这是基于 19 世纪的两位德国心理 - 物理学家韦伯和他的表弟与学生费希纳的“韦伯 - 费希纳心理物理定律”——“同一律”。

同一律 $S=k\lg R$（S 为刺激强度 R 产生的感觉强度，k 是比例常数）是一个实验理论。它是说人的一切感觉——包括听觉、视觉、肤觉（含痛、痒、触、温度觉）、味觉、嗅觉、电击觉等，都遵从感觉不是与对应物理量的强度成正比，而是与对应物理量的强度的常用对数成正比的规律。

韦伯

费希纳

2. 未完的探索

不过，到了 20 世纪，经过美国心理学家戴维斯等的探索，在 1961 年，美国心理学家斯蒂文斯却用“幂（函数）定律”对同一律提出了挑战，至今仍胜负未分。

斯蒂文斯

戴维斯

幂定律又叫“乘方（函数）定律”，指人主观感觉到的大小 P 并不与刺激物理强度 K 的对数成正比，而是与 K 的乘方成正比，即：$P = nK^i$（n 和 i 是被评定的某种经验常量）。

当然，常用对数这把尺子不仅用来描绘噪声。在家用电器中，有控制音量、音调或亮度的旋钮或按钮，它们控制的是电器内部的电位器等电子元件，而这些电子元件的电阻值通常是按对数规律设计、制造的。选择电台或电视台的旋钮所控制的可变电容器也是如此。

2.4　里克特的“尺子”——地震中的对数

震惊世界的 2008 年“5·12”汶川大地震已经渐行渐远，但让我们挥之不去的不仅是里氏震级 8.0 级那惊心动魄的破坏，还有不弃不离的感动、众志成城之下的崛起……

那么，里氏震级是怎么回事呢？

2.4.1　里氏震级与常用对数

1. 什么是里氏震级

里氏震级全称里克特震级。它是由美国加州理工学院的地球物理学家、地震学家里克特，在研究加利福尼亚地方性地震时于 1935 年提出的一种震级标度。经过同一学校的美籍德国地球物理学家、地震学家古登堡等的改进，现已成为国际通用的地震震级标准。

这样，里克特等就为度量地震的“大小”定下了一把公用的“尺子”——单位是里氏震级，以下简称震级。

2. 里氏震级的测定

在距离震中 100 千米处，如果地震仪记录到地震波的最大水平位移（振幅）n_0 为 1 微米，那么地震的震级就规定为 0 级——称为震级的“基准震级”L_0。这里的“0 级”，是由公式 $L = \lg(n/n_0)$ 级（n 以微米为单位，$n_0 \equiv 1$ 微米）决定的——$L_0 = \lg(1\text{ 微米}/1\text{ 微米})$ 级 $= 0$ 级。

利用公式 $L=\lg(n/n_0)$ 级，就能根据地震仪的记录，计算任何一次地震的震级。举例来说，在距离某次地震的震中 100 千米处，地震仪记录到的最大振幅为 10^3 微米，那这次地震的震级就是 $L=\lg(10^3$ 微米/1 微米)级 =3 级。

里克特

古登堡

这里的第一个问题是，为什么要选取 $n_0\equiv1$ 微米？原来，这是当时广泛使用的伍德－安德森扭力式地震仪所能测到的最大精度。这种地震仪，是两位美国地质学家伍德和安德森在 1922 年发明的。

这里的第二个问题是，如果观测仪器没有在 100 千米处，怎么办？这时就要根据距离的远近不同，按一定方法进行折算。

地震仪记录到距离震中 100 千米处的最大振幅，也反映出某次地震的震源中心释放出的总能量 w（图 2-1）。也就是说，释放出的总能量和最大振幅有对应关系。如果最大振幅为 1 微米时总能量是 w_0（大约是

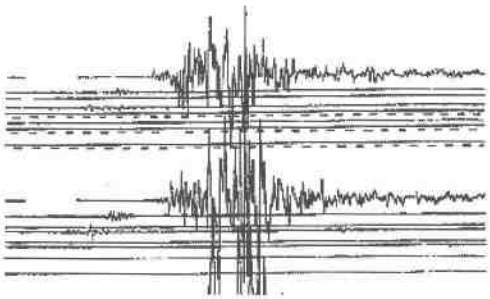


图 2-1　地震仪上记录的地震波

6.3×10^4 焦），那么震级每增大 1 级，w 就增大到 $\sqrt{1\ 000}$倍即约 31.6 倍。这样，我们就可以由某次地震的震级 L 来计算它的 $w=(\sqrt{1\ 000})^{L-0}w_0$。例如，8.0 级地震的震级的 $w=(\sqrt{1\ 000})^{8-0}w_0=10^{12}w_0$，即 8.0 级地震的 w 是 0 级地震的 w_0 的 1 万亿倍（大约是 6.3×10^{16}焦）。同样，也可以根据两次地震的震级，比较它们的 w 的大小。例如，两次地震的震级分别是 7 级和 5 级，那么它们的 w 之比就是 $(\sqrt{1\ 000})^{7-5}=1\ 000$ 倍。具体实例是，8.8 级（2010 年 2 月 27 日智利地震），和 8.0 级（“5·12”汶川地震）的 w 之比，是 $(\sqrt{1\ 000})^{8.8-8.0}\approx16$ 倍。

震级和总能量近似值（单位：焦），有表 2-1 所示的大致对应关系。

表 2-1

震级	1	2	3	4	5	6	7	8	8.9
总能量	2×10^6	6.3×10^7	2×10^9	6.3×10^{10}	2×10^{12}	6.3×10^{13}	2×10^{15}	6.3×10^{16}	1.4×10^{18}

震级通常为 0～9 级，共 10 级，但理论上没有上限或下限。截至目前，实际检测到的最大陆地地震的震级为 8.9 级（一说后来修订为 9.5 级）——1960 年 5 月 21 日的智利大地震；而检测到的最大海底地震的震级为 9.0 级——引发 2004 年 12 月 26 日印度洋和 2011 年 3 月 11 日日本东北部近海大海啸的地震。随着仪器精度的提高，现代精密地震仪经常记录到震级为负数的地震——例如振幅为 0.1 微米的地震。此时，震级为 lg（0.1 微米/1 微米）级 = −1级。目前能记录到的最微弱地震是 −3 级。

2.4.2　地震的烈度

1. 地震的烈度

描述地震的另一个物理量是地震的烈度——在地震波及的范围内某个地点地面振动的激烈程度或地面受到影响的程度，简称烈度。烈度通常分为Ⅰ～Ⅻ（或 1～12）共 12 度，有上限和下限。

显然，地震的震级和地震的烈度是两个完全不同的描述地震的物理量。对于某一次地震，震级只有一个，反映出释放总能量的大小——与观测者的主观感觉无关；而对某一次地震，不同地点的烈度不一定相同而可以有无穷多个，反映出这个地点受这次地震影响的程度。正因为震级和烈度是两码事，所以能轻易解释震级大而死亡人数少、财产损失小等现象。

但遗憾的是，在报道“5·12”汶川大地震时，许多媒体没有把震级和烈度的区别搞清楚。其中主要的问题是，把烈度误说为震级，即把多少度说成多少级。例如，说“某房屋能抗7级地震”。正确的说法是：“某房屋能抗Ⅶ度（或7度）地震”——房屋抗震只能说抗多少度，不能说抗多少级。此外，把地震的烈度解释为（例如房屋）“受到破坏的程度”也是不妥的——受到破坏的程度不但取决于烈度，还取决于地质结构和地面物体（例如房屋）的坚固程度等因素。

2. 震中烈度

为了把地震震级和它对地震中心一带地面受影响的程度联系起来，科学家们使用了震中烈度这个概念。震中烈度是指地震中心一带地面的烈度。举例来说，8.0级的“5·12”汶川地震的最大震中烈度是Ⅺ度（11度）——接近了Ⅻ度（12度）的上限。

震中烈度和震源深度在10～30千米范围内的震级，有表2-2所示的大致关系。

表2-2

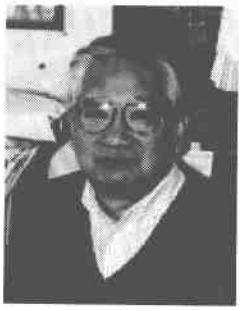
震级	2	3	4	5	6	7	8	8.5～8.9
震中烈度	1～2	3	4～5	6～7	7～8	9～10	11	12

2.4.3 里氏震级的改进

用里氏震级度量地震也不是完美无缺的。

里氏震级的主要缺陷是，它与震源的物理特性没有直接的联系，并

且由于“地震强度频谱比例定律”的限制，在 8.3 ~ 8.5 级时会产生饱和效应，使得一些强度明显不同的地震在计算后得出一样的里氏震级。于是，到了 21 世纪初，地震学者普遍转而采用更能直接反映地震过程物理实质的矩震级。



金森博雄

在 1977 年首先提出矩震级的，也是一位加州理工学院的地震学家——日本金森博雄。不过，目前在“民间”还没有广泛采用矩震级。

经测算，“5 · 12”汶川地震的矩震级是 8.3 级。

2.5　科学家笔下的曲线——实用的对数图

在 1636 年和 1637 年，两位法国数学家费马和笛卡儿，分别从不同的途径发明了解析几何。数形统一的解析几何，不但是一门新的学科，也是一种变换 - 求解 - 反演的方法，给我们用“数”来研究“形”或者用“形”来研究“数”提供了极大的方便。恩格斯给了它是“数学的转折点”的高度评价。

费马

笛卡儿

但是，常规的笛卡儿的直角坐标系，通常难以表示一些特殊的图像。例如，在电子学中，要描绘三极管的放大倍数 β 随它的工作频率 f 的变化曲线时，通常选 β 为纵轴、f 为横轴。但是，此时如果要同时明

显地表示出低f和高f时β的变化详细情况，图像就会在水平方向上拉得很长而实际上根本无法画出。此外，图像还往往是很不规则的曲线。

波特

当然，有人会出主意说，把的横轴f的单位选得大一些，不就行了吗。可是，此时又要面临另一个尴尬：低f时β的变化情况非常不明显，以至几乎看不出这种变化。

但是，如果采用频率的对数尺度$\lg f$作横轴，β（或$\lg\beta$）作纵轴，就不会有这种尴尬了。

这种能避免以上缺点而应用广泛的“对数图”，叫“波特图”或“波特曲线”——由20世纪30年代在贝尔实验室工作的美国发明家、工程师亨德利克·韦德·波特首先发明（图2-2）。

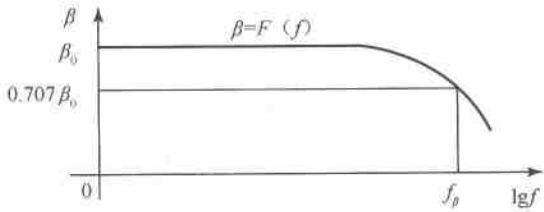


图2-2　波特图

对数图可以分为两类。一类是只有一个轴用对数尺度，它被称为“半对数图”。另一类是两个轴都用对数尺度，它被称为“复对数图”。

看来，有了对数，科学家们就难不倒了。

第3章　奇趣就在对数中
——从2>3到3个2

真正的美包含在“生活就是快乐”的思想中……

——日本宗教家、作家池田大作

对数的发明，不但让数学家们长上了翅膀，“延长了”他们的科学寿命，而且还给我们带来了许多乐趣。

3.1　2>3——欧拉时代的人“自摆乌龙”

“证明”2>3，是对数的一个“喜剧”。

“喜剧”的“揭幕”平淡无奇：1/4>1/8。

接下来的“剧情”也很平常：$(1/2)^2>(1/2)^3$。

由于较大的数的对数也较大，所以把这个式子两边取常用对数之后，就有

$$\lg(1/2)^2>\lg(1/2)^3$$

或

$$2\lg(1/2)>3\lg(1/2)$$

把它的两边约去lg（1/2），就得到2>3。当然，这个“落幕”明显是错误的——“喜剧”变成了“悲剧”。

那么，“喜剧”是怎样变成了“悲剧”的呢？

欧拉时代的一些人说，由于$(-x)^2=x^2$，当$x\neq0$时，$\lg(-x)^2$和$\lg x^2$都有意义，所以$\lg(-x)^2=\lg x^2$。又由对数公式$\lg N^n=n\lg N$可知，

$\lg(-x)^2=\lg x^2$ 可变形为 $2\lg(-x)=2\lg x$，从而有 $\lg(-x)=\lg x$。于是踢进“乌龙球”：$-x=x$。欧拉问，他们错在哪里？

那么，$\lg(-x)=\lg x$ 这个“数学怪物”是怎么得到的呢？

其实，“犯规”就在 $\lg(-x)^2=\lg x^2$ 变为 $2\lg(-x)=2\lg x$ 这一步上。

事实上，$\lg(-x)^2=\lg x^2$ 应变为 $2\lg|-x|=2\lg|x|$。因为我们知道，不管 x 为正数或负数，$-x$ 和 x 总有一个是负数，从而使 $\lg(-x)$ 和 $\lg x$ 总有一个是负数而“没有意义”——真数 N 必须大于0。

所以，我们在使用对数运算法则公式 $\lg N^n=n\lg N$ 的时候必须注意，当 n 是偶数，又不能确定 N 的正负时，必须写成 $\lg N^n=n\lg|N|$。以防止 $\lg(-x)=\lg x$ 而得到 $-x=x$ 这一类的悖谬。

这里出现的这类悖谬，有时被我们归入悖论之中——虽然这类悖谬并不是严格意义上的悖论。然而，悖论并不一定是“毒草”，正如美国作家法雷塔在1983年发表的 The Paradoxicon 中所说：“一个悖论是站在真理之上而引起人们注意的真理。”因为它引起我们的深刻思考而使自身获益。

“头顶上套袜子——面子上过不去。”用这句中国的歇后语来描绘欧拉时代那些人“不如”当今中学生的“悲剧”，并没有太多的不妥。但是，我们不但应该看到两个相隔近300年的时代没有可比性，而且应领悟到科学发展和科学贤哲们的确走过了许多“山重水复疑无路，烟消日出不见人”的曲折道路！

3.2 对数的奇迹——你也能当速算大师

3.2.1 神奇的速算大师

1. 100万的诱惑

一场速算大师夸下海口的表演，明天就要举行了。

这位速算大师事前贴出的广告说，他能当着大家的面，在几秒钟之内把一个几十位数的几十次方根迅速算出来。当然，涉及的全体数都是整数。

如果表演失败，他会给出题的人 100 万元人民币！

表演前的头一天晚上，许多数学爱好者家中的灯火通明。当然，不单是为了这 100 万，更重要的是，要证明不可能发生这样的“奇迹”。

你，也是其中一员。

或许，你“充分准备”了几个小时——如果没有函数型这类能计算开高次方的计算器或电脑的话。或许，你只“充分准备”了几分钟——如果有这类计算设备的话。结果，你准备的题目是“计算一个 35 位整数的 31 次方根”。就用它去拿 100 万——你默念着进入梦乡……

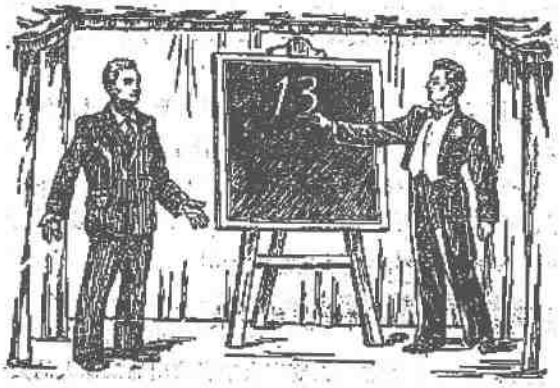
2. 100 万泡汤

第二天，表演准时进行。“请速算大师把这个 35 位数的 31 次方根心算出来！你写，我念。”自信的你第一个出题，以挑战的口吻大声说。

“13。”还没有等你把数字念完，速算大师就给出了答案！

这时，全场惊讶不已，议论纷纷——还不知道什么数，居然就能得到答案，而且还快如迅雷闪电！

惊讶的你，呆呆地站在那里……



没等你念完，速算大师就给出了答案

3. 速算大师，你自己做主

其实，得到这个答案没有一点玄机——只有 13 的 31 次方是 35 位

数。比13小的数的31次方少于35位数，比13大的数的31次方多于35位数。

现在的问题是，速算大师怎么会事前知道这一点呢——他并不知道题目啊！

原来，速算大师的“法宝”就是对数。

前面的一二十个自然数的两位常用对数，速算大师是早已默默地牢记心中。

可能有人会说，记这一二十个自然数的两位常用对数太困难了。其实，非常简单。因为我们记忆它们只需记忆几个数的两位常用对数就行了。

为什么呢，因为其中合数的常用对数等于它的素数因数的常用对数的和。因此，如果只记前10个自然数的常用对数，只要牢记2，3，7的两位常用对数分别是0.30，0.48，0.85就行了，其他7个自然数的常用对数，很容易很快推算出来。例如，5的常用对数就是10的对数1.00减去2的常用对数0.30——答案是0.70。

当然，如果你还要记11～20的常用对数，就还要记11，13，17，19这4个数的常用对数。

前20个（只写出“主要的”15个）自然数的两位常用对数，列于表3-1，其中只有7组加粗斜体数的对数是要“死记硬背”的。正如前面所说，这前20个自然数的两位常用对数，速算大师是倒背如流的。

表3-1

2	*3*	6	*7*	8	9	*11*	12	*13*	14	15	16	*17*	18	*19*
0.30	***0.48***	0.78	***0.85***	0.90	0.95	***1.04***	1.08	***1.11***	1.15	1.18	1.20	***1.23***	1.26	***1.28***

好了，现在回到前面速算大师不知道35位数的具体数字，为什么就能很快得到答案的问题上来。请看下面这个问题：lg(35位数开31次方)=34.…/31=？

由于34/31=1.09…>1.09，所以1.09是34.…/31的下限。

又由于35/31 =1.12… <1.13，所以1.13是34.…/31的上限。

这样，就知道1.09 <34.…/31 <1.13。

显然，表3-1中满足这个条件的只有1.11，它是13的常用对数——这就是13这个答案的来源。

当然，要当这种速算大师，还得有心算两位数除法的基本功。

说起速算大师，也许我们会觉得很神奇，而且离自己相当遥远。其实，在掌握了一定的方法之后，我们自己就是速算大师。

据说，在1844年仅仅花了两个月时间就算出201位π值的德国数学家达什，“也许是前所未有的心算家”——例如他能在52分钟内心算出一个100位数的平方根。那么，作为速算大师的我们和他相比也“毫不逊色”。

不过，似乎还有比达什更牛的。1981年，在大厅内众目睽睽的人群面前，印度37岁的妇女沙贡塔娜与一台先进的电子计算机竞赛。一位教授走上讲台，在黑板上写下了201位的大数916…711，要她求它的23次方根。仅仅过了50秒，她就向观众报出了正确的答案546 372 891——此时计算机正在“编程”。此事引起的“世界轰动”，据说曾让中国数学家华罗庚在德国的《数学情报》杂志上，撰写了文章《天才与实践》，赞扬这位“数学魔术师”，提出了自己用计算器的一种巧妙算法。

下面这个题供你练习：把一个20位数开60次方。

答案是2。

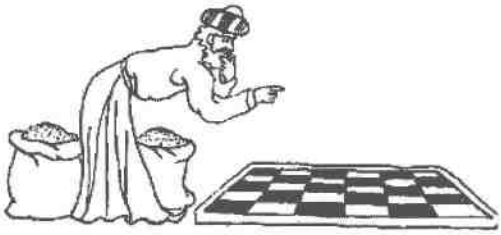
3.2.2　棋盘上的麦粒和梵塔中的金盘

1. 国际象棋盘上的麦粒

那么，3.2.1小节提到的那个20位数是多少呢？

顺便告诉你，那个20位数就是那个“国际象棋格子里摆麦粒”故事里的麦粒数加1，即2^{64} =18 446 744 073 709 551 616。

那个著名的故事说，古印度发明国际象棋的数学家、宰相达依尔，要喜爱国际象棋的国王舍罕奖赏给他麦粒——从第一个棋盘格子奖1粒



第一个格子奖1粒，其余63个依次加倍

开始，其余63个格子依次加倍。可以算出，奖赏的麦粒总数应是 $1+2^1+2^2+\cdots+2^{63}=2^{64}-1$。

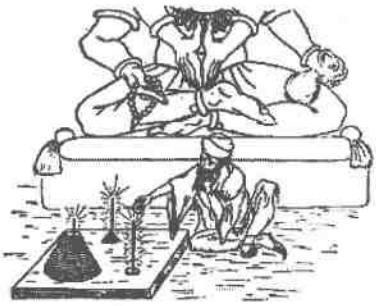
2. 梵塔针中穿金盘

那个20位数也和下面的古印度梵塔问题有关。

流传在中东地区的故事说，古印度北部恒河河畔梵城印度教湿婆派教徒的圣地（也是婆罗门教和印度教的文化中心）——“世界中心”贝拿勒斯圣庙里，供奉着印度神主教梵天在创造世界的时候，制造的三根黄铜底座的宝石塔针。每根宝石塔针高约50厘米，有蜜蜂的身体那么粗，其中一根穿上了64张上小下大的有孔金盘。梵天要求值班的僧侣按“一次移动1张金盘，不准放在其他地方，不准上大下小放置”的规则，把这些金盘在三根针上搬来搬去，最终搬到另一根塔针上去——此时“世界末日”就到了。

梵天

这个著名的梵塔问题，又称为汉诺塔问题或河内塔问题。搬的次数加1也是那个20位数——如果1秒钟搬1张金盘，要用 $2^{64}-1$ 秒 = 18 446 744 073 709 551 615秒，约合



值班僧侣用约5 849亿年搬金盘

5 849 亿年。

这个趣味故事的另一种版本说，针高 2 米，每张金盘厚 3 厘米，搬完后喜马拉雅山就会变成一座金山。

据说，酷爱数学的英国历史学家、数学家鲍尔，首先把这个问题介绍给了数学家们。法国数学家鲁卡斯曾正确地解答了这个问题。

3.3　狄拉克也会疏忽——3 个 2 的奇趣

1933 年，有两位科学家站在诺贝尔物理学奖的领奖台上，其一就是大名鼎鼎的英国物理学家、数学家狄拉克。他之所以有建立“狄拉克方程”等对量子物理学的卓越贡献，与他自幼酷爱数学而且才华横溢有关。

狄拉克

一次，狄拉克去哥廷根大学访问，正逢校内许多出类拔萃的师生在沉湎于一道题目：只用 4 个 2 及所有可利用的“数学符号”，诸如加、减、乘、除、乘方、开方等，将 1 ~ 100 之间的所有自然数表示出来——这里将这类问题称为“组数”问题。参加比赛的人给出了诸如 $1=\frac{2}{2}\times\frac{2}{2}$，$2=\frac{2}{2}+\frac{2}{2}$，$3=2^2-\frac{2}{2}$，$4=2+\frac{2}{2}\times 2$，$5=2^2+\frac{2}{2}$，$6=2\times 2^2-2$ 等答案，但没人能表示出 1 ~ 100 之间的所有的自然数。

狄拉克经过一番思索后，很快给出了只用 3 个 2 表示任何自然数 N 的通解公式：

$$N=-\log_2\log_2\underbrace{\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{2}}}}_{N\text{个根号}}。$$

当然，狄拉克解的已经不是“用 4 个 2……”那道题了。但是，也可以看出，狄拉克的巧妙方法，的确放射出智能的光芒，因此被许多报、刊、书所传扬就不足为奇了。

然而，我们要问地下的狄拉克先生，你当年所说的“数学符号”的含义是什么？狄拉克当然会回答：“就是除了给出的阿拉伯数字外的任何数学符号——当然不能用没有给出的阿拉伯数字。”

我们再问：可不可以用隐含阿拉伯数字的符号呢？他略加思索后会回答：“可以。”他不能回答“不可以”，因为他已使用了隐含有另一个“2”的“$\sqrt{2}$”（“$\sqrt[2]{2}$”的简写）了。

好了，既然“可以”，那我们会对狄拉克说，您的解答并不出色，我们的武器——π、e、小数点、对数、三角函数、阶乘、排列、组合……多得很。

例如，我们可以不用任何阿拉伯数字，“组合”出1（$=-\cos\pi=\ln e$），0（$=\tan\pi=-\tan\pi=\sin\pi=-\sin\pi$）。

小数点也很有用。例如，如“用2，4，5及数学符号组成9”的一种解是$4.5\times2=9$。

阶乘（!）可把2以上的数“组合”到足够大。例如，$3!=6$，$(3!)!=720$。

排列、组合可将一个或两个数“组合”成新的数。例如，给出“3”，可得到$6=P_3$（这里的P是全排列符号，即$P_3=A_3^3$）；如给出“2，4”，可得$12=A_4^2$，$6=C_4^2$等。

以上不过是一些示例，实际上数学符号很多。有了它们，就可以用3个2（或4个2）组成任何自然数。例如，“用3个2组成485”这个题的答案之一是：用1个“$-\cos\pi$”加上22^2，就是485。

这时，你会看到，用这种规则“组数”是没有任何意义的。那么，问题出在哪里呢？出在我们从狄拉克到今的疏忽。用了隐含另一个2的“$\sqrt{2}$”，即承认可用隐含阿拉伯数字2或其他数字（如π和e）的符号。

或许狄拉克会说，我们的规则就是允许用开平方符号（“$\sqrt{\ }$”）的。那我们说，这个规则缺乏科学性：因为开平方仅仅是开方中的一种，只有开方才能与加、减、乘、除、乘方等运算并列，而开平方是不能与另外几种运算相提并论的。

对于我们的“高谈阔论”，如果狄拉克先生地下有知，当欣然露出笑颜。

3.4　对数表引出的祸殃——海难、蜜蜂和数学家

一只船在大海航行时遇难，而这次海难的罪魁祸首，是一张距今两三百年以前编制的对数表——海难后偶然发现，用这张有错的对数表来计算经度时发生了错误。《知识就是力量》杂志在1956年第7期第37页这样写道。

那么，为什么这么长的时间都没有发现对数表的错误呢？这里还有一段有趣的故事呢！

出生在意大利的巴黎天文学家马拉尔迪，在他于1712年出版的《蜜蜂的观察》一书中指出，蜂巢底部菱形的钝角应是109°28′，锐角应是70°32′——这样最省蜂蜡。大致同时，法国科学家列奥缪尔，则把蜂巢省蜂蜡的计算推给了瑞士数学家柯尼希。

然而，柯尼希的计算却使人迷惑不解：109°26′，锐角应是70°34′——与马拉尔迪的说法相差约2′。

直到1743年，苏格兰数学家马克劳林，才在他的论文《关于蜂巢的底部》中解开了这差2′的奥秘：应该是109°28′16″和70°31′44″——柯尼希算错了。

那么，第一流的数学家柯尼希为什么会出算错呢？蒙“冤”的他和当时的数学家都不明白。直到前述海难之后，对数表的错才还给他“清白”——原来，他计算时用的就是这种有错的对数表……

第 4 章　对数的华丽蜕变——“常用”和“自然”

噢，上帝，为什么二加二等于四？

——英国诗人亚历山大·蒲柏

4.1　以 2 为底的对数——神通广大应用广泛

4.1.1　以 2 为底的对数与 2 进制

对于二进制、电子计算机……这些名词，现代人一点也不陌生。那么，它们和对数、自然对数，又有什么关系呢？

1. 以 2 为底的对数与坐标图

我们知道，对数的底是可以在 1 以外的正数中任意选取的，例如选 2 为底。

选 2 为底的著名例子，除了我们在 2.1 节中说到的音乐中的实例外，就是达维德·哈罗德·贝利等 4 位数学家在《圆周率探索》（中译文载《数学译林》1997 年第 7 期第 205 ~ 215 页）中，用 16 进制的位数作为图的横坐标的时候，就要用 4 来乘以这些 16 进制数字，才能得到等价的 2 进制数字。这里的 4，就是以 2 为底的 16 的对数——$4 = \log_2 16$。

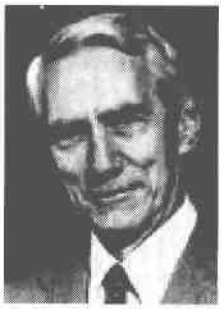
2. 以 2 为底的对数与数字的位数

以 2 为底的对数，还可以用来确定与某十进制数字 n 对应的二进制数字 m 的位数 $M_m = [\log_2 n] + 1$ 位（式子中的“[ ]”，是“取整”）。举例来说，十进制数字 2 的二进制数字 10 的位数是 $M_{10'} = [\log_2 2] + 1$ 位，

即 2 位。又如，十进制数字 10 的二进制数字 1010 的位数是 $M_{1010'} = [\log_2 10] + 1$ 位，即 4 位。

3. 二进制数字与比特

“二进制数字”的英语是“binarydigit”，“比特”（bit 或 binit）就是 binarydigit 的缩写 binit 以 bit 的发音的音译。比特是信息量的度量单位——每一个“0”或“1”就包含有 1 比特的信息。1938 年，创立经典信息论的美国数学家香农首先在论文“继电器和开关电路的符号分析”中创建了比特这个名词。



香农

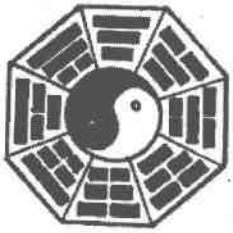
4. 二进制、e 和计算机

有趣和鲜为人知的是，采用神通广大、应用广泛二进制的一个原因是和 e 有关。

可以证明，在计算技术和编码理论中，用 r 进制表示十进制的数，取 $r = e = 2.718\cdots$，效率最高。而与 e 最接近的整数是 2 和 3，再考虑到“机器的结构”在早期机械计算机和近现代电子计算机上自然就采用二进制了。这里所说的机器的结构，对机械计算机而言，指用“0”和“1”分别代表“有孔”、“无孔”；对电子计算机而言，指用“0”和“1”分别代表电路的“开”和“关”。

4.1.2　从哈里奥特到莱布尼茨

二进制是德国数学家莱布尼茨首先在 1672 ~ 1676 年之间在巴黎时明确提出来的。而他在 1679 年 3 月 15 日写出的论文《二进制算数》，对二进制已有充分的认识。

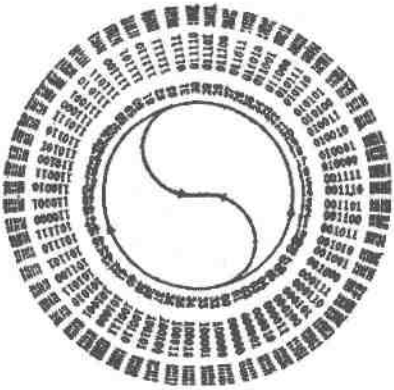


太极八卦图

有人说，莱布尼茨是受到中国古代圣典著作《易经》中伏羲氏的八卦的启发，因为《易经》中说：“易有太极，是生两仪，两仪生四象，四象生八卦。”

但是，这种说法是不符合史实的。因为从

时间来看，莱布尼茨在1697年12月就写信给当时在中国的法国传教士白晋即白进，说到了自己的二进制发明。白晋收到信后，才把二进制和《易经》的六爻对照，发现两者是一致的。



邵雍六十四卦圆图的二进制数译图

1701年，莱布尼茨又写信给白晋，寄去了自己的二进制数表。同年11月，白晋才把北宋哲学家邵雍的伏羲六十四卦次序图和伏羲六十四方位图这两个图寄给他。莱布尼茨对白晋提供的材料异常欣慰，发现古老的中国易图可以解释成0~63的二进制数表。他因为从二进制数学理解了六十四卦次序图即邵雍六十四圆图，发现两者“不谋而合”而欣喜若狂，高兴地说：“几千年来不能很好理解的奥秘被我揭开了，应该让我加入中国国籍吧！”

接着，莱布尼茨把他在1701年就给巴黎科学院的有关二进制的论文（但要求不发表）进行了修改，写出《关于仅用0和1两个记号的二进制算术的说明，并附其应用及据此解释中国伏羲图的探讨》的论文。1703年，他再把这篇论文送到巴黎科学院，要求公开发表。这样，二进制就公之于众了。

象征二进制的纪念章正面

象征二进制的纪念章背面

对自己的发明，莱布尼茨还非常得意，就放出首开先河的豪言：“从虚无创造万有，用一就够了。”他还并制作了一个象征二进制的纪念章，作为新年礼品献给他的保护人鲁道夫·奥古斯都公爵。此外，他还希望二进制能证明圆周率 π 的超越性。

不过，莱布尼茨却不必过于得意，因为在他之前已有几位“先行者”。英国数学家哈里奥特就是其一，在他没有发表的手稿中就有二进制的记数法，只不过当时鲜为人知而已。

哈里奥特

当然，莱布尼茨也没有看到前人的二进制成果，而是独立作出了这个发明，还自认为揭开了东方几千年前神秘图形的玄机而欣喜若狂。

当然，我们经常接触到的，不是以 2 为底的对数，而是常用对数和自然对数。为什么人们如此青睐这两种对数呢？下面我们就要给出答案。

4.2　常用对数——“爱你没商量”

4.2.1　为什么选择常用对数

1. 常用对数的起源

我们已经知道，纳皮尔发明对数以后，他和布里格斯见了面。

在他们讨论如何改进对数的时候，纳皮尔建议这样来选择底：使 1 的对数为 0，使 10 的对数为 1。这样，就会使所有大于 1 的数的对数都是正数。显然，这就是常用对数。布里格斯同意了这个方案。

这个“同意”，不是偶然的。1615 年，布里格斯在格雷沙姆学院所作的几次讲演中，就曾提醒人们注意，如果像纳皮尔的对数那样，仍然把 0 作为“全正弦”——sin90°的对数，那就会更加方便。而全正弦的 1/10（即 arcsin0.1）或 5°44′21″的对数则是“10 000 000”（实际是

1.000 000 0)。布里格斯说，根据他在格雷沙姆学院讲课的经验，对数的底数选10较好，因为这样不但能和以其他数为底的对数那样，使1的对数为0，而且还会使10的对数为1。这样，更便于计算。

这样，他们很快就意识到，应该用10作对数的底，这就是常用对数——布里格斯对数的产生。于是，他们很快就开始编制以10为底的、更加有用的常用对数表。

不过，虽然布里格斯采用了常用对数制度——取 $\log_{10}1=0$ 和 $\log_{10}10=1$，但他始终没有具体说明他是在什么时候或者为什么采用常用对数的。

但是，弗拉格却在《$1\sim10^4$ 的正弦、正切和正割值以及对数值表》中，却清楚地提到了为什么要采用它。他写道：

“为了更多的方便，取1的对数是0，取10的对数是1，100的对数是2，以此类推。”如表4-1所示。

表4-1

真数	对数
1	0.000 000
10	1.000 000
100	2.000 000
1000	3.000 000
10 000	4.000 000

这里出现有‘首数’的字样。请你要注意，对数的第一位数字称为‘首数’，它总是比取对数的那个整数数字的个数少1。例如，由于 $\log_{10}3\ 567\ 894$ 是6.552 411 8，所以可推得

$$\log_{10}3.567\ 894=0.\ 552\ 411\ 8,$$

$$\log_{10}35.678\ 94=1.\ 552\ 411\ 8,$$

$$\log_{10}356.789\ 4=2.\ 552\ 411\ 8,$$

等等。”

由上可见，常用对数的发明，应主要归功于布里格斯和弗拉格。

2. 常用对数“更加有用”

那为什么常用对数和常用对数表“更加有用”呢？

这是因为在数值计算的时候，以 10 为底的对数表具有很大的优越性。这种优越性是因为在大多数时候，我们使用的数系是以 10 为基数的——10 进制的。

我们知道，10 的正整数幂的常用对数，等于真数里 0 的个数——例如 lg1 000 = 3。10 的负整数幂的常用对数，是一个负数，它的绝对值等于小数里 0 的个数（包括整数单位的一个 0）——例如 lg0.001 = −3。

根据这两个常用对数的性质，我们就能很快实现这类真数和对数之间的互求。而以其他任何数为底数，是不可能实现这种互求的。

我们还知道，正数的常用对数的首数，是真数的整数部分的位数减去 1 的一个整数。于是，我们就能很快由真数确定来首数，例如 97 254 有 5 位，那它的首数必然是 4。或者，也能很快由首数确定来真数的位数，例如首数是 0，那它的真数的位数必然是 1。类似，正纯小数的常用对数的首数，是绝对值等于真数里第一个有效数字前面的 0 的个数（包括整数单位的一个 0）的一个负整数。

于是，我们就能很快实现这类真数的位数和首数之间的互求。而以其他数为底数是不可能实现这种互求的。

显然，由于常用对数的上述性质，就可以用它迅速地实现数字的乘、除、乘方、开方等运算。也就是说，以 10 为底的常用对数，是基于人类实践的需要而必然发展起来的。

由于常用对数的上述性质，为节约篇幅，就可以不印常用对数表中的首数，而其他以任何数为底的对数表，则不可能这样做。

4.2.2　对数的符号

在这里，我们要清理一下对数的符号。

现在，通常用 $\log_a$ 表示对数以 a 为底；而用 lg 或 log 表示以 10 为底的常用对数，即 lg 或 log 是 $\log_{10}$ 的简写。ln 则表示以 e（≈2.718…）为底的自然对数，即 ln 是 $\log_e$ 的简写。但是，有时——特别是在数论中，却用 log 表示自然对数，用 lg 表示常用对数。本书在没有特别声明的时候，一律用 ln 表示自然对数，用 lg 表示常用对数。

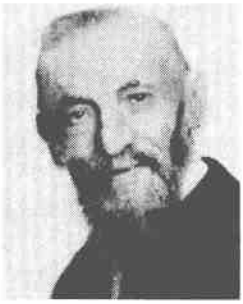
此外，由于复数（z）的自然对数值有无穷多个，所以有时为了区别起见，常常把 ln$z$ 写成 Lnz。这样，就有 $\mathrm{Ln}z = \ln|z| + \mathrm{i}(\theta + 2k\pi)$（$k \in \mathbf{Z}$——整数集）。例如，1 的模是 1，辐角的主值是 0。因此，$\mathrm{Ln}1 = \ln 1 + \mathrm{i}(0 + 2k\pi) = 2\,\mathrm{i}k\pi = \cdots$，$-4\mathrm{i}\pi$，$-2\mathrm{i}\pi$，0，$2\mathrm{i}\pi$，$4\mathrm{i}\pi$，…。

奥特雷德

Log 是对数函数的主值的符号，但是，它在历史上却是 1624 年开普勒简化纳皮尔的 logarithm（“对数”）用的符号——开普勒用 $\mathrm{Log}_a N$ 表示 N 的对数。英国数学家奥特雷德在 1647 年也是这样用的。

意大利数学家卡瓦列里则第一次用 log 来表示对数。就这样，开普勒的 $\mathrm{Log}_a N$ 演化成了卡瓦列里的 $\log_a N$。到了 1821 年，法国数学家柯西为了区分自然对数和其他对数，就别出心裁地用小写字母“l”表示自然对数，用大写字母“L”表示任意（大于 1）的底的对数。

1893 年，意大利数学家佩亚诺用“log$x$”表示以 e 为底的对数，用“Log$x$”表示以 10 为底的对数。同年，斯特林厄姆用“$b$log”表示以 b 为底的对数，而把自然对数记为“ln”，把以复数模 k 为底的对数记作“$\log_k$”。



佩亚诺

到了 1902 年，德国数学家斯托尔茨等，则用“$a$log. b”表示“以 a 为底的 b 的对数”。

可以看出，对数的符号在历史上也曾多次变换。

4.2.3　酸碱度与常用对数

常用对数并不只是“好看”，而且还“中用”。除了我们在第二章中多次谈到它的实际应用以外，下面再举出一个常见的、在化学中的“酸碱度”——pH 中的应用。

用 M 表示溶液的“摩尔浓度”这个物理量；同时，M 也代表摩尔浓度的单位——摩尔/升（mol/L），即 1M = 1mol/L。这样，我们就可以得到诸如 $[H^+] = 10^{-6}M$、$[OH^-] = 10^{-3}M$ 等结果。这里，$[H^+]$ 和 $[OH^-]$ 分别表示 H^+ 和 OH^- 的摩尔浓度。

显然，这样表示不但写起来麻烦，而且计算起来也很不方便，于是丹麦生物化学家索伦森在 1909 年就首先采用它的负常用对数——pH 来表示，即 $pH = -\lg[H^+]$。这里的 p 来自德语 Potenz（means potency，power，意思是浓度、力量），H（hydrogen ion）代表氢离子（H^+）；有时 pH 也被写为拉丁文 Pondus hydrogenii（Pondus 为压强、压力，hydrogenii 为氢）。

索伦森

这样，$[H^+] = 10^{-6}M$ 的溶液的 $pH = -\lg 10^{-6} = 6$，因此我们说“这种溶液的 pH 是 6”。

同理，$[OH^-] = 10^{-3}M$ 的溶液的 $[H^+] = 10^{-14}/10^{-3} = 10^{-11}$，它的 $pH = -\lg 10^{-11} = 11$，因此我们说“这种溶液的 pH 是 11”。这里的 $10^{-14}M$，是纯水的“离子积”，即 $[H^+] \times [OH^-] = 10^{-7} \times 10^{-7}\ M$。

纯水的 pH = 7，此时溶液呈中性；而溶液的 pH < 7 时呈酸性，pH > 7 时呈碱性。人体内体液的酸碱度应在 7.35 到 7.45 之间（即呈弱碱性），以保持正常的生理功能和物质代谢。

看来，包括化学家在内的科学家们钟情常用对数，的确是“爱你没商量”。

索伦森开始是在哥本哈根大学学习医学，但很快转移到化学而获得

博士学位。他在研究氨基酸、蛋白质和酶的时候，由于发现氢离子浓度在其中发挥了关键作用，于是就发明了一种简单方式——pH 来表达它。

4.3 自然对数——不只是大自然的选择

数学家们为什么要用 e 作为对数的底？以 e 为底的对数为什么叫自然对数？这是两个有趣的问题。

4.3.1 为什么要用 e 作对数的底

1. 科学活动中的发现

我们知道，自然界的一切事物都有一定的因果关系。数学和其他自然学科一样，它的发生、发展和成熟，归根结底决定于人类各种活动的需要。

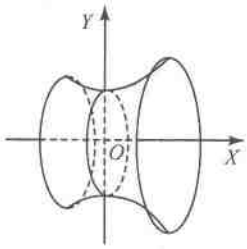


图 4-1 双曲线

在 17 世纪中叶，数学家们在科学活动中，发现了双曲线（图 4-1）下的面积和自然对数之间竟有如此奇妙的关系 $\int_0^x \frac{dx}{x} = \ln|x|$ 之后，人们就逐渐了解到，很多重要的函数、重要的极限、微分和积分……都与自然对数有密切的关系。换句话说，用 e 作对数的底，不是数学家们对 e 有特别的偏爱，而是一些“对数运算”的必然结果。正因为如此，自然对数（函数）也叫双曲对数（函数）。

2. e 作对数的底是“自然”的

下面，我们来说明这一点——用对数函数 $y = \log_a x$（这里 a 是不等于 1 的正数）求导数来进行。根据求导数的一般方法，有

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \log_a \frac{x + \Delta x}{x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \times \frac{1}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^x$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \log_a \left(1 + \frac{1}{x/\Delta x}\right)^{x/\Delta x}$$

$$= \frac{1}{x} \log_a \lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{1}{x/\Delta x}\right)^{x/\Delta x}.$$

当 $\Delta x \to 0$ 时，$\frac{x}{\Delta x} \to \infty$，由于 $\lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{1}{x/\Delta x}\right)^{x/\Delta x} = \mathrm{e}$，就有 $y' = \frac{1}{x} \log_a \mathrm{e}$。

用换底公式的一种形式 $\log_a \mathrm{e} = \frac{\log_{\mathrm{e}} \mathrm{e}}{\log_{\mathrm{e}} a}$（更一般的形式是 $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$），把 $y' = \frac{1}{x} \log_a \mathrm{e}$ 中的 $\log_a \mathrm{e}$ 变成 $\frac{1}{\ln a}$，就得到 $y' = \frac{1}{x \ln a}$。

显然，如果不用 e 作底，而是以另一个数（如 b）作底的话，就会出现 $y' = \frac{1}{x} \times \frac{\log_b \mathrm{e}}{\log_b a}$ 这种比 $y' = \frac{1}{x \ln a}$ 更复杂的形式——这是数学家们所不愿看到的。

上面，我们从求一个一般对数函数 $y = \log_a x$（这里 a 是不等于 1 的正数）的导数出发，发现只有用 e 为底，结果才会简洁；而用其他数作底，形式就会复杂些。由此可以看出，选择自然对数（e 作底）是“自然”的，数学家们不过是“发现者”、“执行人”罢了。

这就是数学家们为什么要用 e 作对数的底的原因——回答了前面那两个问题中的第一个。

我们在 1.8.2 小节说过，在 1616 年和 1619 年，S. 赖特和约翰·斯皮德尔都分别发表了“第一个自然对数表”，但此时用 e 作底编对数表，是“自然”的，而不是“自觉”的。

为什么是“自然”而不是“自觉”的呢？这是为了加快制表的速度。那为什么用 e 作底可以加快制表的速度呢？我们将在 4.4.2 小节回答。

英国数学家奥特雷德是自然对数的发明者——当然，正如 4.2.2 小

节所说，他用的符号是“Log”。此后，人们才开始自觉地用 e 作底。也许由于纳皮尔对数的底是 1/e，或者为了纪念他发明了对数，所以不少文献也把自然对数称为“纳皮尔对数”。

4.3.2 以 e 为底的对数为什么叫自然对数

1. 以 e 为底的对数叫自然对数

下面，我们来回答前面那两个问题中的第二个。

如果设前面的 $y=\log_a x$ 中的 $a=\mathrm{e}$，$y=\log_a x$ 就变为 $y=\log_{\mathrm{e}} x$。那很显然 $y'=\frac{1}{x\ln a}=\frac{1}{x}$。这也就是说，如果 $y=\ln x$，就有 $y'=(\ln x)'=\frac{1}{x}$ 的必然结果；而且，只有 $(\ln x)'$ 才是 $\frac{1}{x}$，因为代数函数 x^n 求导不可能得到 $\frac{1}{x}$ 的形式。这就是说，代数函数 x^n 不可能得到微分为 $\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 的形式。当然，也可以把 $y'=\frac{1}{x}$ 写成微分形式 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{x}$。

积分是微分的逆运算，于是有 $\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln|x|+C$（$C$ 是积分常数）。这个式子就意味着，一个分式的分子是分母的微分，这个分式的积分就是分母以 e 为底的对数。也就是说，只要形状是 $\int\frac{f'(x)\mathrm{d}x}{f(x)}=\int\frac{\mathrm{d}f(x)}{f(x)}$，那么 $\int\frac{f'(x)\mathrm{d}x}{f(x)}=\ln|f(x)|+C$——必然以 e 为底。当然，也可以写成一种简单的定积分的形式 $\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln|x|$。

反映自然界的现象有种种函数关系，而要确立变量之间的函数关系，往往又要确立函数的导数或微分的关系式——微分方程。从而通过求解这种微分方程，得出要求的函数关系。如果在求解的微分方程中存在 $\int\frac{f'(x)\mathrm{d}x}{f(x)}$ 的项，那么，积分以后就必然出现以 e 为底的对数。而且，反映自然界的规律的函数关系，如果是以指数形式或者对数形式出现的

话，必定是而且只能是以 e 为底的，而不会有其他正数为底的指数或对数出现——当然，不包括一些不严格的经验公式。

正因为如此，以 e 为底的对数叫自然对数——反映“自然规律”的对数。

总之，取 e 作对数的底，并不是某个或某些数学家的心血来潮，而是微积分学运算的必然结果。又因为反映自然规律的指数形式或者对数形式的函数关系，必定是而且只能以 e 为底，所以选 e 作底的对数叫自然对数。

由此可以看出，选 e 作自然对数的底和实践需要选 10 作常用对数的底，原因有些不同。

2. 不只是大自然的选择

当然，不只是大自然要选择 e 作对数的底，有时科学家们也要有意选择 e 作对数的底。最典型的例子是，在长距离通信（如光纤通信、电力工程、电信网络）中，有时觉得级差的“单位”用贝尔（B）大了些，而用分贝（dB）又小了些，就用“奈培”（Np，neper 的简写）作级差的“单位”。

Np 就是以 e 为底的级差数乘以 1/2，它用纳皮尔（Napier）的姓氏的前两个字母来命名。1Np≈8.686 dB，或者 1dB≈0.115Np。当然，纪念纳皮尔的还有用他的姓氏命名的“实物”：爱丁堡的纳皮尔大学（纳皮尔的出生地梅尔契斯顿堡是这个大学的一部分）。

下面，我们来说明 8.686 和 0.115 的来历。

设两个物理量分别是 A_2 和 A_1，那么 dB 和 Np 的换算因子就是

$$\frac{10\lg\frac{A_2}{A_1}}{\frac{1}{2}\ln\frac{A_2}{A_1}}=\frac{20\lg\frac{A_2}{A_1}}{\frac{1}{2}\ln\frac{A_2}{A_1}}\approx\frac{20\times 0.434\,3\ln\frac{A_2}{A_1}}{\ln\frac{A_2}{A_1}}=8.686。$$

式子中的 $0.434\,3\approx\lg e$。把 Np 换算成 dB，乘以换算因子 $1/8.686\approx 0.115$ 就行了。

当然，Np 现在已经不是中国的法定计量单位了。

4.4 e的又一用武之地——编造对数表

4.4.1 编造对数表的“原始”阶段

有的读者可能会问，为什么历史上像纳皮尔、布里格斯等许多才华横溢、醉心数学的英雄，在编造对数表的时候，都用了许多年的时间，有的还“未捷身先死”而“泪满襟”呢？

原来，当初不但说不上我们现在俯拾皆是的袖珍电子计算器、电子计算机，而且还没有先进的计算方法或公式。这样，他们只能用最原始的手工计算——后来才有机械计算机计算，用初等数学的方法编制这些数据庞大、枯燥无味的对数表。举例来说，一个人用笔算，仅仅求出5的常用对数，就要完成22次开方运算！下面，我们用编制常用对数表的过程加以说明。

以10为底的时候，根据指数与自然数的幂造出来常用对数表，只能给出整数1，10，100，…的对数。那么，对于它们之间的数的常用对数，就应该把它们的几何平均值（即等比数列的项）与常用对数的算术平均值（即等差数列的项）相对应。由此可以推知，为了求出5的14位常用对数，当年布里格斯是从1和10的常用对数出发，进行了如表4-2所表示的运算的。

表4-2

作开方和求算术平均的次数	数 n	数 n 的对数
	$A=1$	$A'=0.000\ 000\ 000\ 000\ 00$
	$B=10$	$B'=1.000\ 000\ 000\ 000\ 00$
1	$C=\sqrt{AB}=3.162\ 277$	$C'=(A'+B')/2=0.500\ 000\ 000\ 000\ 00$
2	$D=\sqrt{BC}=5.623\ 413$	$D'=(B'+C')/2=0.750\ 000\ 000\ 000\ 00$
3	$E=\sqrt{CD}=4.216\ 904$	$E'=(C'+D')/2=0.625\ 000\ 000\ 000\ 00$
…	…	…
22	$X=\sqrt{VW}=5.000\ 000$	$X'=(V'+W')/2=0.698\ 970\ 000\ 000\ 00$

从这个表可以看出，要求得5.000 000 的 14 位常用对数0.698 970 000 000 00，就得用“手工”作开方、加法、除法各 22 次！

布里格斯在他 1624 年的《对数》一书中，详尽地给出了他的方法——和前面的方法本质上一样。这个方法就是，把 10（对数是 1）不断开平方，因而把前一个平方根的对数除以 2，就得到后一个外平方根的对数。例如表 4-3。

表 4-3

真数	对数
10	1
$\sqrt{10}=3.162\ 277$	0.5
$\sqrt[4]{10}=1.778\ 279$	0.25
$\sqrt[8]{10}=1.333\ 521$	0.125
$\sqrt[16]{10}=1.154\ 781$	0.0625
…	…

这个工作的艰巨也是可想而知的：要不断开平方 54 次，并把它们计算到 30 位小数。

写到这里，我们不由得对这些具有远见卓识、能持之以恒的先贤充满由衷的敬意。要知道，这不是一个“短平快”和肯定能产生“经济效益”的工作啊！

不过，这种“原始”的计算方法，仅仅过了半个世纪就开始了改进。

4.4.2　新方法让编造对数表进入“高速公路”

1667 年，苏格兰数学家詹姆斯·格雷戈里，发表了《论圆和双曲线的求积》，把对数的值与位于等边双曲线和它的渐近线之间的面积进行比较，吹响了这种改进的号角。

一年以后的 1668 年，一生中大部分时间在英国度过的德国数学家、天文学家麦卡托，发表了《对数技术，或正确、方便的编造对数表的新

方法》一书。书中把对数分解为级数，大大简化了对数表的编制工作。他的方法是，把 $y=1/(1+x)$ 展开为无穷级数 $y=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\cdots$，从而由沃利斯的双曲线下求积法，推出了

$$\ln(1+x)=x-x^2/2+x^3/3-x^4/4+x^5/5-\cdots \quad (-1<x\leqslant 1)。$$

当然，这个式子也可以由泰勒展开式得到。布鲁克·泰勒（Brook Taylor）是一位英国数学家，他以微积分学中将函数展开成无穷级数的定理——泰勒定理闻名于世。著名的泰勒定理在几乎每一本微积分学教科书上都可以找到，并在许多数学分支中有广泛的应用。

不过，大名鼎鼎的莱布尼茨认为，展开这个级数还有一位对麦卡托说“莫道君行早”的“早行人”——荷兰数学家赫德。他在麦卡托之前就把 $\ln(1+x)$ 展开成级数，并先于牛顿发明了内插法。

麦卡托

泰勒

在把对数展开成幂级数的研究中，中国数学家也作出了重要贡献。1845 年，清代数学家李善兰出版了《对数探源》，在这本书的第二卷中，他就指出对数可以用他发明的“尖锥术”中的诸“尖锥”的合积来表示，对数函数可以用幂级数来展开。

李善兰

当然，除了用先进方法计算对数以外，还有一条快速编制对数表的途径。那就是把对数的底变一变，变得来使对数易于计算。

那么，选什么数为底呢？

我们先来看表 4-4。

表 4-4

以 10 为底的常用对数 lg$N$	对应的真数 N
0.000 0	$10^0=1$
0.000 1	$10^{0.000\,1}=\sqrt[10\,000]{10}$
0.000 2	$100^{0.000\,1}=\sqrt[10\,000]{100}$
…	…

从这个表可以看出，用 10 为底来编制对数表，哪怕是只精确到万分位，也会遇到把 10，100，1000，…这些数开 10 000 次方的困难。

但是。如果采用某个常数的 10 000 次幂为底，就可以避免制表时开方的困难。下面，我们来说明这一点。

表 4-5 是以 $2^{10\,000}$ 为底的情形。

表 4-5

以 $a=2^{10\,000}$ 为底的对数 $\log_a N$	对应的真数 N
0.000 0	$(2^{10\,000})^{0.000\,0}=1$
0.000 1	$(2^{10\,000})^{0.000\,1}=2$
0.000 2	$(2^{10\,000})^{0.000\,2}=2^2=4$
0.000 3	$(2^{10\,000})^{0.000\,3}=2^3=8$
…	…

从表 4-5 可以看出，以 $2^{10\,000}$ 为底，就避免了开方的困难。

但是，以 $2^{10\,000}$ 为底还是不能解决根本问题。这又是什么原因呢？

原来，如果底很大，那相应的真数的间隔也就很大。这样，很多数的对数就无法获得。例如，在 $2^{10\,000}$ 为底的对数表中，3，5，7，…这一连串数的对数就没有。要算出这些数的对数，又得另花工夫。

……

经过这样一番探索之后容易发现，以 $a=b^{10\,000}$ 为底制作四位对数表，b 越接近 1，相应的真数间隔就越小，制成的对数表也就越精确。

从下面分别以 $1.1^{10\,000}$，$1.01^{10\,000}$，$1.0001^{10\,000}$ 为底制作的对数表的比较（表4-6），可以明显看出这一点。

表4-6

$\log_a N$	$a=1.1^{10\,000}$时的 N	$a=1.01^{10\,000}$时的 N	$a=1.0001^{10\,000}$时的 N
0.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0
0.000 1	1.100 0	1.010 0	1.000 1
0.000 2	1.210 0	1.020 1	1.000 2
0.000 3	1.331 0	1.030 3	1.000 3
0.000 4	1.464 1	1.040 6	1.000 4
…	…	…	…

事实上，比尔吉和纳皮尔在独立制作他们各自不同的对数表中，就是这样“英雄所见略同”——用样子像 $a=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 的数为底的。比尔吉用的底是 $\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{10^4}$（这里 $n=10^4$），非常接近 e，这不是巧合而是必然。当然，纳皮尔用的底是 $\frac{1}{e}$，但是它也是 $\left(1+\frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$（这里 $n=10^7$）的倒数的近似值。

从上面的叙述可以看出，e 的确大显神通——极大地加快了数学家们编造对数表的速度。

4.4.3 如何编造对数表

那么，如何具体编造对数表呢？

赫德、麦卡托、泰勒给了我们编造自然对数表的“法宝”。

$$\ln(1+x)=x-x^2/2+x^3/3-x^4/4+x^5/5-\cdots \quad (-1<x\leqslant 1)。$$

把“法宝”中的 x 换为 $-x$，就得到“新法宝”

$$\ln(1-x)=-x-x^2/2-x^3/3-x^4/4-x^5/5-\cdots \quad (-1\leqslant x<1)。$$

用“法宝”减“新法宝”就得到

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots\right)\quad(|x|<1)。$$

再设 $x=\frac{1}{2n+1}<1$（n 是自然数），就得到

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{n+1}{n},$$

所以

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln\frac{n+1}{n}=\frac{2}{2n+1}+\frac{2}{3(2n+1)^3}+\frac{2}{5(2n+1)^5}+\frac{2}{7(2n+1)^7}+\cdots$$

或

$$\ln(n+1)=\ln n+\frac{2}{2n+1}+\frac{2}{3(2n+1)^3}+\frac{2}{5(2n+1)^5}+\frac{2}{7(2n+1)^7}+\cdots。$$

由这个公式，就可以从 $\ln 1=0$ 开始，逐步算出所有的自然数的对数，编制自然对数表了。

例如，设 $n=1$，就可以求得 $\ln 2$：

$$\begin{aligned}\ln(1+1)&=\ln 1+\frac{2}{2+1}+\frac{2}{3(2+1)^3}+\frac{2}{5(2+1)^5}+\frac{2}{7(2+1)^7}+\cdots\\&\approx 0+0.666\,667+0.024\,691+0.001\,646+0.000\,131\\&=0.693\,135\\&\approx 0.693\,14,\end{aligned}$$

只取 0.693 14（小数点后第 5 位的误差不超过 1 个单位）的原因是，后几位是有误差的。下面对此加以说明。

取前 4 项的误差

$$\begin{aligned}R_4&=\frac{2}{9(2n+1)^9}+\frac{2}{11(2n+1)^{11}}+\frac{2}{13(2n+1)^{13}}+\frac{2}{15(2n+1)^{15}}+\cdots\\&<\frac{2}{9(2n+1)^9}+\left[1+\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^4}+\cdots\right]\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{9(2n+1)^9} \times \frac{1}{1-1/(2n+1)^2}$$

$$= \frac{2}{9(2n+1)^9(4n^2+4n)}$$

$$< \frac{2}{9 \times 3^9 \times 8}$$

$$= 0.000\ 001\cdots。$$

可见从小数点之后第 6 位起，已经有 0.000 001 的误差，所以 0.693 135 的末位靠不住，加上在逐渐循环计算的过程中，误差还会累积，所以只能取 0.693 14。当然，如果要减小这些累积误差，就应在计算时多取几位。

有了各自然数的自然对数 $\ln n$，就可以用换底公式求得各自然数 n 的常用对数

$$\lg n = \ln n/\ln 10 = \ln n/2.302\ 585\cdots = (\ln n)\ 0.434\ 294\cdots,$$

进而编制常用对数表了。

当然，编造自然对数表和常用对数表还有其他方法。

世上今人胜古人。现在，我们把电子计算器一按，就能得出较少位数的对数，用电脑则可轻易计算出更多位数的对数，从而愉快地让编造对数表进入“高速公路”。

第5章　“王宫”中的漫游
——数学殿堂中的e

数学科学是一个不可分割的有机整体，它的生命力在于各部分之间的联系。

——希尔伯特

数学是科学的“国王”，这一章，我们来看一看e是如何在这个“国王”的“王宫”中漫游的吧。

5.1　关系你的“钱包”——无处不在复利律

5.1.1　大自然的复利律

1. 如何存款有最大收益

你知道如何存款才能有最大的收益吗？

我们暂不回答这个问题，而是先来看一看大自然的复利律吧。

我们知道 $(e^x)'=e^x$，即指数函数 $f(x)=e^x$ 的导数就是它本身。而且，一个函数和它的导数等于它本身的，只有 e^x。

所以，如果我们发现一个函数 y，它的导数和函数本身成正比的话，就可以断定所研究的这个函数 y 必定是以e为底的指数函数或对数函数；即 $dy/dx=\pm ay$，这个形式的规律就叫复利律。由它就得到 $y=ce^{\pm ax}$。其中 a，c 都是常数。如果函数的数量是增加的，$y=ce^{\pm ax}$ 的指数中的“±”取正；如果函数的数量是减少的，指数中的“±”取负。

那为什么像 $dy/dx = \pm ay$ 的形式描述的是复利律呢？下面的例子可以说明。

假设你到银行去存了100元，年利率为5%。当然，到了第一年末，就有本利共105元。如果以105元做第二年的本金，不但100元要产生利息，而且第一年的利息5元也要产生利息。

现在，把它写成一般的形式，假设 P_0 为本金，年利率为 $r\%$。那么，第一年末的利息就是 $Pr/100$，本利的和就是 $P_0 + Pr/100$。再用 $P_0 + Pr/100$作为第二年的本金，并用 P_1 表示，那就有 $P_1 = P_0(1 + r/100)$。在第二年末，就有 $P_2 = P_1(1 + r/100) = P_0(1 + r/100)^2$。

这样，一年又一年继续下去，本金年年增加，利息也岁岁增多。到了第 n 年末，就有 $P_n = P_0(1 + r/100)^n$。例如，本金100元，年利率为5%，利息每年加入到本金——即年复利率5%，那么10年后的本利就有 $P_{10} = 100(1 + 5/100)^{10}$。不难算得 $P_{10} \approx 162.89$ 元。

我们在上面用的方法是，每一年把利息加入到本金一次，就得到162.89元。那么，这个结果和把利息加入到本金一次的时间长短——前面的例子是“每一年”，有没有关系呢？

现在，假设我们可以每月、每星期，甚至每天、每小时、每分钟、每秒钟……把利息加入到本金一次，看看有什么结果。

用和前面一样的方法，可以计算出如果每月把利息加入到本金一次，本利的和是

$$P_1 = P_0\ [1 + r/(100 \times 12)]^{12}。\qquad (5\text{-}1)$$

用（5-1）可算得 $P_1 = 100\ [1 + 5/(100 \times 12)]^{12} \approx 105.12$ 元——比105元多出0.12元。

看来，把利息加入到本金一次的时间越短，利息越多。

那么，当这个时间“无穷短”的时候，利息会无限增多吗？如果能无限增多，我们不是可以自动成为“大款”吗？这个问题，我们将在5.1.2小节回答，这里还是回到复利律的问题来。

2. 大自然的复利律

现在，进一步假设，在整个这一年中，利息是每一“刹那”——每一年有 n 个“刹那”都加入到本金一次，那么，(5-1) 中的 12 就变成了 n，就得到

$$P = P_0\ [1 + r/(100n)]^n。\tag{5-2}$$

为了便于计算，假设 $r/100n = 1/m$，这就得到 $n = mr/100$。这样，(5-2) 就变为

$$P = P_0[\ (1 + 1/m)^m]^{r/100}。\tag{5-3}$$

由于 $\lim\limits_{m\to\infty}(1 + 1/m)^m = \mathrm{e}$，(5-3) 就变为 $P = P_0\mathrm{e}^{r/100}$。这时，$n$ 年末就有

$$P = P_0\mathrm{e}^{nr/100}。\tag{5-4}$$

如果设利率 $r/100 = k$，则式 (5-4) 就变为

$$P = P_0\mathrm{e}^{nk}。\tag{5-5}$$

求 (5-5) 的导数，就得到 $P' = kP_0\mathrm{e}^{nk} = kP$——得到的导数和和原函数本身成正比的结果，符合前面 $y = ce^{\pm ax}$或 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \pm ay$ 的形式。

所以，凡是导数和和原函数成正比的性质，都叫复利律。

当然，这里只谈到 $y = ce^{+ax}$的情况，$y = ce^{-ax}$的情况——例如放射性元素的衰变，我们将在 6.1.11 小节谈到。如果用 P_0，P_n 分别表示某一年和 n 年之后的人口，$r/100$ 表示这 n 年期间的人口平均增长率，那么 $P_n = P_0(1 + r/100)^n$ 也可以用来计算人口增长。例如，中国国家统计局在 2011 年 4 月 28 日发布的第六次全国人口普查数据说，2010 年 11 月 1 日零时中国内地 31 个省、自治区、直辖市和现役军人的人口，比 2000 年 11 月 1 日零时第五次普查的人口增长了 5.84%，年平均增长率为 0.57%。那么，这个 0.57 是怎么得来的呢？原来，这时 $P_n = 1.058\ 4P_0$，$n = 10$，代入公式就有 $1.058\ 4P^0 = P^0(1 + r/100)^{10}$。由此求得 $r = 0.57$，而不是 0.584——这体现了人口增长的“复利效应”（即人口按几何级数增长）。

5.1.2 我们不会自成“大款”

1. 利息加进本金的时间越短，利息越多

1）用“经验”验证

我们接着5.1.1小节中的话说下去。

由（5-4）可以算出，$P_{10}=100e^{10\times5/100}\approx164.87$元——比162.89元多出1.98元。这个1.98元，也比5.1.1小节中的0.12元的10倍1.20元，多出0.78元。

由此可见，储蓄之后的利息和把利息加入到本金一次的时间长短，是有关系的。由一年多出0.12元和十年多出1.98元的两次“经验”验证可以看出，把利息加入到本金一次的时间越短，利息越多。

那么，就引出了两个问题：这个被验证的“经验”能用理论证明吗？利息会无限增多吗？

2）用理论证明

（1）证明伯努利不等式。

为了证明“经验”可靠，显然就是要证明数列 $x_n=\{x_n\}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$递增。

证明 $\{x_n\}$ 递增的一般方法是，把 x_n 按牛顿二项式定理展开，再分析这个展开式而加以证明。

在证明过程中，可用伯努利不等式 $(1+x)^n\geqslant1+nx$（$x>-1$，$n>1$）。用数学归纳法证明这个不等式的任务留给读者，而我们在下面将用另外一种方法证明伯努利不等式。

先证明一个“基本不等式”

$$\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\beta_1+\beta_2}\right)^{\alpha_1+\alpha_2}\leqslant\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)^{\alpha_2}\quad（当且仅当\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\frac{\alpha_2}{\beta_2}时等号成立）。$$

引入函数 $f(t)=\frac{(1+t)^{\alpha_1+\alpha_2}}{t^{\alpha_2}}$［其中 $\alpha_1,\alpha_2>0,t\in(0,\infty)$］，则

$$f'(t)=\frac{\alpha_1\times(1+t)^{\alpha_1+\alpha_2-1}}{t^{\alpha_2+1}}\left(t-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)。$$

显然，当 $t=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ 时，$f(t)$ 获得极小值 $f(t)_{\min}$。因此，对任意的 $t>0$，都有 $f\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\leqslant f(t)$。

现在设 $t=\frac{\beta_2}{\beta_1}(\beta_1>0,\beta_2>0)$ 代入上式，就得到

$$\frac{\left(1+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{\alpha_1+\alpha_2}}{\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{\alpha_2}}\leqslant\frac{\left(1+\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^{\alpha_1+\alpha_2}}{\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^{\alpha_2}},$$

把它整理后就得到“基本不等式”$\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\beta_1+\beta_2}\right)^{\alpha_1+\alpha_2}\leqslant\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)^{\alpha_2}$。

注意到 $t=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ 是 $f(t)$ 唯一的极小值点，所以不等式的等号，当且仅当 $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}=\frac{\beta_2}{\beta_1}$ 或 $\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\frac{\alpha_2}{\beta_2}$ 时成立。

有时为了使用中表述方便，“基本不等式”可变为“等价基本不等式”

$$\left(\frac{\beta_1+\beta_2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)^{\alpha_1+\alpha_2}\geqslant\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)^{\alpha_2}。$$

下面，我们就用“等价基本不等式”来证明伯努利不等式。

当 $-1<x\leqslant-\frac{1}{n}$ 时，显然伯努利不等式成立。

当 $x>-\frac{1}{n}$ 时，在“等价基本不等式”中取 $\alpha_1=n-1$，$\alpha_2=1$，$\beta_1=1-\frac{1}{n}$，$\beta_2=x+\frac{1}{n}$。因为所设的 $n>1$ 且 $x>-\frac{1}{n}$，所以所取的 α_1，α_2，β_1，β_2 都是正值。这样，就有

$$\frac{n-1}{1-\frac{1}{n}}\neq\frac{1}{x+\frac{1}{n}}。$$

这样，根据“等价基本不等式”就得到

$$\left[\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(x+\frac{1}{n}\right)}{(n-1)\quad+1}\right]^{(n-1)+1} \geqslant \left(\frac{1-\frac{1}{n}}{n-1}\right)^{n-1}\left(\frac{x+\frac{1}{n}}{1}\right)^{1},$$

或整理为

$$\left(1+\frac{1+x}{x}\right)^{n} \geqslant \frac{1+nx}{n^{n-1}\times n},$$

即伯努利不等式

$$(1+x)^{n} \geqslant 1+nx。$$

证明完毕。

如果 $x=0$，$(1+x)^{n} \geqslant 1+nx$ 中的等号成立。

（2）用理论证明。

下面，我们就用伯努利不等式 $(1+x)^{n} \geqslant 1+nx$ 来证明 $\{x_n\}$ 递增。

因为

$$\begin{aligned}\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \\ &= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \\ &= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n} \\ &= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right],\end{aligned}$$

就得到

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]。\tag{5-6}$$

又因为

$$-\frac{1}{(n+1)^2} > -1,\tag{5-7}$$

所以由（5-6），（5-7）就得到

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \geqslant \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left[1-\frac{n}{(n+1)^2}\right] = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1,$$

所以 $\{x_n\}$ 递增。

这样，就证明了“把利息加入到本金一次的时间越短，利息越多”。

2. 我们不会自成“大款”

1）四种方法证明 $\{x_n\}$ 递增且有上界

只重点介绍第一种。

（1）第一种方法。

假设5.1.1小节说的每一“刹那”都是无穷小，即$\{x_n\}$中的$n\to\infty$，如果能证明此时 $\{x_n\}$ 存在极限，就证明了 $\{x_n\}$ 有上界，那就证明了利息不会无限增多。下面是证明。

为了证明 $\{x_n\}$ 有上界，我们考虑另外一个数列 $y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$（其中 $n=1, 2, 3, \cdots$）。

用和前面一样的方法，我们来证明 $\{y_n\}$ 递减。

因为

$$\begin{aligned}\frac{y_n}{y_{n+1}} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n+1}}\right)^{n+1} \\ &= \frac{n+1}{n+2}\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{n+2}\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} \\ &\geqslant \frac{n+1}{n+2}\left(1+\frac{n+1}{n^2+2n}\right) = \frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n} \\ &> 1。\end{aligned}$$

所以 $\{y_n\}$ 递减。

而

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = y_n \leqslant y_1 = 4。$$

由此可知，x_n 有上界。

以上是证明 $\{x_n\}$ 递增且有上界的第一种方法。

（2）第二种方法要用到不等式

$$\left(\frac{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}\right)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n} \geqslant \left(\frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)^{\alpha_1} \times \left(\frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)^{\alpha_2} \times \cdots \times \left(\frac{\beta_n}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n}。$$

（3）第三种方法要用到“算术平均不小于几何平均”——著名的柯西不等式。

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}。$$

（4）第四种方法来自一位美国学者。

除了以上四种证明 $\{x_n\}$ 递增且有上界的方法外，在 7.4.1 小节中，还将介绍第五、六两种。

2）我们不会自成“大款”

不会自成“大款”的主要原因——利息有上界。

事实上，可以用一个实例来说明 $\{x_n\}$ 的确递增且有上界。

假设存入 100 元，利率是 100%——当然，通常的高利贷的利率还没有这么高。

如果把利息归入本金（民间叫“利滚利”）的时间是半年，那么半年后的本利共 150 元，再过半年即共一年后本利共 225 元。

如果每 1/3 年把利息归入本金，一年后本利共 237.03 元。

如果每 0.1 年把利息归入本金，一年后本利共 259.37 元。

如果每 0.01 年把利息归入本金，一年后本利共 270.48 元。

如果每 0.001 年把利息归入本金，一年后本利共 271.69 元。

……

如果每无穷短的时间把利息归入本金，一年后本利共 271.82… 元——不可能超过 271.83 元。

不过，得到这个结论并不容易——直到 1683 年，雅格布·伯努利在研究连续复利问题时才认识到这一点（把 e 看为常数）。但他也没有

得到2.718…这个极限，只是估计到这个极限在2与3之间。

不会自成“大款”的次要原因——当今银行不计复利的“游戏规则”。

什么是不计复利呢？以100元存期一年的利率10%为例，就是银行在一年以后才给10元的利息，而不会把这10元自动加进原来的本金中，以110元作为第二年的新本金，而是仍然用100元本金算利息。当然，更不会在半年时就给5元利息而且自动加进本金。

根据这个“游戏规则”，我们就应该在一年期满以后，把那100元利息取出来，连同10元本金一起再存入。这样，在初次存入两年以后，我们就能一共得到121元了。当然，办“自动转存”也有这样的结果。

如果不熟悉这个“游戏规则”，没办“自动转存”，也没在一年后去取出10元利息，然后连同100元本金一起再存入。那么，在初次存入两年以后，我们就只能得到120元了。

总之，由于$\{x_n\}$有上界，所以不可能将不多的本金存在银行中，企图以多得利息而成为“大款”。其实，很容易理解这个现实的合理性：如果将不多的本金存入银行就能致富的话，那还要劳动干什么！

然而，自然现象却是不间断的、连续的，它们都是把“利息”时时刻刻自动加入到“本金”中去的。例如，植物的生长——它新生长的部分，都会立即和母体一样再生长。这就是大自然的复利律。

5.1.3 富兰克林的捐款和拿破仑的带刺玫瑰

1. 富兰克林“小捐”显“威力”

美国科学家、政治家富兰克林辞世后，留下只有微不足道1 000英镑的财产。令人惊讶的是，他竟留下了一份分配几百万英镑财产的遗嘱：“1 000英镑赠给波士顿的居民……这笔钱应该托付给一些挑选出来的公民，他们得把这钱按每年5%的利率借给一些年轻的手工业者去产生利息。过了100年，这笔钱将增加到131 000英镑。我希望，那时候用100 000英镑来建立一所公共建筑物，剩下的31 000英镑拿去继续生

息100年。在第二个100年末了，这笔款增加到4 061 000英镑，其中1 061 000英镑还是由波士顿的居民来支配，而其余的3 000 000英镑让马萨诸州的公众来管理。此后，我可不敢多作主张了！”

富兰克林

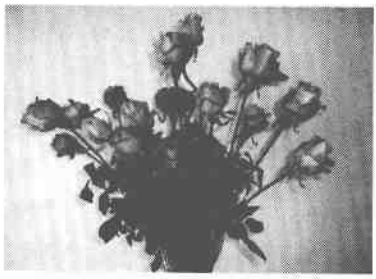
富兰克林留下区区的1 000英镑，竟立了百万富翁般的遗嘱，莫非昏了头或者要哗众取宠“炒作”一番！

事实上，我们可以用对数算出，在头一个100年末富兰克林的财产应当增加到131 501英镑——比他的遗嘱中写的还多出501英镑！在第二个100年末更多达4 076 539英镑！因此，他的遗嘱是有数学计算依据的！也由此可见“指数函数的威力”——大名鼎鼎的法国皇帝拿破仑，就因为不懂这种“威力”而让玫瑰花“带刺”。

2. 拿破仑的玫瑰花“带刺”

1797年，新婚的拿破仑夫妇参观卢森堡大公国国立第一小学时，受到了热烈欢迎。为了支持中小学教育事业，他向学校赠送了一束价值3个金路易的玫瑰花。他还许诺，只要法兰西共和国存在一天，他将每年送一束价值相等的玫瑰花，以作两国友谊的象征。但是，由于火与剑的征战，拿破仑把这一承诺忘在九霄云外！

时光飞逝。近一个世纪之后的1894年，卢森堡王国郑重向法兰西共和国提出了“玫瑰花悬案”，要求法国政府在“拿破仑的声誉”和1 375 596法郎的债款中“二选一”。这笔高约百万法郎的巨款，就是3个金路易的本金以5%的年利率，在历经97年的“指数效应”下的产物。



近一个世经以后，玫瑰花长了“刺”

拿破仑的这朵玫瑰花，使法国政府极为难堪——只要法国继续存

在，这朵玫瑰花将继续美丽而“带刺”！无奈，法国人只好说，将始终不渝地支持和赞助卢森堡的中小学教育事业。

以上“捐款”和“玫瑰”事件揭示出的“指数威力”，还在其他场合彰显。例如，白炽灯泡的灯丝在白炽阶段的总发光亮度，与灯丝的热力学温度的12次方成正比。这样，如果热力学温度增高3%，总发光亮度就增大惊人的43%——这就是要采用高熔点的钨丝和对温度“度度计较”的原因，也是高电压时灯光特别刺目的原因。而如果灯丝在赤热阶段，上面的“12次方”则要改为更加惊人的“30次方”——这就是低电压时白炽灯泡特别昏暗的原因。又如，如果水流速度增加到4倍，那么它能冲走的物体的重量就增加到4^6倍=4 096倍——这就能解释洪水、泥石流的威力为什么那样“雷霆万钧”。

3. 请你别碰高利贷

从富兰克林的小额捐款急剧增大和拿破仑留下的“带刺玫瑰”可以看出，并不太高的利率是怎样让利息“疯长”的。如果遇到高利贷，那就更疯狂了——古巴比伦人就遇到过这个问题。

大约在公元前1700年，古巴比伦人提出了一个利息问题：以20%的年息贷钱给人，要计复利，什么时候能连本带利翻一番？

显然，如果设本金为1，则从第二年起，每年本与利的和组成一个等比数列：1.2，1.2^2，1.2^3，1.2^4，1.2^5，…。也就是说，这个问题相当于求解指数方程$(1.2)^x=2$。

这个方程两边取常用对数，就得到$x\lg 1.2=\lg 2$。由此解得$x=\frac{\lg 2}{\lg 1.2}$年$\approx\frac{0.301}{0.079}$年$\approx 3.8$年（而不是5年）。这就是说，大约在46个月之后，就能连本带利翻一番！

其实，在民间月息5%的高利贷并不鲜见，此时解$1.05^y=2$，就可得到$y\approx 14$个月（而不是20个月）。也就是说，只要1年多一点点的时间，连本带利就要翻一番！

与对数和复利没有正确认识的借贷人来说，可能事前并没有这么深

刻的认识——直到还不起高利贷的时候才后悔莫及。

所以，不但法律不容放高利贷的人和借高利贷的人，而且借高利贷的人还会让自己的钱“打水漂”，所以双方都千万别去碰。

顺便指出，计复利的月息5%和年息60%是不同的——前者1个月后就开始计息，后者12个月后才开始计息。这样，月息5%借贷100元12个月后连本带利约179.59元，而年息60%借贷100元12个月后连本带利是160元。

5.2 数学珍宝——π和e的“一家亲”

毫无疑问，π和e是数学中最常用和最重要的两个常数，而且这对“数学珍宝”还是如影随形的“邻居”加“亲戚”呢！

印度传奇数学家拉马努金曾发现一个π和e“同居一室”的公式

$$\sqrt{\frac{1}{2}e\pi}=1+\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{1\times3\times5}+\frac{1}{1\times3\times5\times7}+\cdots+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{1+\ddots}}}}}。$$

当然，π和e的“亲密接触”远不止这一次。例如，$\pi^4+\pi^5\approx e^6\approx 403.4288$。这个式子的趣味和奇妙在于这种2，3，4，5，6的等差数列关系——这里的2和3，分别由e和π各自“取整”（即［e］=2，［π］=3）得到。

拉马努金

把π和e各自四舍五入取整数，发现都得到3。可见，3是这对“邻居”公用的“墙”。

1941年，美国怀俄明州卡斯佩尔公司的总工程师布特勒尔在他的作品Geomath中，宣称发现了π和e之间的“亲密关系”，并声明他的工作是在美国发展起来的第一个基础数学原理。

他还让国会议员们在此前的1940年6月5日把它录成会议录音带。

更好玩的是，e还投入了π的“怀抱”：人们发现，从π值的第45 111 908 393小数开始的数字，正好就是e的前11位数字27 182 818 284！

π与e的数字联系还不仅如此。有人在发现π与e十进制小数的第13位9、第17位2、第18位3、第21位6、第34位2……都是对应相同的之后，猜测π与e的十进制数字平均每10位会有1次雷同，这一猜测至今没有被证实或被否定。

5.3 弟弟帮哥哥——e为π开路立功

在欧拉初步证明e是无理数的基础上，德国数学家兰伯特从欧拉和英国数学家布龙克尔各自发现的公式出发，在1761年（论文在1768年发表）得出后人以他的姓氏命名的两个连分式，并由此首先初步证明了π也是无理数。于是，弟弟e为哥哥π第一次开路立功——初步证明π是无理数。

兰伯特

在证明了e，π是无理数之后，数学家们又向证明它们是超越数进军。

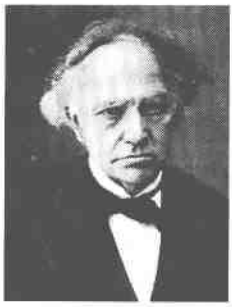
1873年，法国数学家埃尔米特初步证明了自然对数的底e是超越数。而德国数学家卡尔·路易斯·费尔南德·冯·林德曼（以后简称冯·林德曼）则借助于埃尔米特的方法，在1882年严格地证明了π是超越数。

于是，弟弟e为哥哥π第二次开路立功——证明π是超越数。而对于数学家们来说，这次立功“更值得赞誉”。

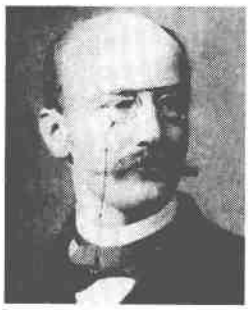
为什么“更值得赞誉”呢？这得从“化圆为方问题”（以下简称“化圆为方”）谈起。

在公元前5世纪前后，古希腊流行着由雅典的智人学派即哲人学派

提出来的尺规作图的三个著名古典数学难题："倍立方体"——将正方体的体积加倍，"三等分角"——将任意角三等分，"化圆为方"——将圆化成等面积的正方形。



埃尔米特



林德曼

当然，在约公元前1650年或约公元前1950年，古埃及数学家艾哈麦斯抄写的兰德纸草书中就说："取圆直径的8/9，作为正方形的边长，就可以得到和圆等面积的正方形。"由此可见，此时化圆为方漫漫征程的处女航船实际上已经起锚。这里提到的亚历山大·亨利·兰德是爱尔兰古董商，他在埃及旅行时购得了这卷纸草书。

但是，如果从公元前5世纪算起，这艘航船经过漫漫两千多年征程，依然在汪洋大海中飘摇，没有到达目的地。

原来，数学家们在十七八世纪才发现，要解决化圆为方，就必须判定π是不是超越数。如果不是超越数，那就能用尺规作图法作出。如果是超越数，那就不能用尺规作图法通过有限次作图作出——这是根据1830年才19岁的法国数学家伽罗瓦创立的理论。而当时判定π是不是超越数，是一个让数学家们头痛的问题。

伽罗瓦

伽罗瓦创立的理论开辟了代数学的一个新领域——群论。然而，他的这些理论却没有在他生

前得到承认。直到他31岁死于因爱情纠葛的决斗之后14年，才由法国数学家刘维尔整理，并发表在他于1836年创办并担任了40年主编的法文刊物《纯粹与应用数学杂志》上。

那为什么化圆为方要牵涉作出超越数的问题呢？

原来，化圆为方就是让 $\pi R^2 = a^2$，就是 $a = \sqrt{\pi}R$；这里，R 是已知圆的半径，a 是所求正方形的边长。从 $a = \sqrt{\pi}R$ 可以看出，问题的关键是牵涉 π，但“不幸”的是，$\sqrt{\pi}$ 也是超越数。根据伽罗瓦的理论，用尺规作图法通过有限次作图作出超越数 π 是不可能的，因而用尺规作图法化圆为方是不可能的。

当然，在1830年的时候，还没有证明 π 是超越数——52年之后，德国数学家冯·林德曼完成了这个证明。

弟弟e帮助了哥哥 π，也帮助了为化圆为方这个难题困惑了两千多年的数学界，所以，功不可没，“更值得赞誉”。

5.4 π，e“连横合纵”之后——两种“桃园三结义”

5.4.1 π，e，i的“桃园三结义”

π，e，i“桃园三结义”的 $e^{i\pi}+1=0$ 被称为欧拉公式。那么，它是怎么得来的呢？

设 $z=x+iy$（这里，$i=\sqrt{-1}$，x，y 都是实数），这样 $e^z=e^{x+iy}=e^x e^{iy}$，就是 $e^z/e^x=e^{iy}$。

用牛顿幂级数展开式 $e^x=1+x+x^2/2!+x^3/3!+\cdots+x^n/n!+\cdots$ 把 e^{iy} 展开，就得到

$$\begin{aligned} e^z/e^x &= e^{iy}=1+iy-y^2/2!-iy^3/3!+y^4/4!+iy^5/5!-y^6/6!-\cdots \\ &= (1-y^2/2!+y^4/4!-y^6/6!+\cdots)+i(y-y^3/3!+y^5/5!-\cdots)。\end{aligned}$$

由于 $\cos y=1-y^2/2!+y^4/4!-y^6/6!+\cdots$ 和 $\sin y=y-y^3/3!+y^5/5!-\cdots$，所以 $e^{x+iy}=e^x e^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$，也就是

$$e^{iy} = (\cos y + i\sin y), \tag{5-8}$$

也叫欧拉公式。

设这个欧拉公式中的 $y = \pi$，就得到“欧拉关系式” $e^{i\pi} = -1$，或变为 $e^{i\pi} + 1 = 0$。

还可以继续下去，同样可以得到有 e 的式子。

再设（5-8）中的 $y = -y$，就得到

$$e^{-iy} = (\cos y - i\sin y) \tag{5-9}$$

最后，依次把（5-8）、（5-9）相加、减就得到同样著名而美妙的两个公式

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2},$$

$$\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}。$$

这两个公式也叫欧拉公式，它们和 $e^{iy} = (\cos y + i\sin y)$ 是欧拉在1743年发表的。在欧拉的《无穷分析引论》第8章中也有记载。

欧拉之前的公元1714年，牛顿的学生、英国数学家科特斯，在《度量的和谐》一书中，发表了本质上和（5-8）相同，也和下面棣莫弗公式本质上完全一样的式子：$ix = \ln(\cos x + i\sin x)$。这个式子，把实数、虚数、对数函数、三角函数有机而和谐地联系在一起了。

1722年，出生在法国、后来被迫侨居英国的数学家棣莫弗在一篇笔记中，重提他在1707年的一篇文章中隐隐约约得到的结果，不明显地得到了著名的棣莫弗公式

$$(\cos x \pm i\sin x)^n = \cos nx \pm i\sin nx。$$

不过，在欧拉的《无穷分析引论》发表之后，棣莫弗公式才得到广泛的应用。欧拉把它变为 $e^{\pm ix} = (\cos x \pm i\sin x)$。由此出发，也可以得到 $e^{i\pi} + 1 = 0$ 等式子。

“（$e^{i\pi} + 1 = 0$）可能是世界上最短也是最有名的公式。”美国数学家爱德华·卡斯纳和匈牙利－美国数学家詹姆斯·罗伊·纽曼，在他们于1940年合著出版的《数学和想象力》一书中认为，“无论是神秘主义

者、科学家、哲学家、数学家，都能感受到它的魅力。”

关于卡斯纳和《数学和想象力》的一则趣闻是“谷歌”的“身世”。1 个 Googol 本来是一个数学术语，表示 1 后面有 100 个“0”。1938 年，卡斯纳打算给自己的学生展示一个数字，这个数字既是无法想象的大，又远远小于无穷大，于是，他想到了这个大数。数字有了，叫它什么呢？经过卡斯纳当时 9 岁的外甥（一说侄儿）西洛塔取了有个性的名字“古戈尔”之后，出现在《数学和想象力》中，进而得到普及。“谷歌”公司对这个词做了微小改变就成了 Google，借以反映公司的使命——组织网上无边无际的信息资源。

第一个 Google doodle 涂鸦标志

当然，这个改变还得“感谢”出生在德国的美国投资人比克托尔西姆——当 1998 年谷歌的创办人之一佩吉等将投资计划推荐给他时，他寄来的支票上写的收款人是“Google”，为了接收这张 10 万美元的支票，Googol 公司（成立于 1998 年）只好把名改成 Google。

有人还把 Google 拆解开来，就得到短语 Go ogle（ogling），ogle 意思是“暗送秋波”。当然，这只是一种巧合。不过，谁又会否定 Google 让我们“神魂颠倒”呢？另一种解释是：G 意为手，OO 为多个范围，L 意为长，E 意为出，合一起就是“我们 GOOGLE 无论在哪里都能为您找出很长的一大堆您想要的”。

谷歌对 e 的确是“钟情不渝”——不单是总部的一座大楼用 e 命名。2005 年谷歌招聘新员工，于是一道“科学麻瓜”看不懂的“整蛊题”，堂而皇之地出现在硅谷各大地铁站的 3 块 15 米长的米色广告牌上：“（在‘e’的数字序列中所能找到的第一个十位数质数）.com”——没有公司名也没有任何广告词。路人在看了几秒钟之后才回过神来，这是一道招聘数学题：要应聘者找出 e 的数字序列中第一个 10 位数素数，从而得到目标网站的名字，然后进入这个网站，再“下一步”。不少应聘者在规定时间内，登录上了 www.7427466391.com。但他们

发现，这仅仅是这道应聘的“万里长征题”的第一站。在进一步解答了一系列难题之后，最终只有50人进入谷歌。这里的7 427 466 391，是e小数点之后从第99位开始的10个数字。

除了 $e^{i\pi}+1=0$ 以外，还有没有这类π，e，i“三结义”的公式呢？

1719年，意大利数学家法格纳诺得到 $\pi=4\ln\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{\frac{i}{2}}=2i\ln\frac{1-i}{1+i}$。在这个式子中，π，e，i再次“三结义”。$\ln\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{\frac{i}{2}}$ 样子似乎是虚数，但却是实数 $\frac{\pi}{4}$——0.785…。

说到虚数，就会问 i^i 是虚数吗？“样子”似乎有点像，但欧拉给出了正确的答案：$i^i=e^{-\pi/2}=0.207\ 879\ 576\cdots$ 是一个实无理数。由此可得 $i^{-i}=i^{1/i}=\sqrt[i]{i}=e^{\pi/2}=4.810\ 477\ 380\cdots$（这里π，e，i再次“三结义”）。所以，$i^i$ 和 $i^{-i}=i^{1/i}=\sqrt[i]{i}$ 都不是虚数，而 $e^{i\pi}+1=0$ 则是它们“桃园结义”和得到“梦幻组合”的桥梁。

欧拉的 $i^i=e^{-\pi/2}$，被俄国－苏联数学家盖尔丰德写成 $e^{\pi}=i^{-2i}$（这里π，e，i又一次“三结义”）。$i^i=e^{-\pi/2}$ 还可变形为 $i\ln i=-\pi/2$。由此可知，$i\ln i=-1.570\cdots$，所以也不是虚数。

除了上述“三结义”以外，π和e还有“连横合纵”的巅峰之作——用 $e^{-2i\pi}-1=0$ 巧妙地让0，1，2，i，π，e这“六大明星”同台献艺，也和盖尔丰德的 $e^{\pi}=i^{-2i}$、欧拉的 $i\ln i=-\pi/2$ “异曲同工”。

5.4.2 π，e，φ的“桃园三结义”

印度传奇数学家拉马努金发现了下面的有趣公式：

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{e^{-2\pi\sqrt{5}}}{1+\cfrac{e^{-4\pi\sqrt{5}}}{1+\cfrac{e^{-6\pi\sqrt{5}}}{1+\ddots}}}}=\left[\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt[5]{5^{\frac{3}{4}}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}-1}}-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]e^{\frac{2\pi}{\sqrt{5}}}$$

在这个公式中，我们看到了 π，e，ϕ（黄金分割数$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$和$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$）的“桃园三结义”。

拉马努金让 π，e，ϕ“三结义”还不止于此——下面的“漂亮连分式”是又一个：

$$\sqrt{\phi+2}-\phi=\cfrac{e^{-\frac{2\pi}{5}}}{1+\cfrac{e^{-2\pi}}{1+\cfrac{e^{-4\pi}}{1+\cfrac{e^{-6\pi}}{1+\ddots}}}}=0.284\,0\cdots。$$

5.5 数学与物理——对数积分和指数积分中的e

对数（函数）积分 $\mathrm{Li}x=\int_0^x\frac{1}{\ln t}\mathrm{d}t$，也叫积分对数。指数（函数）积分 $\mathrm{Ei}x=\int_{-\infty}^x\frac{e^t}{t}\mathrm{d}t$，也叫积分指数。以上两式中的 $x>0$ 时（但 $x\neq1$），在 $t=0$处取积分主值。在它们各自的上述定义中，显然都和 e 紧密相连。

在不引起混淆的前提之下，$\mathrm{Li}x$ 也可写成 $\mathrm{Li}(x)$，$\mathrm{li}x$ 或 $\mathrm{li}(x)$，在估计比 x 小的素数个数的问题中，它有着重要的应用——这将在5.6.2小节看到。

此外，在对“丢番图逼近”的研究中，有一个伯恩斯坦定理，其中也涉及“li”。

这里提到的丢番图是希腊数学家，伯恩斯坦是俄国－苏联数学家。

$\mathrm{Ei}x$ 在量子力学中也有重要应用。

“Ei”和“Li”之间的关系 $\mathrm{Ei}x=\mathrm{Li}e^x$，以 e^x 为纽带连接，也很有趣。

5.6 悄悄走近“数学王子”——素数研究中的e

本节将主要谈到素数研究中的3个问题：如何判定素数（从埃拉托

色尼的“筛法”开始），素数有多少（素数定理等），素数是如何分布的？

5.6.1 越来越先进的“筛子”

一个自然数如果没有1和它本身以外的整数因子，那它就是素数。

欧几里得在《原本》卷9命题20中，用反证法证明了素数有无穷多个（他表述为“素数的个数比任意给定的素数都多”）。所以“素数有无穷多个”被称为“欧几里得定理”。接下来的问题就是，如何判断某自然数是不是素数？

埃拉托色尼的“筛子”

古希腊数学家埃拉托色尼首先发明了鉴别素数的“筛子”——用一个个自然数去除待鉴别的数。但这个有重要应用价值的方法却没有多大理论价值，两千多年来也没有重大进展。

后来，包括中国陈景润在内的许多数学家，对埃拉托色尼筛法做出了不少有重要理论价值的改进。

借助于电子计算机，到20世纪90年代初，不大于104 395 301的素数已经有表可查；而在更早的20世纪60年代，美国已将600万个素数放进电子计算机的存储系统。至今，人们已经算出不小于10^{23}范围内的素数（为1 925 320 391 606 803 968 923个）。

5.6.2 素数定理

1. 高斯的猜测

素数有多少？这是数论中的基本问题。可是，虽然自欧几里得以来的许多著名数学家都绞尽脑汁，但却没有实质性的进展。

如果用$\pi(x)$（这里斜体的π不是圆周率）来表示不大于自然数x的素数的个数——例如用$\pi(10)=4$表示不大于10的4个素数（2，

3，5，7)，那么“素数有多少”的问题就是，找出一个用 x 来表示 $\pi(x)$ 的公式。

1989～2001 年流通的 10 德国马克纸币上的高斯像

到了 1793 年，德国数学家高斯由直觉初步看出了 $\pi(x)$ 的端倪：$\pi(x)$ 和 $\mathrm{Li}x = \int_2^x \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$ 的数量差非常小——记为 $\pi(x) \sim \int_2^x \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$。这里的 $\mathrm{Li}x = \int_2^x \frac{\mathrm{d}x}{\ln x} = \mathrm{li}x - \mathrm{li}2$ 是欧拉对数积分，而“～”表示“同阶”或“相当”。他的这个猜测，被称为素数的渐近分布定律。你看，e“莫名其妙”地出现在了似乎完全与它无关的式子之中！高斯是在根据兰伯特和自制的素数表，研究了 3 百万以内的素数表后，“由直觉”进行这一猜测的。

“由直觉”就能“看出”规律，这对高斯来说，倒不是天方夜谭。据说，他曾开玩笑说：“我从婴儿时就开始从事数学计算了。”他在小学课堂上就用等差级数求和的方法，很快算出 $1+2+3+\cdots+100=5\,050$，被人们称为“数学王子”。

2. 素数定理的确立

素数定理（律）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{x/\ln x}=1$ 又叫素数分布定理（律）或素数分布中心定理（律）。

勒让德

1）勒让德的初步形式

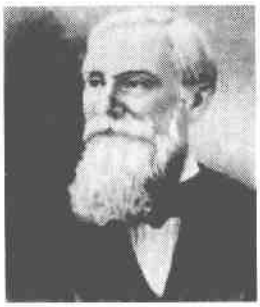
1798 年，法国数学家勒让德提出了素数定律的初步形式，1808 年又把它精确化为 $\pi(x)\approx\frac{x}{\ln x-1.083\,66}$。你看，e 的芳踪倩影再现在这

个式子中。

勒让德还宣称并在1830年再次强调，他是用归纳法发现这个非凡的定律的。可是，他并没有严格证明这个定律，所以还只能称为猜想。但是，他研究过400 000以内的素数表，这个猜想也不是瞎猜。

以上高斯和勒让德的猜测，都可以写成 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{x/\ln x}\approx 1$。

2）切比雪夫更上层楼

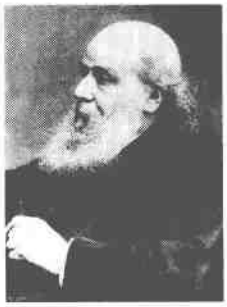


切比雪夫

在1848～1850年间，俄国数学家切比雪夫发表了一系列的论文，对 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{x/\ln x}$ 的值进行了卓有贡献的研究。其中1849年的博士论文，在假定"$\frac{\pi(x)}{x/\ln x}$ 的极限存在"的前提下，里程碑式地证明了 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{x/\ln x}=1$，这就是著名的素数定理。

在这篇博士论文的基础上，他又在当年用法文写的另一篇论文"确定小于某个数的全部素数之数目的函数"中，指出勒让德式子中的"最佳逼近值"不是1.083 66而是1，并对可以使高斯表达式和勒让德表达式都适用的 x 下限进行了估计：当 $x>1\ 247\ 689$ 时，$\frac{x}{\ln x-1.083\ 66}$ 和 $\int_2^x\frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$ 的差可以忽略不计。

但是，切比雪夫的"$\frac{\pi(x)}{x/\ln x}$ 的极限存在"这个假定，却一直没有人能证明。以至在1881年，英国数学家西尔维斯特曾悲观地评论说："我们或许要等待世界上产生这样一个人，他的智慧和洞察力像切比雪夫一样，证明自己超人一等（才能解决问题）。"



西尔维斯特

3）阿达马和普桑的突破

历史果然产生了西尔维斯特所说的、像切比

雪夫一样的“超人”。在西尔维斯特发表悲观论点之后 15 年，即切比雪夫的“假定”约半个世纪后的 1896 年，法国数学家阿达马和比利时数学家普桑各自几乎同时独立证明了 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{x/\ln x}=1$。它和 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{\mathrm{li}x}=1$ 等价。

素数定理也可以写成粗略的形式 $\pi(x)\sim\frac{x}{\ln x}$。由素数定理可以推出，第 n 个素数是 $p_n\sim n\ln n$。

高斯当年也估计了 $\pi(x)\sim\frac{x}{\ln x}$，但他认为比 $\pi(x)\sim\int_2^x\frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$ 的精度要差一些。

阿达马和普桑的证明，用了复变函数的理论和另一个人的“钥匙”。

阿达马

普桑

那么，这个人是谁，这把“钥匙”又是什么样子呢？

4）黎曼功不可没

这个人，就是德国数学家黎曼；这把“钥匙”，就是他的一篇论文中的思想。

1859 年，黎曼发表了他一生中在数论方面唯一的论文——“论小于给定数的素数个数”。就是这篇仅 8 页的论文给出的强大的

黎曼

思想武器，成了阿达马和普桑证明素数定理的“钥匙”——当然，他们还用了复变函数的理论。

可是，西尔维斯特并不知道自己发表悲观论点之前22年黎曼的这把“钥匙”。

遗憾的是，我们没有篇幅介绍黎曼的这个过于专业的数论思想——但其中的黎曼函数$\zeta(s)$将在5.10.2小节谈到。

5）赛尔伯格和厄尔多斯的初等证明

“我们必须知道，我们必将知道。”1930年，德国著名数学家希尔伯特在接受哥尼斯堡荣誉市民称号的讲演中这样满怀信心地宣称。此时，我们必须把这句也刻在他墓地的石碑上的话，送给西尔维斯特和全人类，以扬起探索未知世界信心的风帆。当然，要扬起“用初等方法证明素数定理”的风帆绝非易事——在希尔伯特讲演之后的第二年，著名解析数论大师、英国数学家哈代就说，虽然断言一个定理不能用某种方法证明是轻率的，但素数定理的证明是格外不可能的。

然而，“长风破浪会有时”——在哈代的话音落下仅仅28年之后，两位年轻小伙就“直挂云帆济沧海”。1949年，美籍挪威数学家塞尔伯格（时年32岁）和美籍匈牙利数学家厄尔多斯（时年36岁），利用塞尔伯格不等式，给出了素数定理的初等证明。塞尔格伯格也因此和其他数学成就，在1950年荣获第二次世界大战之后的首届菲尔兹奖。终生未婚，喜欢离群索居的厄尔多斯活到83岁，是20世纪最伟大的数学家之一。他没有不良嗜好，不修边幅，甚至没有家。他在60多年的流动数学生涯中浪迹天涯（“另一个屋檐，另一个证明”是他的座右铭），足迹超过25个国家，曾在60年代初和80年代中期两访中国。他同485位合作者分别发表的数学论文多达1475篇，即是因为天赋，更是由于勤奋——直到古稀之年，他每天仍工作19小时。

此外，数学家们还研究了带余项的素数定理，其中许多式子都和e有关——例如，切比雪夫的$0.921\ 29\cdots < \frac{\pi(x)}{x/\ln x} < 1.105\ 55\cdots$。

5.6.3　有趣的素数分布

1. 从勒让德开始的猜想

我们再回到切比雪夫的研究上来。

在前述切比雪夫的《论素数》中，指出当 x 很大的时候，有

$$0.921\ 29\cdots < \frac{\pi(x)}{x/\ln x} < 1.105\ 55\cdots$$

的结果。《论素数》还附带解决了著名的“伯特兰猜想”。

伯特兰猜想是法国数学家伯特兰在 1845 年提出来的：当 x 是自然数的时候，在 x 和 $2x$ 之间（含 x 和 $2x$）至少有一个素数存在。这个猜想在 1850 年被切比雪夫证明。切比雪夫还进一步猜想，当 $x>3$ 的时候，x 和 $2x-2$ 之间至少有一个素数存在。

伯特兰

容易证明，当 $n>2$ 时，n 与 $n!$ 之间必有一个素数，而更“精密”的“在 x^2 与 $(x+1)^2$ 之间必有一个素数”的猜想，以及在两个三角数之间必定有一个素数的猜想，至今都还没有被证明。

不过，更早进行这类猜想的却是勒让德。他在 1785 年就说，在每一个算术级数 $ax+b$（a 和 b 互素，$x=0, 1, 2, \cdots$）中，都有无穷多个素数。

2. 有趣的素数公式

1）“素数概率悖论”

虽然素数有无穷多个，但是素数出现的概率却为 0，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\pi(x)}{x}=0$——欧拉和勒让德已经先后证明。

“素数概率悖论”——“无穷多个素数出现的概率为 0”表明，所有的素数占自然数总数的比例几乎为 0。这看似悖谬的正确结论，无疑非常有趣。由此可见，我们应正确理解“概率”：概率为 0 的事件不一

定是不可能事件；类似，概率为1的事件不一定是必然事件。

2）追寻“素数公式”

那么，有没有能求出所有的素数简单公式呢？数学家们苦苦追寻。

1772年，欧拉找到了一个二次函数 n^2-n+41，它在 $n=0$，1，2，…，40的时候，都表示素数，但在 $n=41$ 时就“不灵”了。这里的说明是，有人说欧拉找到的是 n^2+n+41。

1798年，勒让德给出了 n^2+n+41，但在 $n=40$，41时也“不灵”了。其实，它可由 n^2-n+41 中的 n 改成 $n-1$ 得到。

荷兰数学家毕格尔给出的 $n^2-n+72\ 491$，对 $1\sim11\ 000$ 之间的自然数都能产生素数，但显然 $n=72\ 491$ 时为 $72\ 491^2$，就不是素数了。

狄利克雷

$n^2-79n+1\ 601$ 也曾被当成简单素数公式。其实，虽然 $n<80$ 时它都是素数，但 $n=80$ 时它就是合数了。

1837年7月27日，德国数学家狄利克雷在柏林科学院会议上，提交了对前述勒让德猜想的解答：他证明了样子像如 $ax+b$（a 和 b 互素，$x=0$，1，2，…）的算术级数中，包含有无穷多个素数。这被称为算术级数的素数定理，即现在所说的狄利克雷定理。他的证明利用了级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-z}$（$a_n$，$z$ 是复数）和二元二次型类数的计算等分析工具和方法，成为解析数论的开创性工作。

但是，至今人们还没有找到全部由素数组成的算术级数。

后来，数学家拉比诺维奇、威廉·米尔斯、英国数学家哈代等，都研究过素数公式。

3）原子弹专家与素数分布

“Teller-Ulam design”——在一颗原子弹上这样写着。你知道这是什么意思，又是写在哪一颗原子弹上的呢？

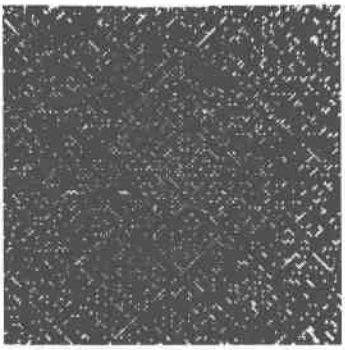
原来，“Teller”是被称为“氢弹之父”的美籍匈牙利理论物理学家爱德华·泰勒（Edward Taylor），而“Ulam”则是曾参加过美国第一颗原子弹研制的美籍波兰物理学家、数学家乌拉姆（Stanislaw Marcin Ulam），“design”是“设计”或“方案”的意思。“Teller-Ulam design”被标注在第一颗原子弹和同类原子弹上。

乌拉姆

1963 年秋，美国洛斯·阿拉莫斯科学实验室的乌拉姆在参加一个学术会议时，对冗长而缺乏新意的报告不感兴趣。为了不打瞌睡，他就在笔记本上无意之中把 1，2，3，…，100 按反时针方向排成螺旋状，以“提神”和消磨时间。当他把其中的素数圈出来的时候，惊奇地发现这些素数都排列在直线上（黑斜体数字为素数），见图 5-1。后来，他照这样把自然数排了 65 000（一说 6 500）个，上述特征依然存在。于是，他和同事斯坦因、韦尔斯一起，用当时具有最先进绘图功能的 ManincⅡ型电子计算机，把 1 000 万以内的自然数也这样排列并打印出来，结果素数仍然排列在直线的现象！

100	99	98	97	96	95	94	93	92	91
65	64	63	62	61	60	59	58	57	90
66	37	36	35	34	33	32	31	56	89
67	38	17	16	15	14	13	30	55	88
68	39	18	5	4	3	12	29	54	87
69	40	19	6	1	2	11	28	53	86
70	41	20	7	8	9	10	27	52	85
71	42	21	22	23	24	25	26	51	84
72	43	44	45	46	47	48	49	50	83
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82

图 5-1　乌拉姆表格：素数（黑斜体）排列在直线上



把 1 到 65 000 的自然数按逆时针方向螺旋排列，其中的素数（白点）分布在直线上

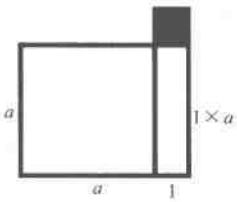
素数的这个有趣现象，被称为“乌拉姆现象”。数学家们在“乌拉姆现象”中，又找到了素数的许多趣味现象。但是，产生这个现象的原因，至今还是一个谜。

欧拉当年曾发现 a^2+a+17 在 a 为小于 16 的非负整数时，全都是素数：17，19，23，29，37，47，59，73，…，257。一个有趣的现象是，如果把它们按“乌拉姆方式”排列起来，就能看到它们排列在一条“对角线”上！

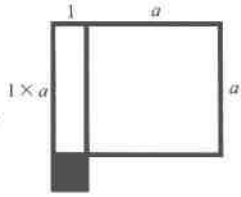
当然，这个现象很容易解释。a^2+a 恰好等于一个边长是 a 的正方形的面积加上一个 $1\times a$ 的矩形的面积，那么它的右上角或左下角（黑方块处）就恰好是下一个素数的位置——但仅限于 $0\leqslant$ 整数 $a<16$ 的范围（图 5-2）。

…	79	78	77	76	75	74	73
53	52	51	50	49	48	47	72
54	33	32	31	30	29	46	71
55	34	21	20	19	28	45	70
56	35	22	17	18	27	44	69
57	36	23	24	25	26	43	68
58	37	38	39	40	41	42	67
59	60	61	62	63	64	65	66

“欧拉素数”排列在一条对角线上



除黑方块外面积为a^2+a



除黑方块外面积为a^2+a

图 5-2

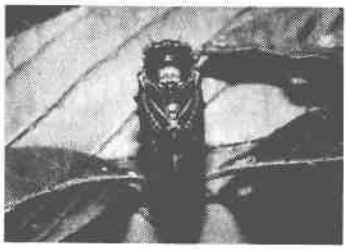
不过，数学家们至今没有找到一个简单公式，由它算出来的所有数都是素数；更没有找到能求出所有素数的简单公式。但据说已经发现了比较复杂的公式——由它算出来的所有的数都是素数。

4）好玩并有用

对素数的研究，绝不是闹着好玩。

比如，中国学者张春暄认为，素数反映了自然界在量的方面的某种稳定性，并由此提出了以“素数原理”和“对称原理”为基础的“多稳定性理论”。素数原理是指由素数个基本单位构成的多体结构，是有极性的稳定系统——例如电荷的正、负。对称原理是指由双奇素数个基本单位构成的多体结构，是中心对称的稳定系统——例如原子结构。

又如，北美洲北部地区的“素数蝉”现象——一种“布鲁德X蝉”大多在素数年（17年或13年）从地下爬出。这种“生命的素数现象”，从1634年开始就有记载。研究者认为，这是蝉为了避开与天敌的生命周期重合的生存法则。



蝉在素数年从地下爬出避开天敌

5.7 从麦齐里阿克到陈景润——华林-哥德巴赫猜想中的e

5.7.1 不好解答的“1+1”

1. 公使出的数学题目

一个德国人出生在哥尼斯堡（今俄罗斯加里宁格勒），长大后学的是法律，当了22年（1742~1764年）的常驻俄国公使。然而，就是这位遍游欧洲、成就并不大的数学家，却出了一道至今全世界都没有完全解答出来的难题。

这个德国人，就是名扬至今的哥德巴赫。

1742年6月7日，哥德巴赫在写给欧拉的信中提出了一些猜想

（用现代语言表示）：①每个不小于6的偶数都是两个奇素数的和——通常称为“偶素数哥德巴赫猜想”；②每个不小于9的奇数都是都是三个奇素数的和——通常称为“奇素数哥德巴赫猜想”或“三素数猜想”。欧拉在6月30日回信认为这个猜想可能成立，并作了补充：只需说每个大于2的偶数都是两个素数之和就行了。这就是著名的“哥德巴赫猜想”，通常简称“1+1”。

哥德巴赫

2. 向着答案前进

1937年，维诺格拉多夫用改进了的哈代和李特伍德等在20世纪20年代创立的“圆法”，和他本人独创的“三角和估计法”，基本上完全证明了②，使三素数猜想成为“三素数定理”。但对①的证明却进展甚微。

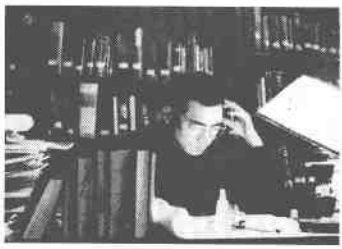
当然，在维诺格拉多夫之前和之后，世界各国的不少数学家都为“1+1”作出了许多贡献。

3. 中国人“移动了群山”

对“1+1”最好的结果，是陈景润在1966年（1973年简化并得到国际上的承认）证明的“1+2”——似乎距离摘下“皇冠”（高斯说“数论是数学的皇后”）上的“明珠”仅咫尺之近。

陈景润这“移动了群山”的成果，立即轰动了全球数学界。此时，一本叫《筛法》的书，正在印刷中……

消息传到出生在捷克斯洛伐克的英国著名数学家哈尔伯斯坦那里，他立即托人从香港找到了陈景润论文的复印件，马上被印进《筛法》，作为第十一章“陈氏定理”。《筛法》由他和德国数学家李希特合著。



陈景润

然而，1966年之后40多年过去了，这“咫尺之近”还没有走完——也许，这“明珠”还“远在天涯”……

看来，要到达“顶峰”“1 + 1”，还不能局限于改进筛法，而应有方法上的突破。于是，我们想起了《西厢记》中【仙吕】【点绛唇】里的名句：“望眼连天，日近长安远。”

5.7.2　华林的难题

1. 麦齐里阿克和华林出的难题

1770 年，英国数学家华林出版了《代数沉思录》一书。在书中的第 204 ~ 205 页，他也发表了一个猜想：任何一个自然数都表示成 4 个平方数的和，不超过 9 个立方数的和，不超过 19 个 4 方数的和，等等。并把哥德巴赫猜想首次公之于世。

进一步，华林又提出：任何（后来改为“充分大的”）一个自然数都能用不超过 r 个自然数的 k 次幂的和来表示，其中 r 依赖于 k。这些，他都没有给出证明。

华林

100 多年后的 1909 年（一说 1908 年），德国数学家希尔伯特才用多重积分巧妙地证明了华林猜想，实现了这个问题的重大突破。不过，他涉及庞大的数值，方法（被称为希尔伯特定理）也比较复杂，在近代数论发展中没有找到进一步的应用。

后来，数学家们又把它推广成广义华林问题。

不过，还有一位比华林更早的“华林”——法国科学院的数学家麦齐里阿克。他在早于华林 100 多年研读丢番图的《算术》一书时，就提出了华林猜想的一个特殊情形：从 4 开始的任何非平方数，都可以分解成 2 个、3 个或 4 个平方数的和。

华林猜想与哥德巴赫猜想密切相关，所以有人把它们连在一起称为华林 - 哥德巴赫猜想。

2. 华林问题与 e

在有关华林问题的研究中，含 e 的式子很多。例如，数学家们把不

能表示为两个奇素数之和的偶数称为“哥德巴赫例外数”，并用 $E(x)$ 来表示不超过 x 的哥德巴赫例外数的个数，那就有含 e 的式子

$$E(x) = O\left(\frac{x}{(\ln x)^A}\right) \quad (A \text{ 是正数})。$$

用它可以推出，几乎所有的偶数都可以表示成两个奇素数的和。

这个式子是在 1937 年前后，由以下 5 位数学家各自独立用维诺格拉多夫的一个猜想的思路证明的：中国华罗庚、俄国 - 苏联邱达可夫、德国 - 加拿大海尔布隆、荷兰科普特和英国埃斯特曼。

华罗庚

3. 华林问题的进展

在华林问题上，包括华罗庚和陈景润在内的几位中国数学家取得了一系列的重要成果。

1938 年，华罗庚把哈代等用“圆法”得到的成果改进为含 e 的“华氏不等式”。

1942 年，苏联数学家林尼克取得了又一次重大突破——发明了“大筛法”。

1948 年，匈牙利数学家瑞尼用林尼克的大筛法证明了含 e 的一个式子。

1958 年，陈景润在华林问题的研究中得到 $G(k) \leqslant k(3\ln k + 5.2)$ 的结果。19 年以后，英国数学家瓦恩把它改进为 $G(k) \leqslant k(3\ln k + 4.2)$，这里又有 e。

1972 年，瓦恩证明了存在常数 $c > 0$ 使得 $E(x) = O(x\mathrm{e}^{-c\sqrt{\ln x}})$。这个也含 e 的公式，是对上述公式的发展。

而在陈景润和瓦恩之前的公元 1947 年，林尼克就得到了 $g(3) \leqslant 7$ 的结果。

1964 年和 1974 年，陈景润还分别证明了 $g(5) = 37$ 和 $g(4) \leqslant 27$。1985 年，印度数学家巴拉苏布兰马尼安将陈景润证明 $g(5) = 37$ 的方法加以改进，得到 $g(4) \leqslant 20$。1986 年，巴拉苏布兰马尼安、法国数学家

戴舍尔和德莱斯最终证明了 $g(4)=19$。

5.7.3　“纯数学问题”有用吗

有人认为，研究像华林－哥德巴赫猜想这类“纯数学问题”“毫无意义”——“没有”任何应用价值或“经济效益”。这种看法对吗？

1917 年，奥地利数学家拉东在积分几何研究中引进的一个数学变换，后来成了当今医学上 XCT（X 光断层扫描仪）的理论基础。这一变换在 X 光天文学中也有重要应用。

中国科学家王选发明的精密汉字激光照排系统的科学依据，早先认为是一个“数学游戏”。

……

当然，我们无法对上述实例“未卜先知”，但“科学像金子，总会闪光”。

由此可见，“毫无意义”论反映出目光短浅或急于求成。

1971 年 5 月 15 日尼加拉瓜发行的“1＋1”邮票

可是，拿着“科学望远镜”的人却不这样急功近利。

1986 年，美籍华裔数学家陈省身在香港中文大学作“什么是几何”的报告中说：中国千余年来发展不快，在于中国数学太注重实践，而忽略了许多暂时没有应用的理论。

2004 年的诺贝尔物理学、化学、生理学或医学以及经济学奖，几乎被视为现在是没有什么作用的科学。

……

匈牙利－美国数学家詹姆斯·罗伊·纽曼曾说：“数学最抽象无用的研究被人们发现以后，常常被其他部分所俘获，成了解决问题的工具。我想，这不是偶然的，就好像一个人戴了一顶高帽子去参加婚礼，后来在火灾时发现它居然可以当水桶用。”这就是我们不能放弃研究华林－哥德巴赫猜想这类问题的理由。

对任何数学甚至所有的科学理论，都应该持这样的态度。

5.8 吉利斯猜想——梅森素数个数中的 e

截至 2009 年 4 月 12 日，一共发现了 47 个梅森素数（表 5-1）。注意，这一天发现的“※M_{46}”比此前 2008 年 8 月 23 日发现的“※M_{47}”小。在这里和表 5-1 中标有“※”的数表示，不知道“※40”和“※M_{47}”之间还有没有其他梅森素数。梅森是一位法国数学家、修道士。

表 5-1

序号	n	$M_n=2^n-1$	发现时间	发现人
1～4	2，3，5，7	3，7，31，127	古代	古代人
5	13	8191	1456 年或 1461 年 1536 年 1588 年或 1603 年	无名氏 雷古斯 意大利卡塔尔迪
6	17	131 071	1598 年或 1603 年 1644 年	卡塔尔迪 法国梅森
7	19	524 287	1606 年或 1603 年 1644 年	卡塔尔迪 梅森
8	31	2 147 483 647	1772 年	瑞士欧拉
9	61	2 305 843 009 213 693 951	1883 年	俄国彼尔武申
10	89	27 位数	1911 年	鲍威尔斯（一说福克贝尔古也独立找到）
11	107	33 位数	1914 年	鲍威尔斯，福克贝尔古
12	127	39 位数	1876 年	法国鲁卡斯
13	521	157 位数	1952 年 1 月 30 日	美国罗宾森和雷默
14	607	183 位数	1952 年 1 月 30 日	罗宾森和雷默
15	1 279	386 位数	1952 年 6 月 25 日	罗宾森和雷默

续表

序号	n	$M_n=2^n-1$	发现时间	发现人
16	2 203	664 位数	1952 年 10 月 7 日	罗宾森和雷默
17	2 281	687 位数	1952 年 10 月 9 日	罗宾森和雷默
18	3 217	969 位数	1957 年 9 月 8 日	瑞典里塞尔
19	4 253	1 281 位数	1961 年 11 月 3 日	美国亚历山大·霍尔维茨
20	4 423	1 332 位数	1961 年 11 月 3 日	阿道夫·霍尔维茨
21	9 689	2 917 位数	1963 年 5 月 11 日	加拿大吉利斯
22	9 941	2 993 位数	1963 年 5 月 16 日	吉利斯
23	11 213	3 376 位数	1963 年 6 月 2 日	吉利斯
25	21 701	6 533 位数	1978 年 10 月 30 日	美国诺尔和尼克尔
26	23 209	6 987 位数	1979 年 2 月 9 日	诺尔
27	44 497	13 395 位数	1979 年 4 月 8 日	美国斯洛温斯基和赖尔森
28	86 243	25 962 位数	1982 年 9 月 25 日	斯洛温斯基
29	110 503	33 265 位数	1988 年 1 月 28 日	科尔基特和小威尔士
30	132 049	39 751 位数	1983 年 9 月 20 日	斯洛温斯基
31	216 091	65 050 位数	1985 年 9 月 6 日	斯洛温斯基
32	756 839	227 832 位数	1992 年 2 月 19 日	斯洛温斯基和盖奇
33	859 433	258 716 位数	1994 年 1 月 10 日	斯洛温斯基和盖奇
34	1 257 787	378 632 位数	1996 年 9 月 4 日	斯洛温斯基和盖奇
35	1 398 269	420 921 位数	1996 年 11 月 13 日	法国阿曼高德和美国沃尔特曼
36	2 976 221	895 932 位数	1997 年 8 月 24 日	英国斯潘塞和美国沃尔特曼
37	3 021 377	909 526 位数	1998 年 1 月 27 日	美国克拉克森、沃尔特曼、库洛夫斯基
38	6 972 593	2 098 960 位数	1999 年 6 月 01 日	印度哈依拉特瓦拉，美国沃尔特曼、库洛夫斯基

续表

序号	n	$M_n=2^n-1$	发现时间	发现人
39	13 466 917	4 053 946 位数	2001 年 11 月 14 日	加拿大卡麦伦，美国沃尔特曼、库洛夫斯基
※40	20 996 011	6 320 430 位数	2003 年 11 月 17 日	美国沙夫、沃尔特曼、库洛夫斯基
※41	24 036 583	7 235 733 位数	2004 年 5 月 15 日	美国芬德利、沃尔特曼、库洛夫斯基
※42	25 964 951	7 816 230 位数	2005 年 2 月 18 日	德国诺瓦克，美国沃尔特曼、库洛夫斯基
※43	30 402 457	9 152 052 位数	2005 年 12 月 15 日	库柏、美国斯蒂文·布恩、库洛夫斯基，法国托尼·莱克斯独立验证
※44	32 582 657	9 808 358 位数	2006 年 9 月 4 日	库柏、斯蒂文·布恩、库洛夫斯基
※45	37 156 667	11 185 272 位数	2008 年 9 月 6 日	德国埃尔维尼赫等
※46	42 643 801	12 837 064 位数	2009 年 4 月 12 日	挪威奥德·斯特林德莫
※47	43 112 609	12 978 189 位数	2008 年 8 月 23 日	美国埃德森·史密斯等

注：序号 1 ~ 12 的 M_n 是人工计算，其余用电子计算机计算；现在不知道 M_{39} 和 M_{47} 之间是否还有未知的 M_n，所以在序号之前用※标出；从第 35 个起的发现者，都是 GIMPS 组织的成员。

梅森素数研究中的一个问题是，在某个自然数范围内有多少个梅森素数？

在估计梅森素数的个数问题上，已有如下“吉利斯猜想”：小于 m 的梅森素数的大约个数 $k=2\ln(\ln m)/\ln 2$。你看，e 在意想不到的场合出现了！这个猜想是第 21 ~ 23 个梅森素数的发现人——加拿大数学家吉利斯在 1964 年首先提出的。

利用吉利斯猜想，就能事先大致判断出某个自然数范围内的 k，使数学家们在寻找时不容易遗漏。例如，要预测 22 亿以内的梅森素数，就大约是 $k=2\ln(\ln 2.2\times10^9)/\ln 2\approx 9$（个）——与实际的 8 个基本吻合。

在关于素数分布的猜想中，中国人也有重要成果。从 1977 年在雷州半岛当“知青”时开始，经过 15 年探索之后的 1992 年 2 月 26 日，中国青年（后来成为数学家兼语言学家）周海中发现了比较精确的、梅森素数分布的“周氏猜想”——一个国际数学界的命名。对此，著名的《科学美国人》杂志撰文评论说，“这一成果是梅森素数研究中的一项重大突破”。

在梅森素数 M_n 的研究中，有许多有趣的谜。

例如，目前知道的 10 000 位以上的大素数不少于 20 个，但“奇怪”的是，它们绝大多数是 M_n。少数不是 M_n 的两个例外分别是：1951 年，英国数学家和计算机先驱米勒和维勒，用仅有 5k 内存的 EDSAC 计算机（不如现在的一般计算器）发现的长 79 位的 $80(2^{127}-1)^2+1$；1990 年初，由美国数学家 J. 布朗等发现的一个 65 087 位素数 $2^{216\,193}\times 391\,581-1$。那为什么人们难以发现其他形式的大素数呢？

又如，既然发现了这么多 M_n，那么梅森数中的 M_n 究竟有多少——例如，是不是无限多呢？遗憾的是，这个问题至今还没有解决。

研究梅森素数，不但好玩，还能促进科学技术的发展，也有许多实际用途。例如，推动数论的发展，促进计算数学、程序设计技术、分布式计算技术、网格技术、Internet 技术的发展，利于快速傅里叶变换的应用，编制密码等。所以，从 1996 年起，全世界的“梅森迷”就利用免费电脑资源“全球因特网梅森素数大搜寻”（GIMPS），联合起来寻找越来越大的梅森素数。至今，这个快乐的“梅森迷”队伍，已有 170 多个国家和地区的近 20 万人。

索托伊

英国著名数学家、牛津大学教授索托伊甚至认为，梅森素数的研究是人类智力发展在数学上的一种标志，也是科学发展的里程碑。

5.9 半个世纪的积分探索——欧拉积分与e

1729年，欧拉以无穷乘积

$$\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}$$

定义了函数Γ（x）。

1731年，欧拉在研究插值问题时，提出了样子像

$$\Gamma(n+1)=\int_0^{\infty}x^n e^{-x}dx \quad [\text{或}\ \Gamma(n)=\int_0^{\infty}x^{n-1}e^{-x}dx],$$

$$B(m,n)=\int_0^{\infty}x^n e^{-x}dx$$

这两个含有e的积分的问题（其中m，n都是正数）。

欧拉为了把整数阶乘概念推广到任意非负数的情况，找到了一个对任意非负数n都成立的$n!$都成立的表达式

$$n!=\int_0^1(-\ln x)^n dx,$$

可以看出，e又出现在这个式子中。

半个世纪以后的1781年，欧拉终于给出了这个含有阶乘和e的现今形式：

$$\int_0^{\infty}x^n e^{-x}dx。$$

后来，法国数学家勒让德引进了记号$\Gamma(n+1)=n!$，并把$\Gamma(x)$称为Γ函数或欧拉第二（类）积分。后一个名称是因为当x是正实数的时候，$\Gamma(x)=\int_0^{\infty}x^n e^{-x}dx$。现在则把它叫做阶乘函数。

Γ函数有许多用途。例如，

$$\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{n-1}dx=\Gamma(n),$$

$$\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$\int_0^{\infty} e^{-kx}x^{n-1}dx = \int_0^1 x^{k-1}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{n-1}dx = \frac{\Gamma(n)}{k^n}。$$

Γ 函数的一个趣味性质是 $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$。例如，$\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$（这里的 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ 又是一个 e 和 π “亲密接触”的例子）。事实上，这里的 $\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ 就是前面的 $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$。

此外，俄国数学家闵可夫斯基，在用几何方法研究 n 个变元的正二次型的约化问题时，就用到 Γ 函数的渐近表达式，得到了对 n 维空间估计式 $M<\frac{2n}{\pi e}\sqrt[n]{n\pi e^{1/(3n)}}\times\sqrt[n]{D}$，这个式子中也有 e。

5.10　蠕虫能“如愿以偿”吗——欧拉常数中的 e

5.10.1　不老蠕虫爬长绳

假设有一条蠕虫，以 1 厘米/秒的速度在一根长 1 米的橡皮绳上从一端爬向另一端。每当蠕虫爬完 1 厘米，橡皮绳就瞬间伸长 1 米。

如果橡皮绳可以无限伸长，蠕虫也“长生不老”，试问：蠕虫能爬到绳子的另一端吗？

蠕虫爬1米长橡皮绳　　蠕虫爬时橡皮绳在伸长

乍一想，这蠕虫似乎永远也爬不到绳子的另一端，因为橡皮绳增长的速度（1 米/秒）远大于蠕虫爬行的速度 1 厘米/秒。

不过，我们还是别先下结论——算算再说。

首先，橡皮绳每秒钟伸长 1 米，这种伸长是均匀的，而绳子伸长时，虫子爬过的那段也随之伸长。这样：

第 1 秒末，绳子长 1 米，蠕虫爬 1 厘米即绳长的 1/100；

第 2 秒末，绳子长 2 米，蠕虫在这一秒又爬了 1 厘米，即绳子长的

1/200。当然，此时第 1 秒钟蠕虫爬的长度也随之变长，而且它所占绳子长的比例 1/100 不变；

……

类似，蠕虫在第 n 秒爬了绳子长的 $1/(100n)$。

于是，前 n 秒内蠕虫总共爬了绳子长的

$$\frac{1}{100}+\frac{1}{200}+\frac{1}{300}+\cdots+\frac{1}{100n}=\frac{1}{100}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)。$$

显然，如果蠕虫爬的长度 $l_n\geqslant 1$，那就说明蠕虫已经爬到了绳子的另一端。

由于 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 是发散的，所以让 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\geqslant 100$ 是可能的。所以，就归结为如何计算调和级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=? \tag{5-10}$$

的问题。

一位学者经过计算，得到 n 在 $2^{143}\sim 2^{144}$ 秒之间的结果，即 $>2^{143}$ 秒时，蠕虫爬到了绳子的另一端。当然，这是一个天文数字，但蠕虫是“长生不老”的。

另一位学者将（5-10）变成

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k}&=\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\\&\quad+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)\\&>\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\\&\quad+\underbrace{\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)}_{2^{k-1}\text{项}}\\&=1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{k\text{项}}\end{aligned}$$

$$= 1 + \frac{k}{2}。$$

当 $k = 198$ 时，$1 + \frac{k}{2} = 100$，于是

$$\frac{1}{100}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{198}}\right) > 1。$$

所以，不超过 2^{198} 秒，蠕虫就爬到了绳子的另一端。

“$>2^{143}$ 秒”和“不超过 2^{198} 秒”的两个结果，是吻合的——准确值是 e^{100} 秒，即约为 2.7×10^{43} 秒。

5.10.2 欧拉常数藏玄机

1. 欧拉发现玄机

蠕虫爬的时间，为什么会得到一个包含 e 的结果——e^{100} 秒呢？

1734 年，欧拉在一篇文章中给出了用对数函数求（5-10）的有限多项和的方法是

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln(n+1) + c。$$

其中 c 就是著名的欧拉常数（也叫欧拉－洛伦常数或欧拉－马歇罗尼常数）——继 π，e，φ 之后最重要的常数之一。至今，c 已被算到超过小数点后 29 844 489 545 位。这里的洛伦或马歇罗尼，都是指是意大利数学家洛伦·马歇罗尼。

1740 年，欧拉发现 c 的值依赖于 n；但是，当 n 很大的时候，n 的值并不怎么影响计算的结果。也就是说，他发现了

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - \ln n\right] \tag{5-11}$$

个极限存在，即它是一个常数，这个常数就是 c。看，e 就出现在欧拉常数中了。

1790 年，马歇罗尼用小写希腊字母“嘎马”γ（gamma）来代替 c。这样，（5-11）就变成欧拉常数 $\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right)$。

从前面我们计算蠕虫爬的时间所用的式子中可以看出，时间答案 e^{100} 之中含 e 就很自然了。

2. 证明（5-11）存在极限 c

当 $0<x<1$ 时，由 e^x 的泰勒展开式 $e^x=1+x+x^2/2!+x^3/3!+\cdots$，可以得到

$$1+x<e^x<1+x+x^2+x^3+\cdots=\frac{1}{1-x},$$

所以有

$$\ln(1+x)<x<-\ln(1-x)。\tag{5-12}$$

把 $x=1/2$，$1/3$，…，$1/n$ 分别代入（5-12），让两端各自分别相加、化简，并且应用对数的性质，就得到

$$\ln\frac{n+1}{2}<\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<\ln n。\tag{5-13}$$

把（5-13）两边分别加上 $1-\ln n$，就得到

$$1+\ln\frac{n+1}{2n}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n<1。\tag{5-14}$$

再设 $c_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$，从 $c_{n+1}-c_n=\frac{1}{n+1}+\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)>0$，就知道 $c_{n+1}>c_n$，即 c_n 是单调增大的。

又由（5-14）知道 $1+\ln\frac{1}{2}<c_n<1$，即 $|c_n|$ 有界，所以序列 $|c_n|$ 有极限。

设这个极限是 c，那么 $c=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\ln n\right]$ 或 $c=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)$，这就证明了（5-11）存在极限 c；而且，还证明了其中的 $1-\ln 2<c<1$ 即 $1-0.693\,147\cdots<c<1$ 或 $0.306\,852\cdots<c<1$。

3. 用途广泛的“欧拉发现”

1）“（5-11）存在极限”的用途举例

计算调和级数 $1+1/2+1/3+\cdots+1/n$ 的和。

(5-11)存在极限表明,当 n 足够大的时候, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$ 和 $\ln n$ 相当。例如,(5-10)的前1 000项精确到0.001时的值是7.485 470…,而 $\ln 1\,000=6.907\,755\cdots$,它们之间的差值小于0.577 715…,相对误差不超过±0.05%;所以

$$\ln 1\,000<7.485\,470\cdots<0.577\,715\cdots+\ln 1\,000。$$

显然,用(5-11)存在极限这个“欧拉发现”,可以快速计算调和级数 $1+1/2+1/3+\cdots+1/n$ 的和。

2)欧拉常数用于微积分

(5-11)的极限——欧拉常数 γ,是微分学中几个重要极限之一,用途非常广泛,许多无穷级数的问题都可以用它解决。例如,利用 $\gamma=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\ln n\right]$ 就能证明

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=\ln 2,$$

以及

$$\sum_{n=1}^{\infty}1+\frac{x^n}{1+1/2+1/3+\cdots+1/n}$$

的收敛区间是[-1,1]。

此外,γ 和 Γ 函数、雅格布·伯努利数 B、黎曼函数 $\zeta(s)=1+1/2^s+1/3^s+\cdots$,都有密切的联系。

使人惊叹的是,德国数学家魏尔斯特拉斯发现的一个著名等式

$$\frac{1}{\Gamma(x)}=xe^{\alpha x}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}$$

中,不但有 Γ 函数和e,而且有欧拉常数 γ。这个式子,又叫魏尔斯特拉斯标准型。

魏尔斯特拉斯

1735~1771年,欧拉的右、左眼先后失明,成了一个“瞎子”。所以,γ 被戏称为潜入“瞎子”的数。

5.11 自然数“切蛋糕”——“整数分拆”也要靠e

5.11.1 自然数的“整数分拆”

1. 如何“整数分拆”自然数

在数论的解析数论这个分支中，又有一个叫堆垒数论即加性数论的小分支。堆垒数论中的一个著名问题是整数分拆。

什么是分拆（partition，中国杂志《自然辩证法通讯》1982年第3期第57页称为“分析”）呢？把任意自然数 n 分成若干个自然数的和，就称为“n 的一种分拆”。通常，用 $p(n)$ 来表示 n 的所有不同的分拆的个数——称为“分拆数”（number of partitions）。分拆的规则是，不计较被分拆的数的顺序，并允许重复出现。问有多少种分法。这就像“切蛋糕”类似——按照一定的规则，一块蛋糕有多种切法。

例如，当 $n=2$ 时，分法只有 $2=1+1$ 这1种，即 $p(2)=1$。又如，当 $n=5$ 时，就有 $5=4+1=3+2=3+1+1=2+2+1=2+1+1+1=1+1+1+1+1$ 这6种分法，即 $p(5)=6$。在这两个例子中，有人把2和5本身也算作一种，这样 $p(2)=2$，$p(5)=7$。

当然，我们可以按照这两个例子的方法，对任意 n 进行实际分拆，从而求得 n 的 $p(n)$。

2. 计算 $p(n)$ 是一个有趣的难题

但是，我们很快就会发现，分拆较大的 n 非常困难——$p(n)$ 会随 n 的增加而急剧增大。例如，当 $n=10$ 时，$p(n)=42$；而当 $n=100$ 时，$p(n)=190\ 569\ 292$。因此，现在的问题是，有没有什么方法能较快得到 $p(n)$；或者问：有没有计算 $p(n)$ 的公式？

由于 $p(n)$ 等于 n 阶对称群的共轭类的个数，并与这个群的表示理论密切相关，所以非常有趣，也让“无数英雄竞折腰”。

5.11.2 从欧拉到波斯特尼科夫

1. 欧拉的“五角定理”和“高斯密码”

1848年，欧拉给出了一个恒等式

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n[x^{\frac{n}{2}(3n-1)}+x^{\frac{n}{2}(3n+1)}]。$$

由于这个恒等式中的（$n/2$）（$3n-1$）是“五角数”，所以这个恒等式被称为“五角定理”。所谓“五角数”，又叫“五角形数”或“五边形数”，是这些数字的点子可以排成五边形（图5-3）。

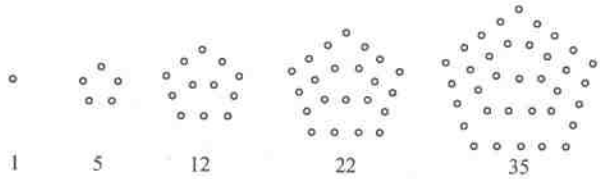


图5-3 头5个五角数1，5，12，22，35的点子都可以排成五边形

五角数是“角形数”的中的一种。有关角形数研究，还有一段高斯的趣闻呢！

原来，从古希腊毕达哥拉斯学派开始，就在研究三角数、四角数、五角数等“角形数”。高斯也是“爱好者”之一。1796年7月10日，他在日记上写下了“高斯密码”：

ΕΓΡΗΚΑ！num = △ + △ + △。

这里，ΕΓΡΗΚΑ是希腊文“知道了”的意思——当年阿基米德在洗澡时发现浮力定律后，赤身裸体地跑到大街上，就是这样“疯喊”的。由此可见高斯得到这个式子的狂喜之情。

高斯得到了什么式子而狂喜呢？原来，西文“num”是“数”的缩写，“△”表示“三角数”。这就是说，他证明了有趣的“高斯密码”——“一个自然数可以表示成3个三角数的和”，当然应该像阿基米德那样“疯狂”一把。后来，他还证明“一个自然数可以表示成4个四角数的和”。

但是，数学家们接下来的研究仅限于初等方法，没有引入实质性的分析学思想，只能频繁地计算较小整数的分拆数。

2. 哈代和拉马努金的突破

首先在这方面研究取得重大突破的是英国数学家哈代和印度数学家拉马努金。1918 年，他们联名发表了论文《组合分拆的渐近公式》，借助于一个了不起的恒等式，证明了可以选择适当的正数 A 和 B，使得

$$\frac{A}{n}e^{2/\sqrt{n}} < p(n) < \frac{B}{n}e^{2\sqrt{2n}} \quad (\text{其中 } n \geqslant 1)$$

成立。

拉马努金和哈代还应用了一种新的分拆方法——“圆法”，得到哈代 - 拉马努金公式

$$p(n) \sim (4\sqrt{3}n)^{-1}e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}。$$

不过，也有人说它最早是欧拉发现的。

看，在这些关于分拆的式子中，e 又披着神秘的面纱奇迹般地出现了！

利用哈代 - 拉马努金公式，用 8 项就能求出 $p(200)$ 的值，相对误差误差仅为 0.4%。

3. 拉德马赫尔乘胜追击

1937 年和 1943 年，出生在德国的美国数学家拉德马赫尔给出了更准确的 $p(n)$ 公式：

$$p(n) = 2\sum_{q=1}^{\infty}\sqrt{q}L_q(n)(u_q + v_q),$$

其中

$$u_q + v_q = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\left(\frac{1}{\lambda_n}\mathrm{sch}\frac{k\lambda_n}{q}\right), \quad \lambda_n = \sqrt{n - \frac{1}{24}}, \quad |L_q(n)| < 2q^{\frac{5}{6}}。$$

1954 年，拉德马赫尔又进一步利用整函数

$$L_v(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!\Gamma(v + n + 1)},$$

得到 $p(n)$ 更准确的级数展开式

$$p(n) = 2\pi\left(\frac{\pi}{12}\right)^{\frac{3}{2}}\sum_{k=1}^{\infty}A_k(n)k^{-\frac{5}{2}}L_{\frac{3}{2}} \times \left[\left(\frac{\pi}{12k}\right)^2(24n-1)\right],$$

并用所谓“Ford圆”当成积分周线，给出了“极其巧妙的证明”。

4. 华罗庚更上层楼

1942年，中国数学家华罗庚用拉马努金和哈代的方法，以及拉德马赫尔的无穷级数法里的分割法，证明了

$$p(n) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{(h,k)=1}\omega_{h,k}e\left(-\frac{hn}{k}\right)\times\frac{d}{dn}J_0\left(\frac{i\pi}{k}\left[\frac{2}{3}\left(n+\frac{1}{24}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right),$$

其中$2k$，$0<h\leqslant k$，$J_0(x)$为0级贝塞尔函数。

贝塞尔是一位德国天文学家和数学家。贝塞尔函数，是指贝塞尔方程$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0$（其中n是参数）的解。贝塞尔函数具有许多奇特的性质和成百个重要关系式，为解决有关物理和天文问题提供了重要工具，对它们的研究成果已形成一些专著。

德国1984年6月19日发行的纪念贝塞尔诞辰200周年邮票

5. 没有浪费的“欧拉表情”

匈牙利-美国数学家厄尔多斯在1942年、美国数学家唐纳德·詹姆斯·纽曼在1951年、苏联数学家波斯特尼科夫，都利用初等函数论的方法证明了

$$p(n) = (4\sqrt{3}n)^{-1}e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}[1+O(n^{-\frac{1}{4}}\ln n)],$$

这里，$O(n)$表示n次正交（变换）群。

以上华罗庚、厄尔多斯等的$p(n)$公式中都含有e。

把五角定理的两端乘以$p(n)$的母函数，并比较系数，就可以得到

$$\sum_{0\leqslant\omega_k\leqslant n}(-1)^{k-1}p(n-\omega_k) = 0,$$

其中$\omega_k=(k/2)(3k-1)$（$k=0, \pm1, \pm2, \cdots$）就是前面提到的五角数。

这样，欧拉当年浪费的“五角定理表情”被厄尔多斯、唐纳德·詹姆斯·纽曼和波斯特尼科夫找回来了。

马克马洪

利用上述公式，就可以逐次求出 $p(n)$ 的值。事实上，在 1916 年，英国计算专家、数学家和物理学家马克马洪仅花了一个月，就用它算到 $n=200$ 时的 $p(200)$ 值——一个 13 位数3 972 999 029 388。后来，人们又算出 $p(500)$ 是一个 22 位数。

6. 分拆问题的趣味和谜团

分拆问题中有许多趣味问题。例如，把一个自然数分拆成若干个连续自然数之和，就是其中的一个。例如，605 就有以下 5 种分拆法：302 + 303，119 + 120 + 121 + 122 + 123，56 + 57 + … + 65（共 10 个数），50 + 51 + … + 60（共 11 个数），17 + 18 + … + 38（共22 个数）。那么，这样的数有多少，又能否用公式寻找它们呢？这是一个有趣的谜团。

不但分拆问题如此，数论中的许多其他问题也是难解之谜。正如日本著名数学家弥永昌吉所说：“这个理论的大部分仍然笼罩在神奇的面纱之下。”

数论是“其他科学的典范，”德国数学家希尔伯特说，“数学知识的永不枯竭之泉，并且对其他一切领域的研究提供了不断的刺激。”所以至今仍然是数学家们研究的“热点”、难点和重点——例如著名的“1 + 1”就是其中的一个。

5.12 对数正态分布——概率论中的 e

5.12.1 从钢丝长度到智商指数

1. 钢丝的长度

把长 10 厘米的尺子放在面前。一边目测尺子，一边从一卷钢丝上

切下一根根 10 厘米长的钢丝。

开始切下的 100 根，长短不一，误差较大。当切下的数目不断增加，200 根，400 根，800 根……时，切下的钢丝的长度基本上就会以某个值为中心，其他值就会分布在这个值附近。

设切下的钢丝长度为 x 厘米，x 是个概率变量。测量切下来的钢丝长度是个实际问题，希望测量精度很高比较困难。因此一般将测量理想化，把 x 取为连续变量，x 可取 10 附近一切实数值。

这样的概率变量叫“连续概率变量”。

此外，像物体的个数或现象发生的次数是一些离散的数值，取离散值的概率变量叫“离散概率变量”。

连续概率变量 x 可以取多种值，因此很难说取某个特定值的概率是多少，并认为那种概率为 0。因此，一般分析计算连续概率变量的概率分布时，不使用等式 $x=a$，而用不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 来描述。也就是说，一般只计算 p（$a\leqslant x\leqslant b$）是多少就行了。

2. 智商指数

人的智商指数也可看为连续概率变量。

表 5-2 是对 1 000 个学生智商调查结果的智商密度分布表。

表 5-2

智商指数 x	密度/个	相对密度/%
55 ~ 65	3	0. 3
65 ~ 75	21	2. 1
75 ~ 85	90	9. 0
85 ~ 95	295	29. 5
95 ~ 105	330	33. 0
105 ~ 115	201	20. 1
115 ~ 125	54	5. 4
125 ~ 135	5	0. 5
135 ~ 145	1	0. 1
合计	1 000	100

图 5-4 是由表 5-2 绘制的智商密度分布的直方图和折线图。各区间

细长的长方形面积代表相对密度。

图 5-5 是将图 5-4 中折线平滑后所得的密度分布曲线。

当被调查的学生人数不断增加时，就会变成图 5-5 那样左右对称的“山形”或称“吊钟形”光滑曲线。这种分布曲线，叫“正态分布曲线”，是连续概率变量分布曲线的代表。以身高、体重等为代表的很多自然现象和社会现象的分布曲线就属于这种情况。

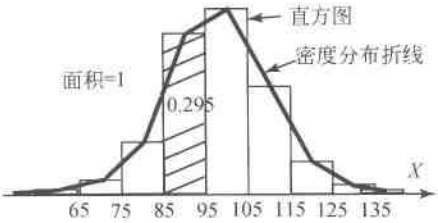


图 5-4

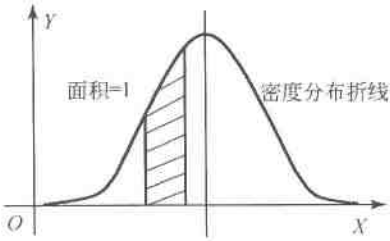


图 5-5

这种分布曲线，可以用高斯正态分布公式

$$f(x) = (\sqrt{2\pi}\sigma)^{-1} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

来描述，其中 $x \in \mathbf{R}$；a 是平均值，σ 是标准误差，且 $\sigma > 0$，σ^2 是方差，它们都是常数。你看，e 在这里出现了。

5.12.2 概率论中的 e

1. 早期数学家对古典概率论的研究

概率论的源头是赌博。1494 年，意大利数学家帕奇奥里发表了数学专著《算术、几何、比和比例摘要》。这本书是最早提出了概率问题——一个关于赌博的问题的文献。

纪念帕奇奥里的邮票

接着，意大利、法国、荷兰、瑞士、英国、德国等国的数学家，都对概率问题作出过重要贡献。

创立古典概率论的数学家，主

要是法国的费马和帕斯卡、荷兰的惠更斯。在1657年的《论赌博中的计算》论文里，惠更斯首先提出了数学期望这一概念——古典概率论由此诞生。首先使概率论成为数学的一个分支学科的数学家，是瑞士的雅格布·伯努利和他的侄儿尼古拉·伯努利（Nicolas Ⅲ Bernoulli，即尼古拉第三，1695—1726），以及法国-英国数学家棣莫弗等。

其中棣莫弗用 $n! \sim \sqrt{2n\pi}\,(n/e)^n$ 这个逼近式研究了二项分布的极限式，最终得到 n 次试验中出现 m 次事件的概率的期望值满足的关系式

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{x_1 < \frac{m(n)-n/2}{\sqrt{n}/2} < x_2\right\} = \int_{x_1}^{x_2} (\sqrt{2\pi})^{-1} e^{-x^2/2} dx,$$

式子中 $m(n)$ 是 n 次试验中出现 m 次事件的概率。也就是说，棣莫弗首次发现二项分布的极限形式是一个正态分布。显然，这个公式中又有e。

棣莫弗还首次处理了概率积分 $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$，得到样子像

$$f(x) = ce^{-hx^2} \quad (c \text{ 和 } h \text{ 都是常数})$$

的结果。这个式子可以具体化为

$$f(x) = (\sqrt{2\pi})^{-1} e^{-\frac{1}{2}x^2}。$$

这就是著名的正态密度函数公式即标准正态分布的概率密度。显然，它是 $f(x) = (\sqrt{2\pi}\sigma)^{-1} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ 当 $\sigma = 1$ 和 $a = 0$ 时的特例。

遗憾的是，棣莫弗的工作被人遗忘了两个世纪。直到1924年，英国数学家、生物统计学的奠基人皮尔逊的著作《正态曲线史》重提棣莫弗的工作，人们才认识到他的贡献和价值。

此外，随机变数 ξ 的密度函数是

$$f(x) = \frac{\lg e}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\lg x-\mu}{\sigma}\right)^2},$$

其中 $x > 0, \sigma > 0, \mu$ 是常数，那么就说 ξ 服从“对数正态分布”。如果 $x \leqslant 0$，则 $f(x) = 0$。这个式子中也有e的身影。

2. 近现代数学家对概率论的研究

在近现代的概率论研究中作出过重要贡献的数学家有：俄国－苏联切比雪夫、马尔可夫、伯恩斯坦、辛钦和柯尔莫哥洛夫，日本伊藤清，美国（出生在布达佩斯）卡尔曼，中国侯振挺等。

其中伯恩斯坦于1917年首先给出了概率论的公理体系；柯尔莫哥洛夫于1933年把概率论建立在集合论的基础之上，完成了现代意义上的、更为严格完整的概率论公理体系。

3. 柯尔莫哥洛夫成才给当今教育的启示

柯尔莫哥洛夫

出生后10天就失去母亲的柯尔莫哥洛夫，是被他的两个姨妈薇拉和娜捷日达收养长大的。她们努力引导他对书本和自然的兴趣，开拓他的好奇心，例如带他去田野、森林去旅游，讲花草树木、宇宙星星，讲安徒生童话……让年仅五六岁的柯尔莫哥洛夫负责家庭杂志《春燕》的数学部分。被激励的这个“小小幼年”，在五六岁的时候，就发现了$1=1^2$，$1+3=2^2$，$1+3+5=3^2$，…，并发表在《春燕》上……

柯尔莫哥洛夫最终成为20世纪最伟大的数学家之一。他的姨妈们教育的成功，给我们当代从事“应试教育”的人以许多难忘而深刻的启示。

5.12.3 买彩票有多少机会中奖

当今，形形色色的彩票吸引着无数“彩民”。那么，如何正确认识中奖机会（中奖概率）呢？例如，假设某种彩票中奖的概率是10%，只买1张就中奖和连续买10张全都不中奖的概率，哪一种更大呢？

既然买1张中奖的概率是10%，那么似乎买10张或20张不中奖的概率就几乎为0了。然而，正确计算的结果却不是这样：买10张不中奖的概率是$(1-10\%)^{10}\approx 35\%$——一个比买1张中奖的概率大得多

的、似乎难以接受的结果！而买 20 张不中奖的概率也高达约 12%！

那么，更一般的问题是：中奖概率不是 10% 而是 $1/n$，买 $2n$ 张彩票不中奖的概率又是多少呢？显然是 $(1-1/n)^{2n}$。

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\approx 2.718$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n}\right]^{-2}$ $\approx 2.718^{-2}\approx 13.5\%$。例如,假设某种彩票的中奖概率为万分之一,那么,买 2 万张不中奖的概率就高达约 13.5%——当中奖概率足够小（即 n 足够大）时，都是这个和 e 同在的值！对这个结果，每个“彩民”都应有足够的思想准备。

5.13　“双曲”与“三角”——这里也有 e

在数学中，有一类由计算双曲线下的面积

$$\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x$$

引出的函数，叫双曲函数。

第一个全面研究双曲函数的是兰伯特。1768 年，他在一篇关于虚角三角函数的论文中研究了这种曲线，指出圆弧下面的面积

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

与双曲线下的面积相比，明显看出积分表示式中只相差两个符号——这也是当时许多数学家注意到的事实；而且前者可以用三角函数表示，后者又和对数函数有关。

那么，在三角函数和对数函数之间就应该有一种含有虚数的对应关系。兰伯特经过全面深入的研究后，引进了双曲正弦函数和双曲余弦函数，为当时的函数增加了新的“另类”。

至今，人们已经构造出以下 6 种双曲函数（各自的图像见图 5-6）：

双曲正弦函数 $\mathrm{sh}x=\sinh x=\frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2}$，

双曲余弦函数 $\mathrm{ch}x=\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$，

双曲正切函数 $\mathrm{th}x=\tanh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$，

双曲余切函数 $\coth x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$，

双曲正割函数 $\mathrm{sech}x=1/\mathrm{ch}x=\dfrac{2}{e^x+e^{-x}}$，

双曲余割函数 $\mathrm{csch}x=1/\mathrm{sh}x=\dfrac{2}{e^x-e^{-x}}$。

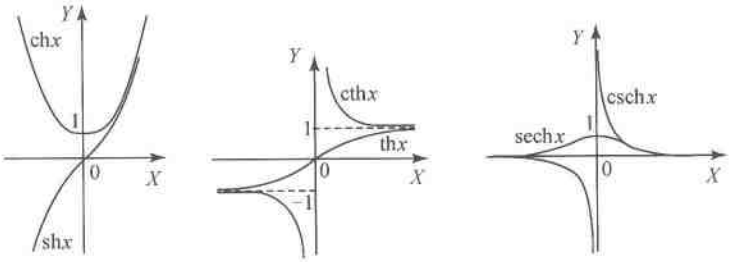


图 5-6

看，在这些充满和谐美和对称美的式子之中，都有 e！

双曲函数在工程技术中有广泛的用途，特别是前面 3 个最常用。

那么，双曲函数又怎么会和 e“联姻结盟”呢？

我们首先来看一看双曲函数是怎么定义的。

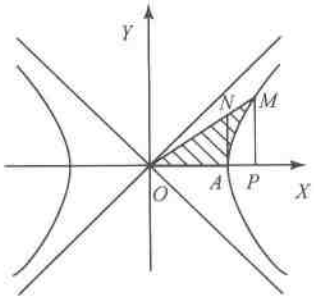


图 5-7

在图 5-7 中，设双曲角 t 是单位双曲线 $x^2-y^2=1$ 的半径 OA、OM 与双曲弧 $\overset{\frown}{AM}$ 之间那个扇形面积 S 的两倍。过 A 画这条双曲线的切线，交 OM 于 N，则 PM，OP 和 AN 等被分别称为双曲正弦线、双曲余弦线、双曲正切线……于是 PM，OP 和 AN 等的数量，就分别被定义为双曲正弦 $\mathrm{sh}t$、双曲余弦 $\mathrm{ch}t$、双曲正切 $\mathrm{th}t$……

设 M 的坐标是 (x, y)，并利用不定积分公式

$$\int \sqrt{t^2-1}\mathrm{d}t = \frac{t}{2}\sqrt{t^2-1} - \frac{1}{2}\ln(t+\sqrt{t^2-1})$$

就可以算出

$$\begin{aligned}
S &= \triangle OMP \text{ 的面积} - \text{曲边}\triangle AMP \text{ 的面积} \\
&= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} - \int_1^x \sqrt{t^2-1}\mathrm{d}t \\
&= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} - \left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-1})\right] \\
&= \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-1}) \\
&= \frac{1}{2}\ln(x+y)\text{。}
\end{aligned}$$

这样，就有

$$t = 2S = \ln\ (x+y)$$

和

$$-t = -\ln\ (x+y)\ = \ln\frac{1}{x+y} = \ln\frac{x^2-y^2}{x+y} = \ln\ (x-y)\text{。}$$

由 $t=\ln\ (x+y)$ 和 $-t=\ln\ (x-y)$，就分别得到

$$x+y=\mathrm{e}^t$$

和

$$x-y=\mathrm{e}^{-t},$$

并进而得到

$$x=\ (\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t})\ /2$$

和

$$y=\ (\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t})\ /2\text{。}$$

这样，就得到

$$\mathrm{sh}t = PM = y = \ (\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t})\ /2,$$

$$\mathrm{ch}t = OP = x = \ (\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t})\ /2,$$

$$\mathrm{th}t = AN = OA\times PM/OP = 1\times\frac{(\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t})\ /2}{(\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t})\ /2} = \frac{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}$$

(式中 OA 的长 1 是这样得来的：当 $y=0$ 时，由 $x^2-y^2=1$ 算出来的 $x=\pm 1$中的正值)，

……

这样，双曲函数就和 e“联姻结盟”了。

双曲函数的反函数是反双曲函数，其式子中当然也包含 e。下面我们写出其中 4 个：

$$\mathrm{arsh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1}),\quad \mathrm{arch}x=\ln(x\pm\sqrt{x^2-1}),$$

$$\mathrm{arth}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\quad \mathrm{arcoth}x=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}。$$

有趣的是，利用欧拉公式 $e^{ix}=(\cos x+i\sin x)$，把 6 个三角函数用指数函数（或复数的指数式）表示出来的时候，会发现它们的“样子”分别和上面的 6 个双曲函数惊人地“相似”但又不同：

正弦函数 $\sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$，

余弦函数 $\cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$，

正切函数 $\tan x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{ie^{ix}+ie^{-ix}}$，

余切函数 $\cot x=\dfrac{ie^{ix}+ie^{-ix}}{e^{ix}-e^{-ix}}$，

正割函数 $\sec x=\dfrac{2}{e^{ix}+e^{-ix}}$，

余割函数 $\csc x=\dfrac{2i}{e^{ix}-e^{-ix}}$。

此外，双曲函数之间的 5 个关系式也很有趣——和三角函数之间的 5 个关系式“类似”：

$$(\mathrm{ch}x)^2-(\mathrm{sh}x)^2=1,\quad \mathrm{th}x=\mathrm{sh}x/\mathrm{ch}x,\quad \mathrm{coth}x=1/\mathrm{th}x,$$

以及

$$\mathrm{sech}x=1/\mathrm{ch}x,\quad \mathrm{csch}x=1/\mathrm{sh}x。$$

当然，双曲函数和三角函数也有不同——前者不像后者那样有周

期性。

5.14　英国海疆长几何——分形公式中的 e

1967 年，祖籍立陶宛、出生在波兰、有法国和美国双重国籍的美国哈巴多大学数学教授、分形几何学家芒德尔布罗特，在美国的《科学》杂志上，发表了一篇名为“不列颠的海岸线有多长”的论文。

芒德尔布罗特

真是太奇怪了，难道这么多年来堂堂“大英帝国”还没有把自己的海疆长度搞清楚么！

是的——而且这还是一个不容易“搞清楚”的问题。

因为海岸线和平直的线条不同，它不但高低不平，而且弯弯曲曲，还有河流入海、山峦矗立。一言以蔽之：地形复杂。在这种情况下，测量者的“尺子”不可能把每个细节都测量得清清楚楚，只是用一些粗略的“直尺子”来近似测量。所用的尺子不同，得到的长度就不同——尺子越小，长度越大。例如，用 100 米长尺子测量，小于 100 米的那些“弯弯曲曲”的海岸线就被忽略；而用 10 米长尺子测量，小于 10 米的那些“弯弯曲曲”的海岸线才会被忽略。就像在示意图 5-8 中的那样，M 和 N 之间的海岸线长，用不同的尺子测量，就得到 $b+c+d+e>a$ 的结果。

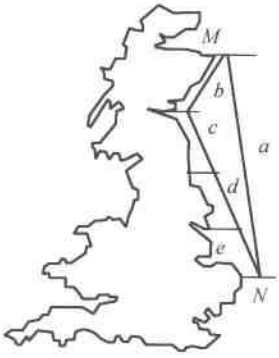


图 5-8　海岸线有多长

事实上，从 19 世纪开始，英国人每次测量的长度都不一致。

1977 年（一说 1975 年），芒德尔布罗特又在他出版的《分形：形、机遇与维数》一书中写上了这个有趣的问题。从此，他提出

的“分形”概念和理论开始广为流传并引起数学家们的深入研究。

那么，什么是分形？分形和 e 又有什么关系呢？

分形是这样一种图形，将它的细微部分放大后，其结构看起来仍与原先的形状精确地一致。图 5-9 所示著名的雪花曲线（即科克曲线）就是这样一种图形。这与圆成了鲜明的对比——把圆的一部分放大后，便变得比较平直。这是分形的第一个特点，也是分形区别于欧几里得几何图形的第一点。

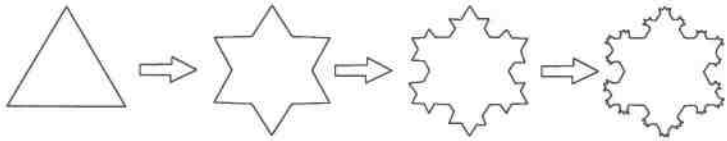


图 5-9　雪花曲线的形成

这里所说的科克曲线，是由瑞典数学家科克在 1904 年首先创造的。这条曲线没有边界，自身不相交，围成的面积也是有限的，但无限画下去的时候，却有无限长。

在欧几里得几何中，点、直线、平面、立体分别是 0，1，2，3 维的。而一条锯齿状的分形曲线（例如雪花曲线）的维数（也称“维度”）则在 1 和 2 之间。如果像图 5-10 那样从一个 2 维的矩形开始，把它分为 4 个部分，再在它的中间部分的上方构造一个“金字塔”，并继续进行这样的分形，那么，这个分形的维数就在 2 和 3 之间。这种有“分数维”的情况，是分形的第二个特点，也是分形区别于欧几里得几何图形的第二点。

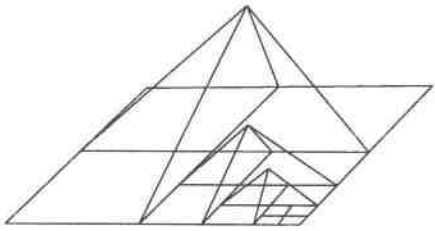


图 5-10

分数维这个概念，是德国数学家豪斯多夫在 1919 年首先提出来的。

原来，分形理论引出了一个分数维的问题。

那么，什么是“分数维”呢？我们以雪花曲线为例加以说明。这里，介绍与分形关系密切的又容易理解的“相似维数”。粗略地说，如果某个图形是由 a^D 个全部缩小到 $1/a$ 的相似图形组成的，则 D 被称相似维数。

下面用计算雪花曲线的分数维来具体说明。假设经过 n 步变换的雪花曲线的每条边的长是 $m=(1/3)^n$，那么 $n=-\ln m/\ln 3$；而此时雪花曲线的总长就是 $N(m)=4^n=4^{-\ln m/\ln 3}$。这样，就得到

$$\ln N(m)=(-\ln m/\ln 3)\ln 4=(-\ln 4/\ln 3)\ln m=\ln m^{-\ln m/\ln 3}=\ln m^{-D}。$$

从 $\ln m^{-\ln m/\ln 3}=\ln m^{-D}$ 就得到雪花曲线的维数 $D=\ln m/\ln 3=\ln 4/\ln 3=1.261\ 859\cdots$。

一般地说，如果 p（例如上面例子中的 4）是图形的放大倍数，而 q（例如上面例子中的 3）是边长的放大倍数，那么分形曲线的分数维数 $D=\ln p/\ln q$。

看，计算分形图形的分数维数，也要用到 e。

那么，英国的海岸线究竟有多长呢？这个长度是不定的——随标度不同而异。如果标度无穷小，海岸线也“无限曲折”——像无限作下去的雪花曲线那样，那么海岸线的长度就是无穷大。当然，在实际上这两者都不可能实现。

有限国土的海疆在理论上可能无限长，这个结论是正确的。由此，我们得到一个有趣的“悖论”——“芒德尔布罗特悖论”。

5.15　积分方程的滥觞——拉普拉斯变换和 e“结盟”

“我们知道的，是很少的；我们不知道的，是无限的。”你知道这句流传至今的名言，是谁说的吗？

这是法国天文学家和数学家拉普拉斯在 1827 年 3 月 5 日临终时的遗言。

1782 年，拉普拉斯研究过函数 $g(t)$ 的积分方程

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xt} g(t)\,dx, \tag{5-15}$$

这个方程称为 $g(t)$ 的拉普拉斯变换。

泊松

1823 年，法国数学家泊松给出了（5-15）中 $g(t)$ 的表达式

$$g(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{xt} f(x)\,dt, \tag{5-16}$$

其中 a 是充分大的实数。

你看，e 就出现在（5-15）和（5-16）之中了。

著名的拉普拉斯变换，是求解常微分方程、偏微分方程积分方程和差分方程的一种基本方法。对满足一定条件的复值实函数 $f(t)$（其中自变量 t 是实数，函数值可以是复数），经过拉普拉斯变换之后的函数 $L(s)$（其中 s 是实部为正值的复数）为

$$L(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt。$$

它的逆变换是

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_C L(s)\,e^{st}\,ds,$$

其中 C 是 s 平面上的某个闭路。

你看，这两个式子中也都有 e 的芳踪。

5.16 级数何名傅里叶——三角级数中“暗藏”的 e

现在，如果你走进法国交通工程学院的图书馆，就可以看到静静地躺着一篇大约两个世纪以前的论文。是什么论文如此珍贵，它的作者又是谁？

在级数中，有一个著名的级数——三角级数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)。\tag{5-17}$$

1807年，法国物理学家、数学家傅里叶在讨论热传导问题的一篇论文中，首先指出以2π为周期的任意函数，可以表示为（5-17）。

（5-17）中的“傅里叶系数”a_n和b_n可以用

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x \quad (n = 0,1,2,\cdots),\tag{5-18}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \quad (n = 1,2,\cdots)\tag{5-19}$$

来表示。前面提到的论文，就是傅里叶这篇1807年的论文。可不幸的是，法国科学院委托拉格朗日、拉普拉斯和勒让德却以论文“不严格”予以否定。

傅里叶

不过，现在我们知道，三角级数在数学、物理学、天文学和工程技术中都有广泛应用。所以，这篇珍贵的论文值得法国交通工程学院图书馆永久收藏。

当然，（5-17）也可展开为

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + (a_1\cos x + b_1\sin x) + (a_2\cos 2x + b_2\sin 2x) + \cdots$$
$$+ (a_n\cos nx + b_n\sin nx) + \cdots。\tag{5-20}$$

不过，傅里叶当年没有验证（5-18）和（5-19）为系数时，(5-17)是否收敛以及它的和是否等于$f(x)$。直到1820年，另一位法国数学家柯西在讨论级数时，才注意到必须讨论它的收敛性。1829年，德国数学家狄利克雷则得到了收敛性的确定成果。

即便如此，三角级数（5-17）后来还是被叫做“傅里叶级数”，这又是为什么呢？

原来，主要是因为傅里叶发现（5-20）可以推广到用下面的一对美妙的积分公式代替：

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi yx}\mathrm{d}x, \tag{5-21}$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi xy}\mathrm{d}y。 \tag{5-22}$$

你看，e又在这里“现身”了——“暗藏”在三角级数之中！

傅里叶那篇载有美妙的傅里叶级数的论文，被英国物理学家、数学家麦克斯韦盛赞为“一首伟大的数学的诗”。而恩格斯则把傅里叶的数学成就，与他所推崇的德国哲学家黑格尔的辩证法相提并论：傅里叶是一首数学的诗，黑格尔是一首辩证法的诗。

（5-21）和（5-22）这组公式的意义是，对属于$-\infty < x < +\infty$上的某个函数类中的函数$f(x)$，（5-21）关于一切y（$-\infty < y < +\infty$）存在，因此得到函数$g(y)$；用函数$g(y)$又可以形成（5-22），所得到的函数就是原来的函数$f(x)$。

你看，数学的“元素”们在这里多么“亲密”，多么和谐地相互依存。

不但如此，（5-21）和（5-22）这对公式还创立了抽象分析学中的共轭理论，而傅里叶建立数学－物理模型的方法和推演技巧为后人树立了榜样，永载史册。

后来，法国数学家和物理学家泊松和他的前辈们，还把傅里叶级数和“傅里叶积分”联系在一起，它最简单的情况是

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi mx}\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)。$$

看，这个式子中e也“现身”了。

这里提到的傅里叶积分，是指对任意函数$F(x)$，有

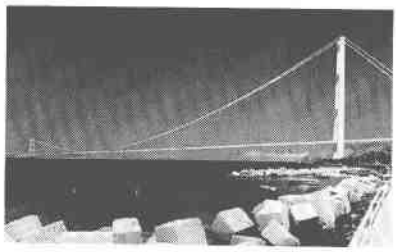
$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(a)\mathrm{d}a\int_{0}^{+\infty}\cos q(x-a)\mathrm{d}q,$$

它是一个偏微分方程的解。这个解是傅里叶在1811年得奖的一篇关于热传导的论文（对1807年论文的修改）中得到的——为了推动对热扩散问题的研究，法国科学院在1810年悬赏征求这方面的论文。

5.17 从达·芬奇到伯努利——“悬在空中”的e

长2.5英里、耗资60亿欧元的世界上最长悬索桥，将在2012年建成，连接意大利本土和西西里岛。

相其他桥梁相比，又名吊桥的悬索桥可以使用较少的材料来跨越比较长的距离，造得比较高而利于行船，无须在桥中心建立暂时的桥墩而能在比较深或比较急的水流上建造，适合大风和地震区的需要。由于这些优点，悬索桥近年被广泛采用。



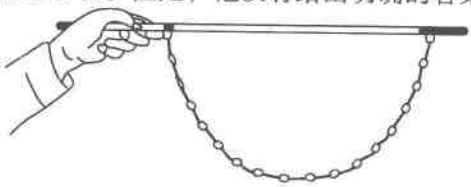
2012年意大利将建的世界最长悬索桥模拟图

那么，悬索桥的“悬索”究竟有什么奥秘呢？本节将揭开谜底。

5.17.1 来之不易的悬链线方程

在文艺复兴时期的意大利，有一位“奇”人——科学家、艺术家达·芬奇。他的“蒙娜丽莎”至今依然在微笑，他在科学上“全方位”的探索依然鼓舞着来者。

在达·芬奇苦苦探索的问题中，有一个“悬链线问题”——莱布尼茨改的名。这个问题是，一根柔软、密度均匀而不能自由伸长的绳，悬挂在两个固定点（这两个点不一定等高）之间，求它所形成的曲线（的方程）或者猜想它的形状。但是，他没有给出明确的答案，就魂归西天。



铁链自然下垂的形状

可能我们会说："可能是条抛物线吧！"其实，这样猜想只不过是在重复了历史上数学家的错误而已。

可不是么，达·芬奇的同胞伽利略研究过悬链线问题以后，就猜想这条曲线可能是抛物线。无独有偶，法国－荷兰著名数学家吉拉德也认为是抛物线。

几十年以后，惠更斯才从物理学的角度证明伽利略等的猜想是错误的。到了 1690 年 5 月，雅格布·伯努利在德国的《教师学报》上，又把这个问题重新提了出来，并引起了许多人的关注。

在 1691 年 6 月的《教师学报》上，惠更斯、雅格布·伯努利的弟弟约翰·伯努利和莱布尼茨都发表了各自的解答。

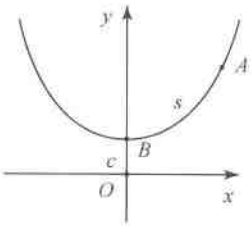


图 5-11

惠更斯用的是几何方法，但十分烦琐。

约翰·伯努利借助于微积分的解答，是构造了微分方程 $dy/dx = s/c$，其中 s 是图 5-11 中 B 点到线上任意点 A 的长，c 是 OB 之长。显然，c 与悬链线的单位长度的重量有关。从这个微分方程出发，就在平面直角坐标系中得到 $y = c\cosh(x/c)$。

莱布尼茨用微积分的方法，也得到和约翰·伯努利一样的结果。

1691 年到 1692 年间，伯努利兄弟俩还进一步解决了悬挂着的变密度非弹性柔绳，等尺寸的弹性绳，以及在每一点的作用力都指向一个固定中心的细绳所成形状等更为复杂的问题。

1691 年雅格布·伯努利发表在《教师学报》上的论文证明，悬挂在两固定点的细绳，它能取的所有形状中，以悬链线的重心最低。

伯努利兄弟俩是继牛顿和莱布尼茨之后，微积分的两个最重要的奠基者，他们对悬链线的研究，促进了微分方程的发展。

在"下笔千言"之后，可能有人要问，悬链线和 e 有什么关系呢？

有。我们知道，前面的"cosh"是"双曲余弦"的符号，用它就

可以把 $y=c\cosh(x/c)$ 写成 $y=c\dfrac{e^{x/c}+e^{-x/c}}{2}$。

看，e就被数学家们用细线“悬在空中”了！

5.17.2 跨越300年的美丽

1. 昆虫学家赞美悬链线

美丽的悬链线和e的关系还被人大加赞美。在赞美者中，有一位“昆虫界的荷马，昆虫界的维吉尔”。荷马是我们在1.1节中提到过的古希腊盲诗人。以《牧歌》（十章）闻名于世的帕布留斯·维吉尔·马洛，则是著名的古罗马诗人。

蜘蛛网：悬链线、e、“宝石念珠”

“每当地心引力……作用时，悬链线就在现实中出现了……它就是抓住一条软绳子两端垂下来的形状，它就是一张被风吹鼓起来的船帆外形的线条，它就是母山羊奋拉下来的乳房装满后鼓起来的弧线。而这一切都需要e这个数。”法国著名昆虫学家法布尔在他的《昆虫记》一书卷9中用富有诗意的语言讴歌说，“现在，这个奇妙的e又出现了——就写在蜘蛛丝上。在一个浓雾弥漫的清晨，让我们看一下夜间刚刚织好的网吧。有黏性的蜘蛛丝，担负着水滴的重量，弯曲成一条条悬链线，水滴随着曲线的弯曲排成精致的念珠，整整齐齐、晶莹剔透。当阳光穿过雾气，整张带着念珠的网映出彩虹般的亮光，就像一丛灿烂的宝石。e这个数是多么辉煌！”

法布尔

法布尔就是上面说的“昆虫界的荷马，昆虫界的维吉尔”。

瞧！连蜘蛛网都如此美丽，如果以数学的眼光去看这个世界，就甭

提有多美了。那么，谁会有理由不热爱这个有“人间烟火”世界，热爱生命呢！

2. 悬链线无处不在跨越300多年的美丽

你小时候也许吹过肥皂泡吧？信不信由你，介于空中两个平行圆面之间的肥皂膜就是悬链线绕一条轴旋转而成的旋转体！

悬链线是一种重要的曲线，在理论研究和工程技术中都有广泛的应用。

比如，曳物线——从图5-11中B点出发的渐伸线等曲线，都和它有关。

曳物线的直角坐标参数方程是$x = a\left[\ln\tan\left(t/2\right) + \cos t\right]$，$y = a\sin t$（其中$t$是参数），其中也有e。

有的石拱桥的石拱接近悬链线形

石拱是什么形状的？也许你会说，当然是接近半圆形。其实，除了半圆形以外，还有其他形状。例如，在中国江南水乡浙江绍兴，桥梁建筑史家已经发现了两座接近悬链线形的清代石拱桥。20世纪60年代以来，西方桥梁建筑中也出现了先进的悬链线形拱桥。我们经常看到美丽的曲线形的悬索桥，大多采用悬链线形——通常大跨度的桥都用这种结构。悬索桥是当今四大类桥中的一类，其余三类是拱桥、梁桥、斜拉桥。

有趣的是，用微积分知识可以证明，对于两端固定的曲线M，当它的形状是悬链线的时候，才能使M绕图5-11的x轴旋转所得的旋转曲面的面积最小。

后来，对悬链线的研究发展为对悬链面的研究。悬链面是以悬链线为母线的旋转曲面，它的立体直角坐标方程是$x_1^2 + x_2^2 = c\dfrac{e^{\frac{x_3}{c}} + e^{-\frac{x_3}{c}}}{2}$。

伯努利兄弟已经离去300多年了，但他们解读的悬链线却没有“枉

过一春又一春”——风采依然，迷人依旧……

5.18　聚首“中心”的“难题”——4 只甲虫如何爬行

“砰！”随着一声发令枪响，4 只呆在正方形的 4 个顶点的甲虫，分别开始向相邻甲虫运动方向成直角的方向前进（图 5-12）。正方形的边长为 1 米，这些甲虫都受过训练——前进的速度（不一定是匀速）始终都相同，而且总是以处在它们前面的那一只甲虫为目标。这样，每只甲虫都慢慢地偏向了右边。现在的问题是，它们将走出什么样的路线，最后到达何处，每只甲虫走了多远？

如图 5-13 建立直角坐标系，由于爬行的对称性，只要绕原点旋转 $\pi/2$，则第一只甲虫和它相邻的第二只甲虫的路线重合。由于运动曲线的切线的斜率 $dy/dx = -\tan\theta$，所以第一只甲虫的路线 $y = y(x)$ 满足

$$dy/dx = -\tan\theta = -(x-y)/(x+y)。\tag{5-23}$$

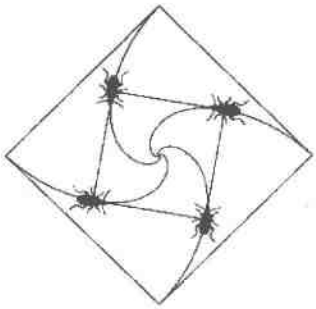


图 5-12

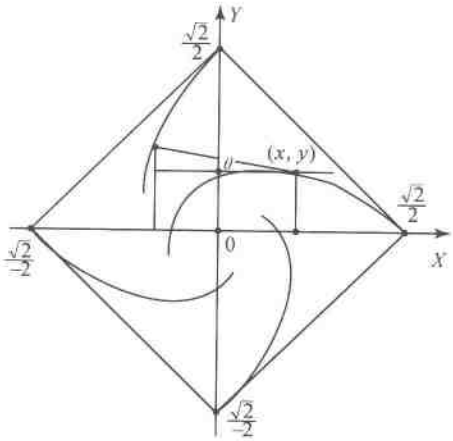


图 5-13

用极点在原点 O 的极坐标表示，就是

$$\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta, \\ y = r(\theta)\sin\theta, \end{cases} \tag{5-24}$$

其中 $r=r(\theta)$ 是第一只甲虫在极坐标中的行进路线。

将（5-24）微分，就得到

$$\begin{cases} dx = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta, \\ dy = \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta。 \end{cases} \tag{5-25}$$

把（5-24）和（5-25）代入（5-23），就有

$$\frac{\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta}{\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta} = \frac{r\sin\theta - r\cos\theta}{r\sin\theta + r\cos\theta},$$

由此式就得到 $dr/d\theta = -r$，即 $dr/r = -d\theta$。把 $dr/r = -d\theta$ 两端积分，就有

$$\ln r = -\theta + C, r = C_1 e^{-\theta} \quad (C_1 > 0)。$$

又由 $r(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 得到 $\frac{\sqrt{2}}{2}C_1, r = \frac{\sqrt{2}}{2e^{\theta}}$——一条包含 e 的螺旋曲线。

而其余 3 只甲虫的爬行路线，是 $r = \frac{\sqrt{2}}{2e^{\theta}}$ 绕原点分别旋转 $\frac{\pi}{2}$，π 和 $\frac{3\pi}{2}$ 得到。

4 只甲虫无休止地沿螺旋曲线追逐，最终当 $\theta \to +\infty$ 时，$r = \frac{\sqrt{2}}{2e^{\theta}}$ 中的 $r \to 0$，所以 4 只甲虫在原点 O 相会。那么，它们各自就爬行了

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \sqrt{r^2(\theta) + [r'(\theta)]^2} d\theta &= \int_0^{+\infty} \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2e^{\theta}}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2e^{\theta}}\right)^2} d\theta \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\theta} d\theta \\ &= -e^{-\theta}\Big|_0^{+\infty} \\ &= 1。 \end{aligned}$$

由此可见，每个甲虫都爬行了 1 米。

以上是“正规”的数学解答。

下面，还有一种“不用数学”的解答。

显然，每只甲虫总是和它相邻的甲虫成直角方向运动，可见4只甲虫始终在正方形的4个顶点上。随着追逐的延续，显然正方形在逐渐缩小。最后的必然结果是，正方形缩小为一个点——4只甲虫聚首“中心”。“难题”得解。

5.19 数学也要“轻装上阵”——e与微积分

在数学分析教科书中，几乎都会用较大的篇幅介绍e和$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$这个数学中最重要的基本极限之一。这是为什么？

毋庸置疑，这是数学分析系统介绍的需要和为了“用”。

为什么数学分析系统介绍要介绍e和$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$呢？因为要介绍数列的极限和函数的极限，就必须注意两个最重要的极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=0$和$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$。

那么，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$这个极限又有什么用呢？

我们知道，在数学分析中，要牵涉到求导、微分、积分等，就必定会出现一些关于指数、对数的式子，必然涉及“底数”的问题。因此，数学家们都希望选取使得这些式子具有最简洁的形式底数。

那么，选什么数为底数好呢？

我们来看一个实例。如果$y=\log_b x$，那么$dy/dx=(1/x)\log_b e$。很显然，只有当$b=e$的时候，$dy/dx=(1/x)$才具有最简洁的形式。当然，这还不是严格的证明，但是微积分理论可以完成这个证明。

同时，除1以外的任何数作底（以1为底在代数中是“犯规行为”）的代数函数，进行微积分运算以后，都会出现以e为底的函数。怪不得数学家们都说：“$\ln x$和e^x在高等数学中特别重要。”而$\int_1^n\frac{1}{x}dx$

$= \ln n$ 则是微积分中的一个重要基本公式。

有趣的是，e 作底的时候，e^x 的导数 $(e^x)' = e^x$——函数和它的导数“相等”。而其他任何数作底都不会是这样。更进一步，其他任何函数都不是这样。

指数函数 e^x 的导数 e^x（即切线的斜率）、指数函数 e^x 和 e 这三者之间，还有一个有趣的关系：e 是在 $x=0$ 的点上，导数 e^x 的值为 1 的唯一数。对比函数 2^x 的图像（图 5-14 中的一条虚线）和函数 4^x 的图像（图 5-14 中的另一条虚线）可以看到，这两条曲线都和斜率为 1 的直线不相切。

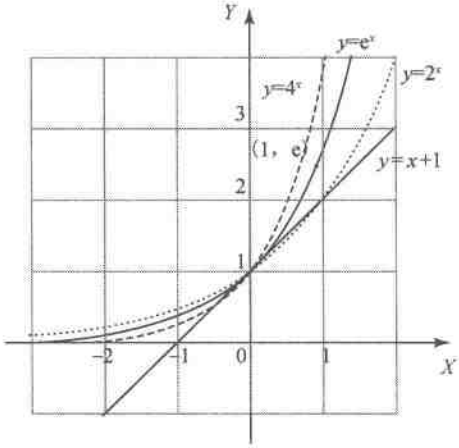


图 5-14

更有趣的是，假设 $f'(x) = f'(nx)$（式子中的 $x>0$，$n \neq 0$ 和 1），求 $f(x)$。最后的答案是 $f(x) = \ln x + C$（式子中 C 是积分常数）。你看，e 在这里又“鬼使神差”地作底了！

实际上，在微积分的许多公式中，都有 e 的身影：微分学的 6 个“基本极限”公式中，4 个含有 e；微分学的“重要极限”公式中，至少 6 个含有 e；基本（不定）积分公式中，有许多涉及 e。

5.20　众“神”朝拜“美猴王”——离不开 e 的数学

话说美猴王孙悟空保唐僧西天取经成功归来之后，更加名扬世界，花果山理所当然地就成了众神朝觐之地。

这“美猴王”就是 e，这“众神”，就是数学中形形色色的公式。

等角螺线即对数螺线，又叫伯努利螺线或黄金螺线、生长螺线，它的极坐标方程 $\rho = k\mathrm{e}^{\alpha\theta}$（$\rho$ 为极径，θ 为极角，k 和 α 是常数）或简化的 $\rho = \mathrm{e}^{\theta}$ 中就有 e。看，这种螺线果然朝拜了“美猴王”。

在俄国数学家罗巴切夫斯基创立的罗氏非欧几何中，圆周长 l 与半径 r 不成正比，而是按

$$l = \pi k(\mathrm{e}^{\frac{r}{k}} - \mathrm{e}^{-\frac{r}{k}})$$

的关系更迅速地增长。利用 $\mathrm{e}^{\frac{r}{k}}$ 和 $\mathrm{e}^{-\frac{r}{k}}$ 的泰勒展开式，就可以用上述公式求得

$$l = 2\pi r\left(1 + \frac{1}{6} \times \frac{r^2}{k^2} + \cdots\right)。$$

这个式子表明，当 r 很小或常数 k 足够大时，罗氏非欧几何的圆周长就很接近 $2\pi r$ 了。这有助于我们理解非欧几何——欧几里得平面几何可以看成它的特例。你看，e 也出现在这个非欧几何的圆周长公式中。

纪念罗巴切夫斯基世 100 周年的邮票：苏联 1956 年发行

詹姆斯·格雷戈里

在幂级数中，有许多充满和谐美的式子，都“回归”到e：

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=e^x \quad (-\infty<x<+\infty),$$

$$x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+\frac{x^n(-1)^{n-1}}{n}+\cdots=\ln(1+x) \quad (-1<x\leqslant 1),$$

$$-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots-\frac{x^n}{n}-\cdots=\ln(1-x) \quad (-1\leqslant x<1)。$$

最后这个式子，首先是詹姆斯·格雷戈里得到的。

此外，还有

$$2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}+\cdots\right)=\ln\frac{x+1}{x-1} \quad (其中\ |x|>1),$$

$$2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right)=\ln\frac{x+1}{x-1} \quad (其中\ |x|>1),$$

$$2\left[\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5+\cdots\right]=\ln x \quad (其中\ x>0),$$

$$(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\cdots+\cdots=\ln x \quad (其中\ 0<x\leqslant 2),$$

$$\frac{x-1}{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x}\right)^3+\cdots=\ln x \quad (其中\ x\geqslant\frac{1}{2}),$$

$$\ln a+2\left[\frac{x}{2a+x}+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2a+x}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{x}{2a+x}\right)^5+\cdots=\ln(a+x)\right]$$

(其中 $a>0, x\geqslant -a$),

$$x-\frac{1}{2}\times\frac{x^3}{3}+\frac{1\times 3}{2\times 4}\times\frac{x^5}{5}-\frac{1\times 3\times 5}{2\times 4\times 6}\times\frac{x^7}{7}+\cdots-\cdots=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

(其中 $|x|<1$),

$$a^x=1+\frac{x\ln a}{1!}+\frac{x^2(\ln a)^2}{2!}+\frac{x^3(\ln a)^3}{3!}+\cdots \quad (其中\ a>0, -\infty<x<+\infty)。$$

此外，在“雅可比函数”

$$\Theta(u)=\Theta(0)\times e^{\int_0^u Z(u)\,du}$$

中，在完整三角和的式子

$$S(q,f(x))=\sum_{x=1}^{q}e(f(x)/q),\quad e(x)=e^{2i\pi x}$$

中，在华罗庚证明的不完整三角和的式子

$$\sum_{x=1}^{p} e\left(\frac{hx^k}{q}\right) = \frac{p}{q}\sum_{x=1}^{q} e\left(\frac{hx^k}{q}\right) - O(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$$

中，都有e的影踪。

这里提到的雅可比函数，是由德国数学家雅可比发现的。

如果设牛顿幂级数展开式中的 $x=-1$，就得到

$$\frac{1}{e} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} - \cdots 。$$

如果把牛顿幂级数展开式中的e变成 a，也得到一个含e的常用幂级数展开式

$$a^x = 1 + (\ln a)x + \frac{(\ln a)^2}{2!}x^2 + \frac{(\ln a)^3}{3!}x^3 + \cdots + \frac{(\ln a)^n}{n!}x^n + \cdots 。$$

最后，在整函数分解为素因子的定理中，在埃尔米特（正交）多项式中，在德国数学家库默尔把方程 $x^n+y^n=z^n$ 改写时用到的 n 次本原单位根中，德国数学家比贝尔巴赫在1916年提出的关于单叶函数论的一个猜想中……都有e现身。

雅可比

以上事实表明，e的确成了神通广大的孙悟空，所以有人说，e在数学中的作用毫不亚于大名鼎鼎的π。而伊莱·马奥尔在《无穷之旅——关于无穷大的文化史》中，则把π，e，φ并称为数学中“三个著名的无理数”。

“生在苏杭，葬在北邙。”如果数学公式也会生死的话，那么被“上苍”宠爱而生在“苏杭”的它们，一定会葬在自己心中的“风水宝地”“北邙”——花果山。为什么呢？因为它们“生前”就已经对孙悟空“心驰神往”了。

这里说的“北邙”指北邙山，在洛阳北面，是许多帝王将相的葬身“福地”。所以，在中国古典小说《东周列国志》的开篇诗中就有：“青史几行名姓，北邙无数荒丘。”

第6章 “大众情人”
——走出“王宫”的e

世界是一本打开的活书……这本最伟大的书是用各种几何图形和数学文字写成的。

——伽利略

e不但在数学的“王宫”中漫游，而且它还走出“王宫”，和其他学科“谈情说爱”。

6.1 物理学的宠儿

6.1.1 你也砖当“大力士”——缆绳靠e系船舟

1. 凡尔纳小说中的“大力士”

“工人们停止了锤击，两旁支撑船身的支持物已经移开。船要下水了。

凡尔纳

鸣——一声长鸣，缆绳解开，‘特拉波科罗’号摇摆着滑了下去。所有的眼睛，都注视着这艘华丽的大船。

……突然，只听一声惊呼……原来一只快艇要从‘特拉波科罗’号下水的船坞前面进港。

……在这两船就要相撞的危及关头，突然出现一个人：头高身大……胳膊像起重机……他在不到一分钟的时间内，把系在‘特拉波科罗’号

前部的缆绳绕在钉在地里的木桩上，以‘超人’的气力抓住缆绳的另一端……大约有十秒钟……最后缆绳断了。

可就是这十秒钟的时间，已经足够，‘特拉波科罗’号下水以后，只轻轻地擦了一下快艇，就向前驶去。

这位使快艇脱险的大力士，就是马蒂夫。”

以上是法国著名科幻小说作家凡尔纳的小说《马蒂斯·桑多尔夫》中的情节。

“力拔山兮气盖世”——许多人都想当马蒂夫或中国汉代将领项羽这样的大力士。

2. “力放大器”圆梦“大力士”

但是，绝大多数人都不能如愿成为“大力士”。于是，人们常利用杠杆、动滑轮、辘轳、斜面、螺旋、劈、水压机等这些“力放大器”，来圆这“大力士梦”，因为它们能将小力“变为大力”。

用尼龙绳打结，是不容易打得牢靠的。晾衣物等的绳子，有时会自己松脱。打包裹、被盖卷的时候，你会看到棱角处比其他部位被绳子勒得更深。船员或渔民在系船的时候，会在缆绳桩上绕许多圈。有的传动皮带要扭成“8”字形……

发生这些现象的原因是什么？

这里将分析另一种“力的放大器”，实现你的“大力士梦”，并解释包括上述现象在内的有关现象。

在图6-1中，设 $T(\theta)=T_0$ 为通过绳子加在半径为 r 的无摩擦不动圆轮上的一对力，$\mathrm{d}N$ 为圆轮反推绳子的法向力；$T(\theta)$ 与 T_0 合成后的力（由 AB 的长度表示），与 $\mathrm{d}N$ 有“二力平衡”的关系。并设 M，N 为绳与轮的切点，$\angle MON=\mathrm{d}\theta$，$C$ 为菱形 $AEBD$ 的中心。

显然，因为 $\angle AEC$ 与 $\angle AON$ 的两边分别垂直且同向，所以 $\angle AEC=\angle AON=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2}$。又因 T_0 与 $T(\theta)$ 合成的力与 $\mathrm{d}N$ 等大、反向，所以在直角 $\triangle ACE$ 中可知

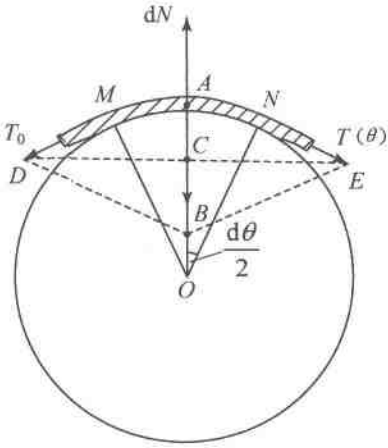


图 6-1

$$\frac{dN}{2} = T(\theta)\sin\frac{d\theta}{2}。$$

当 $d\theta$ 为微分量时，上式变为

$$\frac{dN}{2} = T(\theta)\frac{d\theta}{2} \quad （用到当\ \theta\ 很小时\ \sin\theta = \theta）。$$

由此得到

$$dN = T(\theta)d\theta。 \tag{6-1}$$

以下将求得

$$dN/\widehat{MN} = T(\theta)/r。 \tag{6-2}$$

用$\widehat{MN}$去除（6-1）的两边，并注意到 $d\theta/\widehat{MN}=1/r$ 就得到

$$dN/\widehat{MN} = T(\theta)(d\theta/\widehat{MN}) = T(\theta)/r,$$

它就是（6-2）。

（6-2）表明，如果 $T(\theta)$ 一定，那么单位弧长上的法向力（即 $dN/\widehat{MN}$）与 r 成反比。这一结论能解释用绳子扎紧包裹、被盖卷时，用同一段绳子，却使棱角处勒得最深，因为这儿的 r 最小。也能解释捆扎小物体的时候，比捆扎大物体容易捆得紧些。

由于绳、轮接触处不光滑，$T(\theta)$ 和 T_0 两力并不平衡，设滑动前

相差某一值 $dT(\theta)=\mu dN$（μ 为轮绳间滑动摩擦系数），绳在轮上绕了 θ 弧度。下面将导出 $T(\theta)$ 与 T_0 间随 θ 不同而变化的关系式。

将（6-1）$dN=T(\theta)d\theta$ 代入 $dT(\theta)=\mu dN$ 中，就得到

$$dT(\theta)=\mu T(\theta)d\theta,$$

就是 $dT(\theta)/T(\theta)=\mu d\theta$。

把这个式子两边积分，就有

$$\ln T(\theta)=\mu\theta+C'\text{（式中 }C'\text{为积分常数）。}\tag{6-3}$$

当 $\theta=0$ 时，显然 $T(\theta)=T_0$，把它代入（6-3），就求得 $C'=\ln T_0$。

这样（6-3）就变为 $\ln T(\theta)=\mu\theta+\ln T_0$，此式可变形为

$$T(\theta)=T_0e^{\mu\theta}。\tag{6-4}$$

（6-4）是欧拉在18世纪发现的，也叫欧拉公式。

以下是推导出（6-4）的另一种本质相同的方法。

在图6-2中，设绳绕轮的圆心角 $\angle AOB=\beta$，切点 A 处的拉力为 T_0，另一切点 B 处使绳开始滑动的牵引力为 T_1。C 是 $\widehat{AB}$ 上的任意一点，而且 $\angle AOC=\theta$。

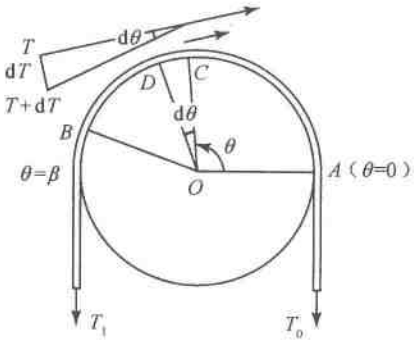


图6-2

现在，我们来研究 C 处的一个微小增量 $d\theta$ 所对应的 $\widehat{CD}$ 这一部分绳的平衡。

如果 C 处向“右”拉的力为 T，则 D 点向“左”拉的力，应该比 T

大一个作用于这部分的摩擦力 dT，即等于 $T+dT$。

这个摩擦力，是皮带对$\widehat{CD}$的压力 dN 引起的，所以大小是 μdN。这样，就有 $dT=\mu dN$。

在近似直角$\triangle OCD$ 中，$dN=T\tan(d\theta)$；此外，由于 $d\theta$ 很小，所以 $\tan(d\theta)\approx d\theta$。这样，就得到 $dN=Td\theta$。

由 $dT=\mu dN$ 和 $dN=Td\theta$ 可知，$dT/T=\mu d\theta$。此式积分后，就得到 $\ln T=\mu\theta+B$（B 是积分常数）。因为对应于 $\theta=0$ 的 A 点时，$T=T_0$，所以 $B=\ln T_0$，于是也得到 $T=T_0e^{\mu\theta}$，这就是（6-4）。因此，当 $\theta=\beta$ 时，使绳滑动所需要的 T_1，就可以由 $T_1=T_0e^{\mu\theta}$求出。

3. 走进生活的欧拉公式

欧拉公式表明，绕在圆轮（或圆柱、棒、桩）上的绳子或带子，可将力“放大”到 $e^{\mu\theta}$倍。这能解释以下现象。

（1）水手们可以通过绕在缆柱上多圈的绳子，轻而易举地控制住质量巨大的船只。

例如，有一艘 50 吨的船，并设克服船漂走的力为它的重量约 5×10^5 牛（重力加速度 g 取 10 米/二次方秒）的 1/10 即 5×10^4 牛，绳绕在缆绳柱上 4 圈即 $\theta=8\pi$，缆绳柱和缆绳之间的摩擦系数 $\mu=0.25$。问至少要多大的力拉住缆绳，才能控制住它不漂走？

把上述数据代入（6-4），就得到 $T_0\approx5\times10^4\div2.72^{0.25\times8\pi}$牛 ≈93 牛，即只需 93 牛的力。

那么，这 93 牛是一个什么概念呢？我们还是用中国老百姓熟悉的、已经被中国从 1990 年 1 月 1 日起就正式废弃但依旧在广泛使用的“斤”来计量吧。93 牛≈19 斤——一个“小小少年”就有这个力，他就能控制住 50 吨的大船。

由此可见，凡尔纳笔下的马蒂夫是“冒牌货”，根本就不是什么“大力士”；或者说，凡尔纳缺乏这方面的知识，误把马蒂夫说成“大力士”了。

显然，如果多绕几圈，这个力还会大大减少。这种情况就出现在

下面。

（2）不知道你观察过没有，有时水手们在系缆绳的时候，只是在缆绳柱上绕许多圈，就把余下的缆绳随意扔在船上；绳端并不与绕的缆绳打成结，也不系在其他物体上。那么，他们不怕船“野马脱缰”吗？我们不必担心——“欧拉”“告诉”他们，重量很大的船无法拖动整个缆绳而成为“脱缰野马”。

以上（1）和（2）就是我们所说的“缆绳靠 e 系船舟”。

（3）牧民拴马，也是类似的道理。他们把缰绳套在固定的木棒之上，绕上五六圈，然后把缰绳的端头轻轻地打一个结，就放心离开了。即使没有打结——像前面的水手们那样多绕几圈，马儿也不会“脱缰而去”。

（4）晾衣服的时候，将系在柱子上的绳子多绕几圈，绳子就不容易在很重的湿衣服作用下脱落——即使绳端没有系牢；捆扎物体时多绕几圈可防松脱，也是类似的道理。

（5）皮带之所以能传递动力（图 6-3 和图 6-4），其依据也是靠的皮带和轮子之间有足够的摩擦力，也就要求有足够大的 θ。所以，有人也把欧拉公式（6-4）称为“皮带理论”。

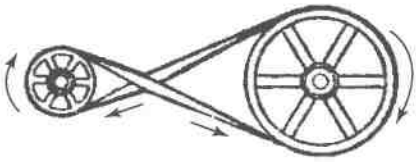


图 6-3　皮带的“8”字形传动

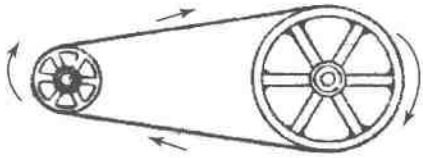


图 6-4　皮带的环形传动

（6）有时传动皮带被扭成“8”字形（图 6-3）也容易解释——它比环形（图 6-4）皮带具有更大的 θ，因而更不容易打滑。由此可见，有经验的工人师傅采用图 6-3 所示的“土办法”来应急使用刚开始打滑的传动皮带，是有科学依据的。当然，由于此时从动轮的转动方向和原来相反（这是有时采用“8”字形传动皮带的另一种作用），应改变主

动轮的转动方向——例如用电路控制。

（7）打牢固的绳结及缚紧绳端。结要打得牢，就一定要绳的曲折多或者围着自己缠绕的圈数多，例如采用“接绳结”（图6-5），使θ增大。

（8）多股绳的绳端容易散开，可用“冠状缚绳端法”（图6-6）缚住，因为用这种方法缚绳端时，各股细绳的曲折增多而使θ增大。

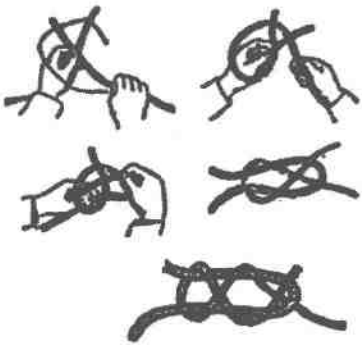


图6-5　比较牢固的一种结法

图6-6

6.1.2 “滴答”声中的物理公式——摆锤振动中的e

我们知道，在摆幅很小的时候，单摆和复摆的振动周期T分别是$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$（式中l是单摆的摆长）和$T=2\pi\sqrt{\frac{I}{mgb}}$（式中$I$是复摆对转动轴的转动惯量，$m$是复摆的质量，$b$是复摆的重心到转动轴的距离），这两个式子中的$g$是当地的重力加速度。

那么，这些摆的摆幅x又如何随时间t变化呢？物理学家给出了答案。

在有阻尼的空气中，x遵循$x=A_0e^{-\beta t}$的规律。这里A_0是刚开始的时候的摆幅，β是一个有正值的“阻尼系数”。你看，这里又出现了e。如果你家有摆钟，e就陪伴你的日日夜夜了。

从$x=A_0e^{-\beta t}$中可以看到，x将随t的增加而减小。这就不难解释为

什么摆幅 x 将越来越小（图6-7）——直到摆幅为0而停下来。

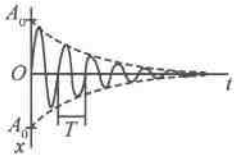


图6-7

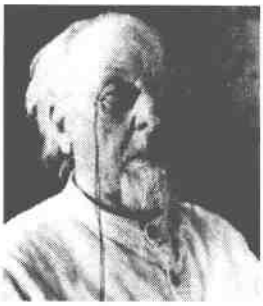
那么，为什么家中的摆钟上的钟摆没有较快停下来呢？这是因为有发条给它补充能量的缘故。一旦你忘记上发条，没有给它“喂草”，它就会“偷懒”休息了。

事实上，$x = A_0 e^{-\beta t}$ 是一切阻尼振动的规律。

6.1.3 火箭飞天的奥秘——地球人借e上“青云”

1. “宇航之父”用e助你出“摇篮”

现代科学技术的迅猛发展，使人类可以用火箭把人造卫星、宇宙飞船等航天、宇航飞行器送入太空领域。


齐奥尔科夫斯基

“地球是人类的摇篮，但人类不可能永远被束缚在摇篮里。开始他将小心翼翼地穿出大气层，然后便去征服整个太阳系。”凡是对航天科技感兴趣的人，一定熟悉齐奥尔科夫斯基的这段名言。

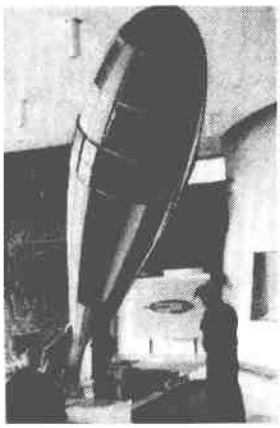
俄国－苏联星际航行先驱齐奥尔科夫斯基被称为“宇航之父”。他在1903年出版的《利用火箭装置研究宇宙空间》一书中说，火箭的理想运动速度（又叫速度增量或特征速度）v 可以用

$$v = u\ln z \tag{6-5}$$

来描述，其中 u 是火箭发动机的有效排气速度（喷流相对于火箭的速度），$z = m_0/m$ 是火箭的最初的质量 m_0 与发动机停止时的质量 m 之比（简称质量比）。（6-5）叫火箭运动的齐奥尔科夫斯基方程。你看，其中也有e的一份功劳。

2. 出了“摇篮”飞不高

从（6-5）可以看出，要想提高火箭的运动速度 v，要么增加喷气



齐奥尔科夫斯基设计的飞艇模型

速度 u，要么增加速度和质量的比 z。而火箭的最终速度至少要达到第一宇宙速度（约7.9千米/秒），才能将人造卫星等送入运行轨道。

由于目前技术水平的限制，固体燃料的最高喷气速度 u 只能达到2.5千米/秒，液体燃料一般为3千米/秒，最好的混合液体燃料也只能达到4千米/秒。同时，质量比 z 也无法提高到10以上。即使按 $u=4$ 千米/秒和 $z=100$ 的理想情形计算，火箭的理论速度虽然可以达到9千米/秒，但除去重力和空气阻力等造成的损失（约为2千米/秒），实际速度只能达到7千米/秒。这样，人造卫星等还是无法送入运行轨道。

3. 火箭接力上青云

科学家们通过研究（6-5）之后，想到了采用多级火箭来解决火箭的速度问题，由接连的几个火箭发动机组成一个动力系统推动火箭前进：第一级发动机使火箭达到一定的速度，燃料耗尽自动脱落后第二级发动机立即接着工作，使火箭达到更高的速度，燃料耗尽自动脱落后第三级发动机再接着工作……

这样，假设各级发动机的喷气速度和质量比都相同，即

$$u_1=u_2=\cdots=u_n=u,\qquad z_1=z_2=\cdots=z_n=z,$$

那么火箭的最终速度

$$\begin{aligned}v&=v_1+v_2+\cdots+v_n\\&=u_1\ln z_1+u_2\ln z_2+\cdots+u_n\ln z_n\\&=nu\ln z。\end{aligned}$$

这个式子表明，增加一级火箭和增加一倍喷气速度，对火箭运动速度产生的效果是一样的——都可以使速度成正比地增加，而且还弥补了喷气速度不能大幅增加的困难。

现代火箭大多用的是液体燃料，可以使 u 达到 3 千米/秒，z 达到 3，所以只需三级火箭，就可以最终达到 $v=3\times3\ln3$ 千米/秒 ≈10 千米/秒。即使实际损失 2 千米/秒，也可达到 7.9 千米/秒的第一宇宙速度。

多级火箭的巧妙思路在于，不但能使火箭逐渐变“轻”，而且能使质量比足够“大”。

当然，由于火箭靠不断向后喷射高速气流获得动力，同时质量减少，所以是变质量、变速度的运动。

先假设火箭在理想状态——不考虑外力因素下运动，火箭的瞬时质量为 m，u 为相对于火箭的喷气速度，它在一个微小时间 $\mathrm{d}t$ 内向后喷出的气体质量为 $\mathrm{d}m$。那么，由动量守恒定理，就可以得知火箭增加的动量 $m\mathrm{d}v=-u\mathrm{d}m$（这里的“－”表示 $\mathrm{d}v$ 和 u 的方向相反），即 $\mathrm{d}v/u=-\mathrm{d}m/m$。当然，这里假设了喷气产生的动力通过了火箭的重心，火箭不发生偏转。

当 u 为常数时，将 $\mathrm{d}v/u=-\mathrm{d}m/m$ 积分，就得到 $v/u=-\ln m+C$（C 是积分常数）。

设火箭起飞时的全部质量为 m_0，当 $v=0$ 时，$m=m_0$，于是可求得 $C=\ln m_0$。所以

$$v=u\ln(m_0/m),$$

纪念齐奥尔科夫斯基方程的邮票：1971 年尼加拉瓜发行

这就是前面提到的（6-5）——齐奥尔科夫斯基方程。为了纪念这一方

程，尼加拉瓜在1971年5月15日发行了一枚邮票。

有时，为了研究方便，$v=u\ln(m_0/m)$ 常写成 $m_0/m=e^{v/u}$。

由于在以上推导中忽略了外力对飞行的影响，所以（6-5）又叫火箭的理想速度方程。

如果要考虑重力对火箭飞行的影响，前面的 $m\mathrm{d}v=-u\mathrm{d}m$ 就要改写为 $m\mathrm{d}v/\mathrm{d}t=-u\mathrm{d}m/\mathrm{d}t$。由于加速度 $a=\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$，按牛顿第二定律，喷气产生的推力 $F=ma=m\mathrm{d}v/\mathrm{d}t=-u\mathrm{d}m/\mathrm{d}t$。又由于重力为 mg（其中 g 是重力加速度），所以当火箭垂直于地平面向上飞行的方程就是

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}-mg。$$

用 $a=\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ 消去 $\mathrm{d}t$，就得到

$$\frac{\mathrm{d}m}{m}=-\left(1+\frac{g}{a}\right)\frac{\mathrm{d}v}{u}。$$

由于 u 为常数，所以积分后就得到

$$\ln m=-\left(1+\frac{g}{a}\right)\left(\frac{v}{u}\right)+C'\quad（C'\text{是积分常数}）。$$

当 $v=0$ 时，$m=m_0$，所以 $C'=\ln m_0$。于是，得到考虑重力、火箭垂直向上运动的方程

$$\ln\frac{m_0}{m}=\left(1+\frac{g}{a}\right)^{\frac{v}{u}}\text{或}\frac{m_0}{m}=e^{\left(1+\frac{g}{a}\right)\left(\frac{v}{u}\right)}。$$

从这个方程可以看出，加速度 a 越大，要求的质量比 m_0/m 就越小，当 a 很大的时候，g/a 可以忽略不计——相当于消除了重力的影响，此时 $\frac{m_0}{m}=e^{\left(1+\frac{g}{a}\right)\left(\frac{v}{u}\right)}$ 就变成了 $m_0/m=e^{v/u}$。

“好风凭借力，送我上青云。”看来，这个“力”中也有e的一份。

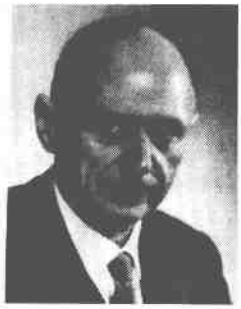
4. 阿克莱公式

当然，如果火箭的速度接近光速 c，那么

$$\frac{m_0}{m}=\left(\frac{1+v/c}{1-v/c}\right)^{\frac{c}{2u}}。$$

这个公式叫阿克莱公式，也叫广义齐奥尔科夫斯基公式，只有星际

航行才用到它。在著名的中国科学家钱学森的名著《星际航行概论》一书中，就有专门的“阿克莱公式”一节。



阿克莱

这里提到的阿克莱，是一位瑞士空气动力学家、20世纪最重要的航空专家之一，航空航天中著名的“马赫数”M就是他在1928年命名的。马赫是一位奥地利物理学家、哲学家，他在1885年的一篇论文中首先描述了M——飞行体的飞行速度与当地大气中的音速之比。

6.1.4 匀速落地的降落伞——落体速度与e

自由落体是按瞬时速度 $v=gt$（$g\approx 9.8$ 米/二次方秒是当地重力加速度，t 是时间）的规律下落的。那为什么降落伞会在后半程匀速（通常约4米/秒）下落呢？

原来，降落伞会受到空气的阻力——此时就不是自由落体，也就不能用 $v=gt$ 计算了。

那为什么受到空气阻力的降落伞就会匀速下落呢？

实验表明，通常在降落伞的速度小于几米/秒的时候，空气的阻力 f 不是很大，而且和速度 v 成正比，即 $f=kv$（k 是比例系数）。

根据牛顿第二定律，并设降落伞的质量为 m，加速度为 a，就得到 $mg-f=ma$。由于 $f=kv$，就得到 $mg-kv=ma$，于是有

$$a=-\frac{k}{m}\left(v-\frac{mg}{k}\right),$$

由于 $a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，就得到微分方程

$$\frac{\mathrm{d}v}{v-\frac{mg}{k}}=-\frac{k}{m}\mathrm{d}t。$$

以下解这个微分方程，有

$$\ln\left(v-\frac{mg}{k}\right)=-\frac{kt}{m}+C \quad (C\text{ 是积分常数});$$

再设 $t=t_0$ 时 $v=v_0$，就得到

$$C=\ln\left(v_0-\frac{mg}{k}\right)。$$

所以

$$v=\frac{mg}{k}+\left(v_0-\frac{mg}{k}\right)e^{-kt/m}。$$

这就是空气中的落体在较低的速度下，速度随时间变化而改变的计算公式。你看，e 出现在降落伞的运动公式之中了。

下面，我们用它来研究降落伞的运动。

在降落伞离开它的载体（如飞机）下落的前半程，由于 $v_0>\frac{mg}{k}$，所以 $v_0-\frac{mg}{k}>0$，加上 $e^{-kt/m}>0$，所以 $\left(v_0-\frac{mg}{k}\right)e^{-kt/m}$ 这一项是正值。因此，随着下落时间 t 的增加，降落伞的速度 $v=\frac{mg}{k}+\left(v_0-\frac{mg}{k}\right)e^{-kt/m}$ 显然会逐渐增大。

但是，由于 $0<e^{-k/m}<1$，所以 $e^{-kt/m}=(e^{-k/m})^t$ 会随着 t 的增加而递减。也就是说，$\left(v_0-\frac{mg}{k}\right)e^{-kt/m}$ 这一项是逐渐减小的，而 $\frac{mg}{k}$ 这一项是不变的，所以 v 不会无限增大。

下面，分两种具体情况讨论降落伞的整个运动过程。

（1）当 $v_0>\frac{mg}{k}$ 的时候，$v_0-\frac{mg}{k}>0$，$v>\frac{mg}{k}$，但随 t 增加而导致的 $\left(v_0-\frac{mg}{k}\right)e^{-kt/m}$ 的减小，v 会逐渐趋近于 $\frac{mg}{k}$，最后做匀速运动。

（2）当 $v_0<\frac{mg}{k}$ 的时候，$v_0-\frac{mg}{k}<0$，$v<\frac{mg}{k}$，但随 t 增加而导致的 $\left(v_0-\frac{mg}{k}\right)e^{-kt/m}$ 的增大，v 会逐渐趋近于 $\frac{mg}{k}$，最后也做匀速运动。

由此可见，不论哪种情况，降落伞最后都做匀速运动。

值得注意的是，我们以上的讨论，都是在 k 是常数的情况下进行的，但实际上 k 并不是常数——它会随 v 的变化而变化。此外，f 和 v 成正比的假设也是近似的——f 会随 v 的变化和 v^m（m 是一个随 v 而变化的由实验测定的正数）成正比。由于这两个主要原因，以上讨论是近似的。但是，通过进一步的计算，也可得到降落伞最后都是做匀速运动的结论。

事实上，我们还有更简单的方法来研究降落伞的运动。

由前面得到的 $mg-f=ma$ 可以讨论以下两种情况。

（1）当 v 较小的时候，$f=kv$ 也就较小$\Rightarrow mg-f>0\Rightarrow a>0\Rightarrow$降落伞速度 v 增加。

（2）当 v 继续增加的时候，f 也按 $f=kv$ 的规律增大。当 f 增大到 mg 的时候，$a=0$。$a=0$ 就是降落伞做匀速运动。

f 是不可能大于 mg 的——谁看到过没有向上吹的风或其他动力操纵的降落伞往天上飞呢？

6.1.5 牛顿小试牛刀做“小菜”——冷却定律中的e

1. 牛顿冷却定律

一杯热水一经倒出，它就开始冷却。最初冷却得很快，随后会变得平稳。经过一段较长时间后，水的温度最终会与室温保持一致。

牛顿研究了这类问题，并得出结论：一个热的温度为 T 的物体，它的冷却速度（$\mathrm{d}T/\mathrm{d}t$）与该物体和周围环境的温度 C 的差（$T-C$）成正比，即 $\mathrm{d}T/\mathrm{d}t=-k(T-C)$；这里，$k$ 是一个由物体和周围环境物（如空气）接触状况决定的、正的由实验测定的“常量”，t 是时间，它前面的负号表示高于环境温度的物体会冷却。

牛顿把 $\mathrm{d}T/\mathrm{d}t=-k(T-C)$ 进行积分运算，就得到

$$\ln(T-C)=-kt+B\ (B\text{ 是积分常数}),$$

也就是

$$T-C=\mathrm{e}^{-kt+B}。$$

设 $t=0$ 时物体的温度为 T_0，则上式变为

$$T_0-C=\mathrm{e}^{B}。$$

把

$$\mathrm{e}^{B}=T_0-C$$

代入

$$T-C=\mathrm{e}^{-kt+B}=\mathrm{e}^{-kt}\mathrm{e}^{B}$$

之中，就得到

$$T-C=\mathrm{e}^{-kt}(T_0-C)。$$

这个式子就是

$$T=C+(T_0-C)\mathrm{e}^{-kt}$$

或

$$T_t=C+(T_0-C)\mathrm{e}^{-kt}。$$

这个公式叫（牛顿）冷却公式或冷却定律、冷却法则。在公式中，T_t 或 T 是物体经过时间 t 之后的温度。

对于各种巨大成就等身的牛顿来说，这冷却定律当然只是他小试牛刀做成的“一碟小菜”。

2. 现实生活中的冷却定律

用冷却定律可以解释相同温度的热水，在冬天比夏天冷得更快等现象。显然，冬夏不同的是环境温度 C。

下面的具体实例，可以说明如何用牛顿冷却定律计算有关问题。

假设有一个62℃的物体，放在15℃的空气中冷却，1分钟后，物体的温度下降为52℃。此时，有 $52=15+(62-15)\ \mathrm{e}^{-k}$。由此式可求得这个问题中的 k 值。那么，就可以根据牛顿冷却公式 $T_t=15+47\mathrm{e}^{-kt}$ 求得这个物体在任意时刻的温度了。

牛顿冷却定律有广泛的用途。例如，人死亡以后，温度调节功能随即消失，因此借助于由正常体温（约37℃）与室温的比较，利用这个定律，就可以帮助判定死亡的时间。实际计算例子如下。

牛顿

某冬晨，警察局接到报案，在街头发现一具尸体，6点30分的时候，测量其体温为18℃，到7点30分已降到16℃，假设室外气温维持在 约10℃不变，且设人体正常体温是37℃，问这个人是什么时候死的？

显然，有 $T_{7.5}=16=10+(18-10)\times e^{-k(7.5-6.5)}$。这里的“7.5”和“6.5”分别指7点30分和6点30分。由此，可求得 $k=-\ln(0.75)\approx 0.287$，此时牛顿冷却定律的具体形式是

$T_t=10+(18-10)e^{-0.287t}$。再由 $37=10+8e^{-0.287t}$ 求得 $t\approx -4.24$，就知道人在约 $6.5-4.24=2.26$ 小时（即约2点16分）之前死亡。

又如，把冰箱中的食物拿出来解冻，也可以用这个定律来计算解冻的时间。这里有一道习题供你练习。把鱼从 -5℃的冰箱中拿出来在室温25℃下解冻，1小时后，鱼的温度约为10℃。现在问，如果希望在烹调时要求鱼温不低于15℃，那最少应该在烹调前的几个小时拿出来解冻？答案是，大约1.5小时前。

牛顿冷却定律也适用于低温物体温度升高的计算。图6-8中就画出了一个高温物体冷却和一个低温物体温度升高的曲线。从这个曲线可以看出，从理论上讲，一个物体的温度如果和环境温度不一样，那它的温度只能接近而不能达到环境温度，这与冷却公式的计算是一致的——因为 $(T_0-C)e^{-kt}$ 项只有当 $t\to\infty$ 的时候才为0。但事实是，用不了多长时

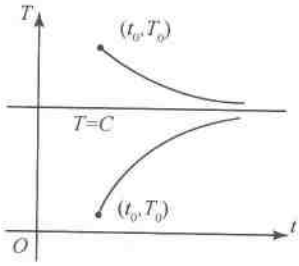


图6-8 由冷却定律绘制的物体冷却曲线

间，这个物体的温度就和环境温度一样了。

值得注意的是，牛顿冷却定律中的“常量”k 实际上随时间有微小变化，不是一个真正的常量，所以牛顿冷却定律是一个近似的规律。

牛顿冷却定律只适用于在强制对流条件下。于是，这个定律就表述为：在强制对流条件下物体放出热量的速度正比于它的温度与使它冷却的环境温度之差。

6.1.6 从麦克斯韦到玻耳兹曼——刻在墓碑上的 e

奥地利首都维也纳中央墓地，矗立着一座墓碑——一座自杀者的墓碑。

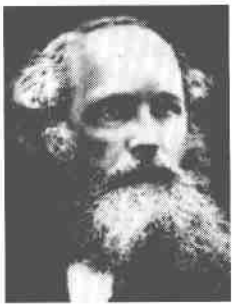
墓碑上的科学家的名字上方，端端正正地刻着一个公式：$S = k\ln\Omega$。

这是谁的墓碑，为什么要刻上一个公式，这个公式有什么用，他为什么要自杀？

1. 从克劳修斯到麦克斯韦——走进统计物理学的 e

我们把时间之钟拨回到 1858 年。这一年，德国物理学家克劳修斯发表了论文“气体分子的平均自由路程”。文中提出了气体分子在没有遇到其他分子作用球而自由通过厚度为 x 的空间的概率为 $W = e^{-\alpha x}$，式子中 α 是与作用球面积有关的待定常数。这样，e 就走进了统计物理学。

那么，克劳修斯为什么要写这篇论文呢？原来，他是为了回答荷兰物理学家布斯－巴罗特对分子运动论的责难。巴罗特发表在同年的 2 月号《物理学年鉴》上的论文的责难之一是：既然分子速度达到几百米/秒，那为什么烟尘在室内不动的空气中会停留很久呢？



麦克斯韦

大约一年以后的 1859 年 4 月，麦克斯韦偶然读到了“气体分子的平均自由路程”，很受鼓舞，重新点燃了他原来在土星卫环问题上运用概

率理论的信念，决定用概率理论研究分子运动问题。

麦克斯韦的努力没有白费，在这一年，他就发现了大数分子 n 的“麦克斯韦分子按速率分布定律”

$$\Delta n = 4n\mathrm{e}^{-u^2}u^2\frac{\Delta u}{\sqrt{\pi}},$$

式中 Δn 为相对速率介于 u 和 $u+\Delta u$ 之间的分子数。

而分子的算术平均速率公式

$$\bar{\nu} = \nu_B\int_0^{\infty}\frac{4}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-u^2}u^3\mathrm{d}u$$

也被发现。式中 ν_B 是分子的最可几速率。

此外，麦克斯韦还发现了“麦克斯韦分子按速度分布定律”

$$\Delta n_c = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}n\mathrm{e}^{-\frac{E_k}{kT}}\Delta\nu_x\Delta\nu_y\Delta\nu_z,$$

式中 n 是在热平衡状态下的某种大数气体分子，Δn_c 是速度为 ν 的 x，y，z 分量分别介于（$\nu_x+\Delta\nu_x$），（$\nu_y+\Delta\nu_y$），（$\nu_z+\Delta\nu_z$）之间的分子数，m 是一个分子的质量，E_k 是分子的平动能，k 是著名的玻耳兹曼常量，T 是热平衡时的热力学温度。

你看，上面的三个公式都离不开 e。

纪念玻耳兹曼公式的邮票：1971 年 5 月 15 日尼加拉瓜发行

2. 热力学概率与熵——玻耳兹曼定理

研究统计物理学和热学的车轮继续前进。

1871 年，奥地利物理学家、数学家玻耳兹曼连续发表了两篇论文："论多原子分子的热平衡"、"热平衡的某些理论"。在论文中，他研究了气体在重力场中的平衡分布，则分布函数是

$$f = \alpha e^{-\beta\left(\frac{mv^2}{2}+mgz\right)}, \tag{6-6}$$

式中 m 是分子的质量，mgz 为分子的位能，α 和 β 为取决于温度的常数，v 为分子的速度。

后来，玻耳兹曼又进一步把（6-6）推广到任意位场之中，得到

$$f(\nu_x,\nu_y,\nu_z,x,y,z) = \alpha e^{-\beta\left[\frac{1}{2}m(\nu_x^2+\nu_y^2+\nu_z^2)+U(x,y,z)\right]} \tag{6-7}$$

式中 $U(x, y, z)$ 表示分子在位场中的位能。

（6-6）和（6-7），就是著名的"玻耳兹曼分布"。

再后来，又把（6-7）表示为

$$f = ae^{-\frac{E}{kT}}, \tag{6-8}$$

式子中的 $E = \sum\left(\frac{1}{2}mv^2\right) + \sum V$。（6-8）是统计物理学的重要定律之一。

1877 年，玻耳兹曼进一步研究了热力学第二定律的统计解释，在第二定律和热力学概率 W（表示分子混乱程度的物理量）的关系中，证明了熵 S 与 W 的自然对数成正比。1906 年，德国物理学家普朗克把这个关系式写成 $S = k\ln W$，就是前面提到的 $S = k\ln\Omega$。和前面一样，这里的 k 也是玻耳兹曼常量。

玻耳兹曼定理 $S = k\ln\Omega$ 首先把熵定义为热力学概率的对数，揭示了熵增加原理的微观实质，是一个十分重要的公式。例如，普朗克就曾用它推导出辐射量子定律。这个公式不但是热力学第二定律的统计解释的基础，而且是现代信息论的基础。同时，它也是一个十分简洁优美的公式。

此外，在热力学研究中，玻耳兹曼还发现了"玻耳兹曼分子按能量分布定律"，和它的常用形式——"玻耳兹曼分子按势能分布定律"。这两个公式中也有 e。限于篇幅和公式较繁，前一个定律没有写出，后

一个定律在6.1.9小节中可以看到。6.1.7小节中的等温气压公式，也可以从这两个定律推导出来。

3. 不幸的玻耳兹曼

不幸的是，虽然当时人们对于宏观热力学理论有了比较深刻的认识，但描述微观热力学的统计理论还处于萌芽阶段。所以，人们不但没有认识到玻耳兹曼的工作的重大意义，反而对他进行围攻，使他长期孤军奋战，终于悲观厌世，郁愤成疾，曾想自杀。

玻耳兹曼

1906年9月5日，玻耳兹曼终于在去意大利的旅行途中，突然在里雅斯特附近的杜伊恩一家旅店上吊自杀身亡。

一个研究自然科学的科学家的观点，得不到人们的理解，反而被围攻，最终自杀身亡。这个悲剧，自然使人想起了唐朝诗人白居易的《竹枝》诗：“……唱到竹枝声咽处，寒猿暗鸟一时啼……”

后来，人们为了纪念这位统计物理学和物理动力学创始人（之一），建立了刻有 $S=k\ln\Omega$ 的墓碑，这是对亡灵的一丝安慰……

用杰出科学家玻耳兹曼的自杀事件，联系当今形形色色的自杀现象，让我们不得不非常关注社会的理解、关爱，以及个人的心理健康这两个重大的课题。

6.1.7 煮不熟的米饭——气压随高度变化公式中的e

一个登山队登上了欧洲的勃朗峰，大家兴高采烈地庆祝登顶的胜利。

但是，大家的喜悦很快就消失了——带来的食物煮不熟。原来，这里的大气压只有424毫米汞柱（1毫米汞柱的压强合133.28帕），水在84.5℃就沸腾了——食物在沸水里煮了很久，还是生的。

科学家研究发现，每升高1 000米，水的沸点就要下降大约3℃。因此，研究高海拔处的大气压和水的沸点之间的关系，就非常重要。

假设在海拔 h（米）的高处，大气压是 p（毫米汞柱），那么，两者之间的函数关系是 $p=p_0e^{kx}$。这个公式叫“等温气压公式”。这里的“等温”，指 h 高处的气温和海拔为0处的温度一样。但是，由于这两个温度实际上不同，所以所得的结果是近似的。看，e在这里又出现了。

在 $p=p_0e^{kx}$ 中，p_0 和 k 都是常量。$p_0=760$ 毫米汞柱的压强，是海拔为0处的“标准大气压”。$k=-\mu gh/RT$：$\mu=2.9\times10^{-2}$ 千克/摩尔，是空气的摩尔质量；$g\approx9.8$ 米/二次方秒，是当地重力加速度的近似值；$R=8.314$ 焦/(摩尔·开)，是摩尔气体常量；T 是空气的热力学温度。

现在，假设高8 848.13米的珠穆朗玛峰顶以 $h=8\ 000$ 米、空气温度 $T=0℃=273$ 开计算，问峰顶的大气压是多少？

把所有数据代入公式中，有 $p=760\times2.7183^{-0.029\times9.8\times8\ 000/(8.314\times273)}=279$ 毫米汞柱（的压强）。也就是说，在珠峰顶只有0.37个大气压（实测约0.3个大气压）。

根据不同 h 得到大气压 p 的值，再根据大气压 p 的值和沸点对应，就得到供登山、科考用的表6-1。

表6-1

大气压/毫米汞柱	788	760	707	658	611	567	523	487	450
沸点/℃	101	100	98	96	94	92	90	88	86

帕潘

为了解决高海拔处食物煮不熟的问题，法国物理学家帕潘于1679年发明了“家用压力锅”即“高压锅”，后来人们又称为“帕潘锅”。

“高压锅”的工作原是，锅内密闭的空气被加热以后，压强增大，使锅内液体的沸点增加而让食物在更高的温度中被加热。这样的结果在现在有两个用途：在高海拔处煮熟食物，用于更快煮熟食物。

1680年12月8日，英国皇家学会举行委员会会议，决定出版帕潘的书《新的烹调器》。可是，帕潘在给皇家学会的献词中却谦虚地说：“这本小册子中没有称得上远见卓识的东西，对这样的赞扬受之有愧。”

有趣的是，帕潘就是到阿尔卑斯山“被旅游”发现高山上的食物难以煮熟，从而到英国后做出这项发明的。

气压公式是17世纪末以后许多科学家研究大气压强的经验所得。英国天文学家哈雷，在分析了德国物理学家格里克和意大利物理学家托里拆利的实验之后，得到 $h=A\ln(B/C)$ 的结果。这个式子中的 A，B，C 都是常量。哈雷、格里克和托里拆利都是我们中学生的老朋友，他们各自以发现哈雷彗星、做测定大气压的马德堡实验和托里拆利实验闻名。

1823年，拉普拉斯第一次用密度的形式来表示气压公式：$\rho_0=e^{-\alpha h}$，式中 ρ 和 ρ_0 分别是研究点和海平面的空气密度，α 是常数。

在低于海平面处，也有计算空气压强的公式：$P=P_0 1.001^n$。这里的 n 是研究点距离海平面的垂直距离（米）除以8米所得到的数值——例如在海平面以下32米处，$n=32\div 8=4$。如果压强不太大，空气的密度也有相似的规律（马里奥特定律）$\rho=\rho_0 1.001^n$。马里奥特是一位法国神父和物理学家。他还发明了一种在装着水的容器底部放水时，水流大小不随水面下降而变化的奇异而有趣的容器——马里奥特容器。

6.1.8 植物学“联姻”物理学——布朗运动中的e

1827年6月的一天，英国植物学家布朗同往常一样，用显微镜观察克拉花的花粉标本。他偶然发现：悬浮在液面上的花粉微粒，老是在一上一下不停地无规则地运动。

布朗

是什么力使这些花粉不“安分守己”呢，它的运动又有什么规律呢？

经过先后许多科学家的研究，原来布朗运

动是由于花粉微粒与水分子碰撞的结果。而它的运动规律则最终被爱因斯坦、波兰物理学家斯莫路霍夫斯基、法国物理学家朗之万和法国物理学家佩兰揭开。特别是其中的佩兰，在1908年用“超显微镜”观察到上述物理学家理论预测的结果。这种显微镜，能观察到胶体粒子的运动，是由德国物理学家西登托普夫和瑞士物理学家齐格蒙弟在1903年发明的。

假设$\rho=\rho(x,t)$是一个布朗运动粒子在时间t和位置x时的概率密度。如果粒子在$t=0$的位置是$x=0$，在某些概率假设下，爱因斯坦在1905年导出

$$\rho(x,t)=(1/\sqrt{4\pi Dt})^3 e^{-|x|^2/(4Dt)},$$

这里的D表示一个正常数——扩散系数。可以看到，e出现在这个被称为“布朗运动的爱因斯坦统计力学公式”的“植物学公式”中。

在“爱因斯坦奇迹年”中，爱因斯坦关于布朗运动的两篇论文中的一篇，发表在1905年5月11日的《物理年鉴》上。

一个植物学的观察，引出了众多物理学成果，并且和e联系在一起，这是科学史上的一段趣闻佳话。

6.1.9 阿氏常数这样测——“微粒公式”借e建功

盖·吕萨克

通过在1805年的实验，法国物理学家、化学家盖·吕萨克在1808年指出，同温、同压、同体积的不同气体，应含有相同数目的原子。但遗憾的是，他的这个假说遭到英国化学家、物理学家道尔顿等的强烈反对。

1811年，意大利化学家阿伏伽德罗，发表了题为“原子相对质量的测定方法及原子进入化合物时数目比例的确定”的论文，以盖·吕萨克的实验为基础，引入“分子”（把盖·吕萨克说的“原子”改为“分子”）概念，并把分子与原子的概念区别和联系起来，提出了著名的“阿伏伽德罗定律”。这

个定律和前面说到的盖·吕萨克的假说本质一样。

当别人赞美阿伏伽德罗的创见时，他谦虚地说，他的理论不过是盖·吕萨克假说的发展。

同样遗憾的是，阿伏伽德罗定律当时也没有得到承认。直到半个世纪之后的 1860 年，由于另一位意大利化学家康查罗尼的力证，才得到科学界的公认。

纪念阿伏伽德罗逝世 100 周年的邮票

由阿伏伽德罗定律可知，每一摩尔的任何物质，都含有相同的微粒数目，这个数目就是阿伏伽德罗常数 N（简称阿氏常数）。其实，这个“常数”是有单位（个/摩尔）的，不是一个纯粹的数，因此更确切的名称应该叫阿伏伽德罗常量（简称阿氏常量）。

下面，我们来看测定 N 的一种方法。

设势能为 0 处的分子密度是 n_{00}，势能为 E_p 处的分子密度是 n_{0r}，$k=1.381\times10^{-23}$ 焦/开为玻耳兹曼常量，T 是热平衡的热力学温度，那么著名的“玻耳兹曼分子按势能分布定律”（简称“玻耳兹曼定律”）就是

$$n_{0r} = n_{00}\mathrm{e}^{-E_p/kT}。\tag{6-9}$$

如图 6-9 在重力场中取一处于热平衡和力学平衡状态的气柱，设 $h=0$ 处单位体积的分子数（即分子密度）为 n_{00}，根据玻耳兹曼定律，就得到高 h 处单位体积的分子数 n_{0h} 为

$$n_{0h} = n_{00}e^{-mgh/kT}, \tag{6-10}$$

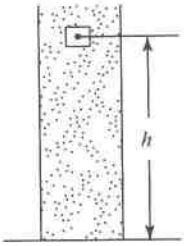


图 6-9

这里的 mgh 就是在高 h 处分子的势能 E_p，（6-10）就是“微粒按高度分布定律”，即我们标题中说的“微粒公式”。这个定律也适用于液体。

下面，我们用这两个定律结合布朗运动来测定阿氏常数 N。

设一种液体的密度为 σ，其中一个布朗微粒的质量为 m，密度为 ρ，则体积就是 m/ρ，所受到的浮力为 $m\sigma g/\rho$。这样，这个布朗微粒的表观重量就是

$$mg - m\sigma g/\rho = mg\frac{\rho - \sigma}{\rho}。$$

而这个布朗微粒在重力场中的势能就是

$$E_p = mgh\frac{\rho - \sigma}{\rho}。 \tag{6-11}$$

用 $R = 8.314$ 焦/（摩尔·开）代表摩尔气体常量，把（6-11）代入（6-9），并应用 $k = R/N$ 就得到

$$n_{0h} = n_{00}e^{-Nmgh(\rho-\sigma)/RT\rho}。$$

这个式子就是

$$N = \frac{\rho RT}{mgh(\rho - \sigma)}\ln\frac{n_{00}}{n_{0h}}。 \tag{6-12}$$

从（6-12）可以看出，只要测得难测的 n_{00}/n_{0h} 和 m，就可算得 N，因为其他的量要么已知，要么容易测定。

这个困难的任务，由法国物理学家佩兰在 1909 年完成。他在研究藤黄微粒在水中的布朗运动时测得 n_{00}/n_{0h}，并用斯托克斯公式测得 m，进而由（6-12）算得 $N = 7.2 \times 10^{23}$ 个/摩尔（一说 6×10^{23} 个/摩尔）。当然，现在用的更准确的值是 6.022×10^{23} 个/摩尔。这里提到的斯托克斯，是一位英国物理学家、数学家，他发现了描述黏滞流体阻力的斯托克斯公式。

尽可能准确地测定 N 值，是物理学和化学的重要课题。

6.1.10 电、光世界的宠儿——e和你时时相伴

电视机、收音机、录音机、数码照相机、DVD这些家用电器，已经成为当今人们不可或缺之物。

可是，你想到了吗——它们之中也有e。

图6-10是许多家用电器的电路中常见的一个RC电路。其中ε是电源的电动势，K是单刀双掷开关，i是单位时间流进电容左板的电量，R和C（没有充电）分别是电阻和电容，u_R和u_C分别是电阻和电容两端的电压。

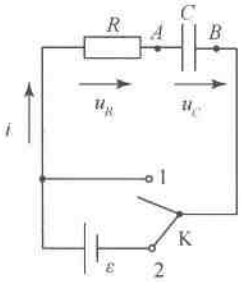


图6-10

当双掷开关K如图6-10和2接通的时候，电源向C充电。下面我们来研究u_C即$u_C(t)$随时间t的变化规律。

由电学可知，$u_R+u_C=\varepsilon$，而$u_R=iR$，所以有

$$iR+u_C=\varepsilon。\tag{6-13}$$

又由电学可得

$$i=\mathrm{d}q/\mathrm{d}t\tag{6-14}$$

（式中q是电容左板的电量，t是充电的时间）和

$$q=Cu_C。\tag{6-15}$$

把（6-15）代入（6-14）中，就得到

$$i=C(\mathrm{d}u_C/\mathrm{d}t)。\tag{6-16}$$

在把（6-16）代入（6-13），就得到

$$RC(\mathrm{d}u_C/\mathrm{d}t)+u_C=\varepsilon。\tag{6-17}$$

（6-17）就是$u_C(t)$随t变化的微分方程。

用分离变量法求得（6-17）的通解是$u_C(t)=\varepsilon+Ae^{-t/RC}$（式中$A$是常数）。

将初始条件$t=0$时$u_C(0)=0$代入（6-17），可求得

$$A=-\varepsilon,$$

所以（6-17）的特解是$u_C(t)=\varepsilon(1-\mathrm{e}^{-t/RC})$。这个式子就是$u_C(t)$随$t$

的变化规律。你看，e在这里又和你相伴。

根据这个规律，就可以绘制成图6-11的“*RC*电路的电容充电曲线”。

当电容电压充到ε之后，如果在图6-10中把K和1接通，电容就开始放电。这时，也可以用类似的方法求得放电规律是$u_C(t)=\varepsilon e^{-t/RC}$，这个式子中也有e。由它绘制的“*RC*电路的电容放电曲线”如图6-12所示。

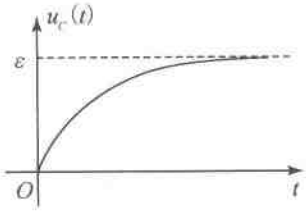


图6-11

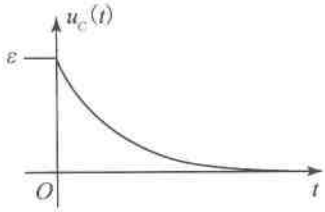


图6-12

当然，电器中电路远不止*RC*电路一种，例如还有*RL*电路（这里的*L*是电感）、*CL*电路、*RCL*电路等，它们的变化规律也各不相同。但是，只要涉及*C*和*L*的电路，在描述它们变化规律的公式中，就必定会出现e。此外，在计算某些电子元件的参数时，也会涉及e。例如，在计算热敏电阻在温度为*T*（以热力学温度K为单位）时的“零功率电阻值”R_T的经验公式中：$R_T=R_N e^{B(1/T-1/T_N)}$；这里的R_N是该热敏电阻在“额定温度”T_N时的电阻值，*B*是它的材料常数，即热敏指数。

不但如此，在光学中的许多变化规律，也涉及e。例如，光学中的兰伯特定律$I=I_0 e^{-\alpha_a l}$就有e。这里，I_0是单束光或平行光的光强，*I*是I_0经过厚度为*l*的均匀物质之后的光强，α_a是这种均匀物质的“吸收系数”——例如一个大气压下空气的$\alpha_a\approx10^{-5}$/厘米。我们曾经提到的瑞士-法国-德国数学家兰伯特，也是一位有名的物理学家，他在1760年发现了这个定律。

如果是在溶液中，兰伯特定律可以改写为$I=I_0 e^{-ACl}$的形式。这里

的 A 是一个与溶液浓度无关的常量，C 是溶液的浓度。为什么可以这样改写呢？因为物理学和化学中的比尔定律说，α_a 和 C 成正比。比尔是一位德国化学家、物理学家和数学家，他在1852年发现了比尔定律。

用上述光学中的这两个定律，可以解释光在物质中传播后会减弱，在浓雾天、水下能见度会降低等现象。

当然，光学中涉及e的远不止上述定律，例如散射定律 $I=I_0e^{-\alpha l}$ 就是其中的另一个。式子中的衰减系数 α 是吸收系数和散射系数的和。

6.1.11 不吃草的“马儿”——“衰变时钟”用e揭秘

一匹“马儿”跑呀跑——从“宇宙大爆炸”开始跑到今天。它不吃草不喝水、不歇不睡，还能长期准确计时，不受干扰。请你猜一个谜语：这是一匹什么样的“马儿”？

这个谜语有点不好猜，那我们就先放一放，先讲第二次世界大战末的一个故事。

1. 震惊画界的赝画案

1）假画露馅

1945年5月29日，荷兰首都阿姆斯特丹凯策斯格拉赫特街321号，两名警察奉命逮捕了本国画家米格伦。

原来，画家兼画商米格伦，曾在第二次世界大战期间，将荷兰著名画家弗美尔的油画《耶稣基督与奸妇》即《耶稣和通奸的女人》或《在通奸时被捉的女人》（或简译《妓女》）高价卖给德国空军部长、德意志第三帝国唯一的“帝国元帅”戈林，有犯“叛国罪”之嫌。这里的“高价卖给”，实际上是换回纳粹分子在这期间里掠夺荷兰的200幅名画。

弗美尔

“叛国罪”之嫌让米格伦锒铛入狱，面临死刑或无期徒刑，他当然要为自己做无罪辩护。

可有趣和出人意料的是，米格伦虽然承认将《妓女》卖给了戈林，但却不认为自己是在“卖国”，反而说自己是一位“爱国者”。他申辩的理由是，那幅画并不是弗美尔的原作，而是他临摹的赝品——把赝品卖给戈林，欺骗了敌人，当然不是“叛国”，而是“爱国”啰。他还于当年7月12日在狱中放话，《妓女》和另外一幅非常美丽的《在埃马斯门徒中》，以及另外几幅已被世人公认是弗美尔作品的真迹《在洗脚》、《看乐谱的女人》、《弹曼陀林女人》等名画，都是他“克隆”的。

弗美尔的《戴珍珠耳环的少女》

“完全不可能！”法官却不屑一顾地摇头。想想也是，戈林是一位精明的名画收藏家，岂会被赝品忽悠？

“你们真的不相信？”一看法官摇头，米格伦说，“请把画笔、画架、面布和颜料拿进监狱，我可以当场画一幅弗美尔的画给你们看看！”

果真，米格伦画出了酷似弗美尔原作的油画！

法官不得不相信了，不再判米格伦“叛国罪”——仅以“伪造名画罪”于1947年10月12日判他一年徒刑。当然，支持这个罪名的还有由著名化学家、物理学家和艺术史家组成的国际鉴定小组。他们在鉴定米格伦出售的多幅画之后，提供的两个铁证：画中都发现了酚醛树脂这种材料——比弗美尔生活的年代至少晚250年；还发现了画中一种在19世纪欧洲才开始使用的无机合成颜料钴蓝。

法庭上的米格伦（前）

原来，米格伦是一位在海牙艺术学院毕业的三流画家，作品不值钱，无人赏光。于是他“穷则思变”——造假名画高价出售牟利。他

总共伪造名画14幅，卖掉了9幅，都没有露馅。这一回，如果不是他为了表白自己是清白的“爱国者”而和盘托出底细，恐怕不会有人怀疑他那可以乱真的“名画”！

2）“入土”并未“为安”

米格伦虽然被判刑了，但围绕现存弗美尔名画真伪的争议，并没有随之烟消云散，反而愈演愈烈，并震惊欧洲。因为即使在专家们掌握了很多证据之后，仍有许多人不承认这些名画是米格伦的伪作，要求提供更科学的证据。

那为什么几幅假画就“吹奏皱一池春水”，引起如此轩然大波呢？原来，17世纪的弗美尔是与荷兰著名画家伦勃朗齐名的一代大师，其传世的之作仅36件，所以他的真画就成为文物市场上售价最高的作品之一。这样，出巨资购买的弗美尔名画的收藏者心中没底，“从感情上”也难以接受。不过，这些“人间是非”对米格伦来说，已经“是非成败转头空”了——被判刑两个多月之后的1947年12月30日，58岁的他就因心脏病发作在监狱中死去。

然而，米格伦伪造名画案，并没有随着他的“入土”而“为安”——名画的真伪扑朔迷离，争论依然并波及全球。

于是，如何用更科学手段鉴别弗美尔名画的真伪，就成了科学家们的一块心病。

治好这块心病的，是美国卡纳吉－梅隆大学的美国化学家凯斯奇。米格伦“入土”之后21年的1968年，他终于利用几种元素的放射性，鉴别出米格伦当年所卖的画只有30年的时间，而不是260多年。所以，弗美尔的油画《妓女》等是赝品。

米格伦的伪造名画案，不但震惊了当时的欧美，而且余波持续到今天的世界各地。例如，在2008年9月13日，中国某报纸还刊有题为《汉·凡·米格伦：我真的造了假!》的文章，称他为“史上最牛古画伪造者”，还说有两本米格伦的传记同时出版。

2. 不吃草的“马儿”大显神通

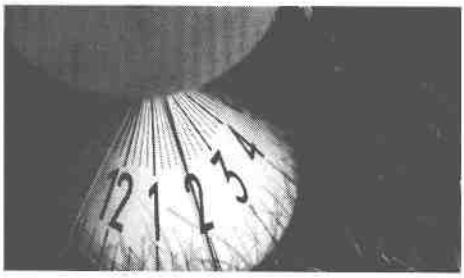
1）“衰变时钟”是怎样工作的

那么，元素的放射性怎么就能让科学家们长出“火眼金睛”，去看穿“名画”的真伪呢？

谜底是“衰变时钟”即“考古时钟”——我们所说的不吃草的“马儿”。这种时钟不需要另外供给能量，能永远、准确地长期计时。

什么是考古时钟呢？

植物通过光合作用，把含有碳－14和碳－12（碳的同位素中的两种）的二氧化碳吸收入体内，动物吃了植物，也把这两种碳吸入体内。由于大气中的碳－14含量（碳－12和碳－14之比为10^{12}：1.2）始终不变，所以从古到今动植物体内的碳－14的含量都相同。但是，当动植物死后，就不可能再吸收大气中的碳－14了，而它们在生前吸入体内的碳－14却会因衰变而日渐缓慢减少。这样，就可以根据碳－14的含量来测定这些“死者”生存的年代了。这就是考古时钟的工作原理——它并没有违反能的转化和守恒原理，只不过是把原子能释放出来罢了。



岁月在沙漏声中从远古走向未来

考古时钟可以用来测定古代物品的年代。例如，在20世纪，埃及的考古学家曾在离尼罗河不远的山上，发现了一座非常古老的谷仓。测定谷仓里小麦中碳－14衰变后的含量得知，这些小麦是六千多年前留下的。这里用的是碳－14这种能测量很长时间的考古时钟。

2）考古时钟的发现和“衰变定律”

那么，用考古时钟又是怎么能测定古代物品的年代呢？这得从一项

荣获诺贝尔化学奖的成果谈起。

放射性物质（碳-14仅仅是其中的一种）因衰变而减少是一个普遍规律。前述凯斯奇就是测定油画颜料中钋-210和镭-226等的“衰变率”λ，算出了油画中颜料的“年龄”来鉴别出米格伦的赝品的。

那什么是λ，又怎么具体计算呢？

λ是描述放射性物质衰变快慢的物理量，又叫“衰变常数”。放射性物质原子核的改变速度$\frac{dn}{dt}$显然和当时原子核的总数N和时间t成正比，即$\frac{dn}{dt}=\lambda dt$。将这个式子积分，并设$t=0$时的$N=N_0$，就得到“衰变公式”：$N=N_0e^{-\lambda t}$或$N(t)=N_0e^{-\lambda t}$。衰变公式描述的，就是著名的“衰变定律”。

在衰变公式中，我们看到e必然会成为“座上客”。

研究衰变问题，还有一个描述放射性物质衰变快慢的重要物理量“半衰期”T——原子核的数目减少到原数目一半时所用的时间。由$\frac{N}{N_0}=\frac{1}{2}=e^{-\lambda t}$可知，$T=\frac{\ln 2}{\lambda}\approx\frac{0.693}{\lambda}$。这个公式被称为“半衰期公式”。

例如，铀-238、铀-235、铀-234、碳-14、镭-226、锶-90各自的T分别约45.6亿年、>10万年、24.8万年、5 600年、1 622年、29岁。这里要特别说明，这些T值是指各元素衰减后分别变成另一种特定元素时的值——例如，铀-238的45.6亿年，是指铀-238变成铅-205时的T。

那么，碳-14的T约5 600年，是谁用什么具体方法计算出来的呢？

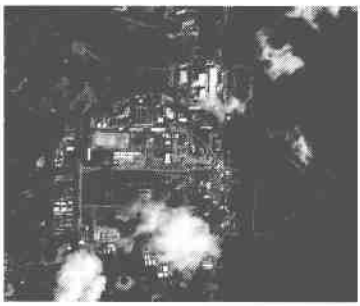
利比

利比是一位美国化学家。他从1930年左右就开始了这方面的研究，终于在1947年获得对古化石年龄测定的技术。他经过10来年的精心测定，得到$N(t)=N(10)$的值（这里t的单位是年），进

而求得$\frac{N_0}{N(10)}\approx 1.001\ 239$。再由衰变公式得到$\frac{N(10)}{N_0}=e^{-10\lambda}$。这个式子两边取自然对数，就得到 $\lambda=\frac{1}{10}\ln\frac{N_0}{N(10)}$。这样，就有 $T=\frac{\ln 2}{\lambda}=\frac{\ln 2}{\frac{1}{10}\ln\frac{N_0}{N(10)}}$年$\approx\frac{10\ln 2}{\ln 1.001\ 239}$年$\approx 5\ 600$ 年。因为这项成就，利比独享 1960 年诺贝尔化学奖。

当然，由于测量的误差，其他科学家测定的 T 值就有 5 730 年等接近 5 600 年的多种。

从衰变公式可以看出，核废料在丢弃多年之后，仍然有危险。所以，“事故核电站”——例如著名的 1986 年苏联切尔诺贝利今属乌克兰 1979 年美国三里岛、2011 年日本福岛等地的核电站，放出的某些有害辐射会长期存在。这是因为它们的 T 很大，所以放出包括能放出 α，β，γ 等有害射线的放射性物质衰减得很慢，而且永远不会消失。例如，其中含的铀 -238 的 T 就达到惊人的 45.6 亿年！而福岛第一核电站附近曾检测出的锶 -90 的 T 则长达 29 年。一个典型实例能说明这一点。从 1992 年曼彻斯特大学心理学系的约翰·克拉克博士患大脑肿瘤辞世起到 2009 年 3 月初，就有 6 名学者因各种癌症死亡。而他们都先后在英国著名物理学家卢瑟福做过试验的大楼内工作过——1909 ~ 1917 年间，卢瑟福在这座曼彻斯特大学内的大楼做过氡、钋等的放射性试验。另一个名例是，居里夫人 67 岁就因白血病辞世。而病因就是放射线的伤害——她死后 50 多年，仍能检测到放射线从她留下的实验册、书籍和菜谱等物品中逸出。而在 2009 年 5 月发现的德国雀巢等品牌的矿泉水中铀超标事件，更是引起过人们的关注。



航拍福岛第一核电站核事故

3）用途广泛的考古时钟

用衰变公式测量时间 t 的方法，从科

学方法角度看，属于“通用科学方法”中应用广泛的“间接测量法”，就是把对 t 的测量转化为对 N 的测量。

“混沌初开，乾坤始奠。”那么，混沌在何时初开，乾坤在何时始奠呢？这就是地球年龄的问题。

科学家借助多种放射性元素，用上述方法测得地球上最古老的岩石，年龄约30亿年。经过必要的修正和测算，地壳的年龄大约是46亿年。这个年龄加上地壳形成前地表熔融的时间，地球的天文年龄大约是五六十亿年。

对于那些没有含碳的古物，当然不能借助于碳的同位素，但可以用相同的原理测定。例如，古代海洋的温度就是利用同位素氧－16和氧－18的变化测定的。具体方法如下。

贝壳的主要成分是碳酸钙（$CaCO_3$），其中的氧主要由氧－16和氧－18组成，而且两者有基本上固定的比例500∶1。但是，当海水温度变化1℃时，贝壳中 $CaCO_3$ 里两者的比例就会发生显著变化：海水温度升高时氧－16的比例增大，海水温度降低时氧－16的比例减少。这样，事先通过实验，测定在各种海水温度下贝壳中 $CaCO_3$ 里的氧－16和氧－18的比例，再把考古发掘出的贝壳进行同位素测定，就能断定古代贝类生活的年代和当时海水的温度了。

“借得山东烟水寨，来买凤城春色。”科学家们就是借e这个“烟水寨”，利用衰变公式，来买得“凤城春色”——由考古发掘物（如兽骨、木炭、贝壳等）来测定地球、古文物、化石等年龄的。

6.2 化学中的反应速度和焓变

6.2.1 反应速度这样定——阿仑尼乌斯公式中的e

化学反应速度是科学家们关心的重要问题。

德国化学家、物理学家威廉米在1850年对化学反应速度首先进行

阿仑尼乌斯

了定量研究，得出了化学反应过程的第一个数学表达式。经过许多科学家后来的研究，最后由瑞典化学家阿仑尼乌斯得到反应速度的常数 k、频率因子 Z、活化能 ε 与反应温度 T 的关系方程式——阿仑尼乌斯公式。

设 $R=8.314$ 焦/(摩尔·开) 是摩尔气体常量，阿仑尼乌斯在 1889 年根据经验得到的阿仑尼乌斯公式是

$$k=Ze^{-\varepsilon/RT}。$$

从这个公式可以看出，e 出现在其中。还可以看出，标志反应速度的 k，随 T 的增加而急剧增大，这可以解释我们在做化学实验时经常要加热来加快反应速度等现象。

阿仑尼乌斯公式有广泛的用途，例如测某个化学反应的 k，Z，ε 等，以实现对化学反应的监测。

6.2.2 “伤寒病”这样治疗——焓变公式中的 e

化学中有 e 的公式不止一个。

某些大学生在结识熵、焓这些“难以读懂”的“新朋友”感到很“头疼”时，就说得了“伤寒病”。其实，和任何事物一样，不懂就难，懂了就不难。只要“世上无难事，只要肯登攀”的信念“在你的心上”，就会“自由地飞翔”！

我们用 G 表示自由焓，ΔG 表示自由焓变化，ΔG° 表示标准状态下自由焓变化，那么，对于化学反应

$$aA+bB=cC+dD\ (a,\ b,\ g,\ d\ 分别是系数),$$

在等温等压条件下，就有公式

$$\Delta G=\Delta G^\circ+RT\ln(p'^c_C\times p'^d_D)/(p'^a_A\times p'^b_B)。$$

这个公式中的 p'^a_A，p'^b_B，p'^c_C，p'^d_D 分别表示物质 A，B，G，D 处于任意状态（通常指非平衡状态）时的分压（例如反应起始时的分压）；T

是空气的热力学温度，$R=8.314$ 焦/(摩尔·开) 是摩尔气体常量。

用这个公式，就可大体判断某个一般的化学反应在等温等压下能否进行——$\Delta G^{\circ}<0$ 进行的可能性大，$\Delta G^{\circ}>$ 进行的可能性小。当然，准确的判断还要看熵变 ΔS 的大小。

你看，e 又出现在又一个化学反应的公式中了。

6.3 生物学、医学中的奥秘

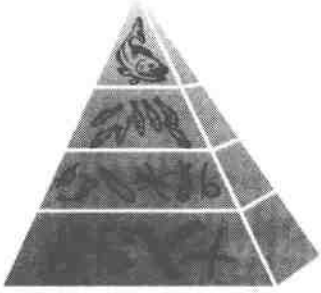
6.3.1 生存竞争——弱肉强食方程中的 e

1. 雷蒙德·劳雷尔·林德曼的“食物链”

在一个海岛上，住着狐狸和野兔。狐狸吃野兔，野兔吃翘摇草。当翘摇草生长旺盛的时候，野兔就多，狐狸也容易得到美餐，总数也就多了起来。但是，当狐狸数量多到没有足够的野兔充饥的时候，一部分就会因饿死和相互间的残杀而使总数减少。狐狸数量一减少，野兔相对就安全一些，总数又会增多，这又会引起狐狸总数新一轮的增加……

这，就是生物之间弱肉强食的斗争和依存关系——食物链。

说起食物链，还有一段有趣的故事呢！在对大约 50 万平方米的达尔沼泽湖生态系统的营养结构进行了为期三年研究之后，美国耶鲁大学毕业的 26 岁青年学者雷蒙德·劳雷尔·林德曼，终于 1941 年发表了研究报告《一个老年湖泊内的食物链动态》。报告指出，生物量从绿色植物向食草动物、食肉动物等按食物链的顺序在不同营养级上转移时，有稳定的数量级比例关系——通常后一级生物量只等于或者小于前一级生物量的 1/10。他把生态系统中的这种必然的定量关系，叫做“十分之一定律”。如果把这种关系表现在图上，用横坐标



生物群落中的数量金字塔

表示生物量，在纵坐标上把食物链中各级消费者的数量依次逐级标出，那么，整个图形就像一个金字塔——在生态学中叫“群落中的数量金字塔”。

第二年，林德曼又发表文章，说明生态系统中能量与物质的流动在不同的营养级之间存在的定量关系，是维持所有生态系统稳定的重要因素。

就这样，林德曼就在中国“大鱼吃小鱼，小鱼吃蚂虾，蚂虾吃泥巴”、“一山不存二虎”的启发下，首先提出了食物链这个概念，并初步创立了相关理论。可惜的是，这位生态学家“年方三九”就因患肝炎（一说车祸），不幸早逝。

2. 先驱们的工作

当然，最早对类似问题进行研究的倒不是林德曼。

在1859年出版的生物进化论巨著《物种起源》中，英国著名生物学家达尔文就说，他曾观察到“猫多羊就多”的现象。原来，他研究后得出这样一条食物链：猫多→鼠（吃丸花蜂，破坏蜂窝）少→丸花蜂（传授花粉）多→三叶草多→羊多……他还把这种链锁关系称为“生命之网”。

中国古代的著作——例如战国时期的《庄子·山木篇》中，则更早记载着生物彼此之间的相互斗争和依存的关系。《吴越春秋》等古书关于“螳螂捕蝉，黄雀在后”的记载，和生命之网、食物链反映的是同一自然规律。

到了1935年，英国生态学家坦斯利首先提出了生态系统的概念，为生态学成为一门新兴学科开辟了道路。

3. “生物方程”从沃尔泰拉开始

那么，前面所说的狐狸和野兔之间的数量关系究竟怎样呢？

最早用定量公式描述它们之间的数量关系的，是意大利数学家沃尔泰拉。他用数学方法对生存竞争、弱肉强食现象进行研究之后，得到了定量的“沃尔泰拉弱肉强食方程组”——我们叫它“生物方程”

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt} = mx - nxy, \\ \dfrac{dy}{dt} = -py + qxy。\end{cases}$$

在这个方程组中，x 和 y 分别代表野兔和狐狸在 t 时刻的数量，$\frac{dx}{dt}$ 和 $\frac{dy}{dt}$ 分别是野兔和狐狸的繁殖速度。m，n，p，q 分别是正常数。mx 表示野兔因草丰而增加的数量，$-py$ 表示狐狸因种群扩大造成饥荒而减少的数量。xy 代表两者相遇的机会，所以 $-nxy$ 和 qxy 分别代表野兔和狐狸因相遇而减少和增加的数量。

求解这个微分方程，就可以得到 $y^m e^{-ny} = kx^{-p} e^{qx}$（式中 k 是正常数），这就是野兔和狐狸的弱肉强食关系。看，e 又出现在弱肉强食的生物链中了！

用 $y^m e^{-ny} = kx^{-p} e^{qx}$，可以绘制出野兔和狐狸数量关系的曲线——一条封闭曲线。这就表明，两者的数量会周期性增减，始终呈波动性的生态平衡，而这正是我们所希望看到的。

4. “绿色家园”和我们息息相关

说到生物链，我们要多说几句这个与当今的“热点”——环境相关的问题。

为了保护美国北亚利桑那州的凯巴伯森林中的4 000头鹿，在1906年，西奥多·罗斯福总统宣布凯巴伯森林为全国狩猎保护区。至1942年，鹿倒是增加到了10万头，但它们却遭到巨大的灾难——森林所有的植物叶子经不住它们的饕餮大餐而荡然无存，最后鹿也只剩下8 000头。

卡森在搜集农药危害的证据

这种破坏生态平衡的例子不胜枚举。人们为了得到更多的鱼而捕杀以鱼为食的水獭，但发现水獭被“斩尽杀绝”之后，鱼也消失

了。后来人们才知道，原来水獭吃的鱼中的大部分，是游得慢的病鱼，水獭及时吃掉它们之后才防止了鱼瘟的蔓延。

由此可见，爱护环境，保持生态平衡是多么重要。因此，美国生物学家、世界第一女环保斗士卡森的话，应是使我们警醒的座右铭："我们必须与其他生命共同分享我们的地球。"

用数学方法研究生物学的学科，叫生物数学，属于应用数学的一个分支。生物数学是在1901年创立的，其标志是英国数学家、生物统计学的奠基人皮尔逊和他的老师，英国差异心理学之父高尔顿，以及英国生物统计学家韦尔顿在这一年共同创办的《生物统计学》杂志的问世。1939年，俄国－苏联数学家拉舍夫斯基创办了《数学生物物理学通报》杂志，把数学和物理学的方法引进生物学的研究之中，使生物学得到进一步的发展。

6.3.2 从人类到细菌——生物增殖中的e

如果不控制人口增长，到2555年，世界人口将达到大约360万亿，每个人平均还没有半平方米的栖身之地！

这不是危言耸听，而是科学预测。那么，科学家们又是根据什么预测的呢？

1. 人口增长有规律

1）马尔萨斯的人口增长规律和"人口爆炸"

1798年，英国著名经济学家马尔萨斯匿名出版了名著《人口原理》初版。这本在他生前就出了六版的书，根据"食物为人类生存所必须和两性间的情欲是必然的"这两条"永恒的法则"出发，提出了"算术级数增长的粮食跟不上几何级数增长的人口，如果不抑制人口增长，人类将面临生存危机"的观点。他这种观点的基础是，人口的增长速度（或称增长率）与总人口数成正比。

那么，我们就来看一看人口是如何按几何级数增长的吧！

假设t时刻的总人口数为$f(t)$，由于人口增长率$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$和$f(t)$成正比，

那么$f(t)$就满足

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=kf(t)\quad(\text{其中}k\text{是人口增长率})\tag{6-18}$$

和初始条件

$$f(t_0)=f_0\tag{6-19}$$

（其中f_0是某“起始年”t_0的总人口数）。

那么，由（6-18）可得$\frac{\mathrm{d}f}{f(t)}=k\mathrm{d}t$，两边积分就得到

$$\ln f(t)=kt+C\tag{6-20}$$

（其中C是积分常数）。

由（6-20）可得$f(t)=\mathrm{e}^{kt+C}=\mathrm{e}^{C}\mathrm{e}^{kt}$。再结合（6-19），可求得$\mathrm{e}^{C}=f_0\mathrm{e}^{-kt_0}$。

最后，就得到马尔萨斯的人口预测公式$f(t)=f_0\,\mathrm{e}^{-kt_0}\mathrm{e}^{kt}$，也就是

$$f(t)=f_0\mathrm{e}^{k(t-t_0)}。\tag{6-21}$$

我们看到，在人口预测公式中，e又出现了。

现在，我们用（6-21）来计算人口增长的理想化趋势。

第一个计算是，人口要经过多少年增加到两倍？

假设人口增长率$k=1.5\%\sim2\%$，现取2%。于是有$f(t)=f_0\mathrm{e}^{0.02(t-t_0)}$。显然，人口增加到原来的两倍时，就有$2f_0=f_0\mathrm{e}^{0.02(t-t_0)}$。容易由此式算得$t-t_0\approx34.66$年。也就是说，每经过大约35年，人口数量就要增加一倍。

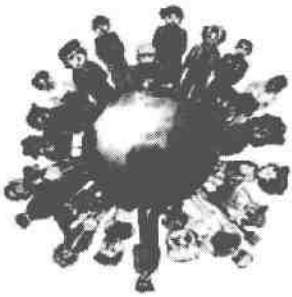
2005年1月6日0点，中国人口刚好达到13亿。中央电视台“新闻频道”还对出生在北京妇产医院的第13亿个“小公民”的出生，进行了实况转播。世界人口f_0在这一天也达到60亿。由此引出的第二个计算是，550年之后的2555年，理想化的全世界人口有多少？

由$f(2555)=60\times\mathrm{e}^{0.02\times550}$亿可以算出，2005年之后550年的2555年，全世界的人口就会达到前面所说的360万亿！

由于地球的平均半径约为6 400千米，所以地球的表面积$S\approx4\times$

$3.1416\ (6.4\times10^6)^2$ 平方米 $\approx 5.147\times10^{14}$ 平方米。

这样，即使地球上包括海洋等水面和南极等恶劣环境在内的每个角落都能站人，每个人平均也只有约 $5.147\times10^{14}\div(3.6\times10^{14})$ 平方米，即约 1.43 平方米！如果只按“陆占其三”的陆地（包括寒冷的南极）才能站人，那每个人平均更是少到 0.43 平方米！



人口爆炸，我们立足何处

只要再过距今 500 多年，人口就狂增到平均每人只有不到半平方米面积的地步——这就是“人口爆炸”。由此可见，人类控制人口数量（和提高人口质量）的计划生育国策，是多么重要！

2）人口增长规律的“精确版”

当然，实际上预测人口的增长并不是上面说的那样简单和理想化，因为要受到生活条件、各种意外事故等许多因素的影响。这样，学者们就创立了比较符合实际的数学模型

$$f=\frac{c}{1+e^{-pcT}(c-f_0)/f_0},$$

这里的 c，p 都是由统计规律确定的实数，T 是年代的间隔时间。

根据这个数学模型，并由中国 1949 年（5.49 亿）、1953 年（6.02 亿）、1957 年（6.57 亿）、1978 年（9.75 亿）的人口，得到 $c\approx1628$，$pc\approx0.03563$，这样，这个数学模型就成了计算中国人口的增长公式（人口单位：百万人）

$$f=\frac{1\,628}{1+e^{-0.03563T}(1\,628-f_0)/f_0}。$$

根据这个公式，中国数学工作者宁挺在 1985 年出版的《说 e》一书中，以 1978 年的 975 百万为 f_0，预测了 2000 年的中国人口 f。此时 $T=22$，所以有

$$f=\frac{1\,628}{1+e^{-0.03563\times22}(1\,628-975)/975}\text{百万}\approx1\,247\text{百万}\approx12.5\text{亿}。$$

此外，还有美国和法国预测人口的公式

$$f = \frac{\alpha f_0 e^{\alpha T}}{\alpha - \beta f_0 + \beta f_0 e^{\alpha T}},$$

以及另一个预测人口的公式

$$f = \frac{c}{1 + e^{-\rho c T}(c - f_0)/f_0}。$$

这里提到的3个人口的数学模型，都可以看成人口增长规律的“精确版”。

2. 生物同唱一首歌

1）洛吉斯提模型——生物增长类似人口增长

e不只是出现在计算人口增长的公式中。科学家们发现，描绘生物种群的增长、细胞的增殖、细菌的繁殖、生物植株的增高等随时间变化的函数关系中，都会出现e。著名的洛吉斯提函数 $y = \frac{n}{1 + ce^{-rx}}$（其中 n，c，r 是常数），就是描述它们的近似数学模型，这类函数称为“洛吉斯提模型”或“洛吉斯提增长”，也有人称为“生长模型”。用这个模型对比前面人口增长规律的“精确版”可以看出，生物们在“同唱一首歌”。

例如，玉米的整个生长过程，有人就借助于洛吉斯提模型

$$y = \frac{300}{1 + 393.06e^{-0.23x}}$$

来近似描绘。

维哈尔斯特

洛吉斯提模型的创立者，是比利时应用数学家维哈尔斯特。他于1838年提出的这个模型，修正了马尔萨斯的《人口原理》一书中有不小缺点的人口增长模型。

当然，洛吉斯提模型也不是完美无缺的，所以后来还出现过许多模型——例如1960年美籍奥地利人海因茨·冯·福斯特等，提出的一种模型。

2）夏天的食物易腐败

洛吉斯提函数在生活、生产和科研中都有广泛应用。例如，预测生物发育、生长状况，对于了解它们是否健康成长有很大作用。又如，对预测各种疾病的传播时间和病例的关系，控制和预防疾病，都有很大帮助。

而理想化的细菌增殖模型，则由下面的推导得到。

设培养皿内的细菌总数是 n_0 个，在每个瞬间的增殖率是该时刻 n_0 的 k 倍，并以 1 小时为单位，那么 1 小时末的细菌的数就是 kn_0，此时的细菌总数就是

$$n_0 + kn_0 = n_0(1+k),$$

两个小时末的细菌总数就是

$$n_0(1+k) + n_0 k(1+k) = n_0(1+k)^2,$$

……

显然，t 个小时末的细菌总数就是

$$n_0(1+k)^t。$$

当然，细菌并不等到某一个小时末才开始增殖，而是在一个更短的时刻（我们设为 $1/m$ 小时）末就开始增殖。这样，根据同样的方法，就可以得到 t 小时末的细菌总数

$$n_{mt} = n_0(1+k/m)^{mt}。$$

当 $m\to\infty$ 时的极限，就是

$$n(t) = \lim_{m\to\infty} n_0(1+k/m)^{mt}。$$

设 $k/m = 1/p$，则 $m = pk$；当 $m\to\infty$ 时，$p\to\infty$，所以

$$\begin{aligned} n(t) &= \lim_{m\to\infty} n_0\left(1+\frac{1}{p}\right)^{pkt} \\ &= n_0 \lim_{m\to\infty} n_0\left[\left(1+\frac{1}{p}\right)^{p}\right]^{kt} \\ &= n_0 e^{kt}。\end{aligned}$$

$n(t) = n_0 e^{kt}$ 就是计算细菌增殖的公式。

下面，我们用这个公式计算细菌总数 $n_0=1$ 个，在24小时之后有多少。

由于细菌是成倍增长的，所以 $k=2$，这样 $n(24)=1\times e^{2\times 24}=e^{48}\approx 7\times 10^{20}$——一个有21位整数的“天文数字”。

当然，由于细菌也会死亡，而且也不是 $m\to\infty$ 等原因，所以实际数字要比这要小。但是，生物学家的研究表明，以分裂方式繁殖的细菌，一昼夜可达72代，能增殖到超过百亿亿倍。这无疑能解释夏天有营养的食物会很快变质的现象。

3）“海拉”夺命只要7个多月

1972年，尼克松再次当选为美国总统后，建议美苏两国联合攻克癌症。建议立即被采纳。美苏双方各赠对方供研究的23种和6种致癌病毒或癌细胞标本。次年1月，美国国立癌采研究中心将苏联的癌细胞标本分送给几位科学家研究——其中的一份到了加州细胞培养所长实验所所长尼尔森芮斯博士手上。

经过几番周折，尼尔森芮斯终于弄清，所有苏方赠送的6种标本，全是20多年前死去的美国黑人妇女赫丽塔·拉克丝的癌细胞。

“海拉”细胞正在分裂的电镜照

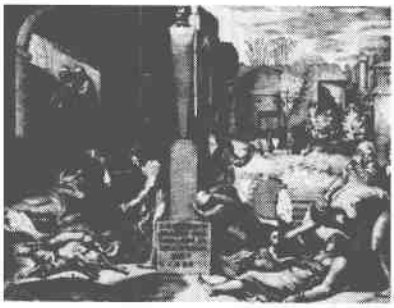
原来，拉克丝在1951年10月死于一种罕见的子宫颈癌。这种特殊的癌细胞“海拉”具有极强的繁殖力和生命力。拉克丝从发现第一个病灶到死亡，整个过程不足8个月。科学家们提取这种癌细胞加以培养，发现这些癌细胞的个数 n 竟以 $n=n_0\times 2^x$（n_0 是初期癌细胞的个数，x 是天数）的规律疯狂增长——每天增加1倍！1991年，“海拉”被命名为“Helacyton gartleri”——有人认为是一个新物种。

不难算出，如果“海拉”不死亡，1个月之后将会增加到10亿倍以上。当然，“海拉”也会死亡，但1个月之后绝不会少于1千万倍！

基于“海拉”20多年没有死亡和这么强的繁殖力，尼尔森芮斯撰文向全世界发出警告：“如果听任‘海拉’舒舒服服毫无抑制地生长，那么到现在为止，它们很可能已经占领整个世界！”他绝不是危言耸听：只需计算365天后就知道，它会增加到大约7.3×10^{109}倍。尼尔森芮斯之后30多年的今天，恐怕“海拉”早已经占领了整个宇宙！

6.3.3 科学预测鼠疫病人数——疾病研究中的e

“万能的上帝公正而严厉，带着瘟疫莅临剑桥城。”名扬世界的“伟人的母亲”——剑桥大学的一位学院教长这样写道。这是怎么回事？


人畜在鼠疫中悲惨地死去

原来，从1665年6月开始，瘟疫降临到英格兰的许多地区。这种瘟疫就是黑死病，又名淋巴腺鼠疫，最初于1347年在欧洲出现，没想到这次又“光临”英伦，在夏季伦敦就有1/10的人死亡。黑死病的初期症状是剧烈的头痛和眩晕，接着就四肢颤抖、腋下和腹股沟肿胀、高烧，最后皮肤出现黑斑，象征着死神来临。于是，这一年的8月7日，牛顿所在的剑桥三一学院“关门大吉”，学生一律回家。当然，他在此前已经“远远地躲开”——回到他的家乡英格兰东海岸林肯夏郡的沃尔斯索普小镇。

接下来的故事众所周知：在“牛顿奇迹年”里，牛顿研究微积分、二项式定理、万有引力、解析白光……直到1667年4月才回剑桥——其间他曾短暂回校。

那么，曾在14世纪夺去欧洲总人数三分之一，即2 500万人生命的鼠疫为何传播得这么快呢？这就要靠e来揭开“秘密”了。

设x是患鼠疫的人数，y是接近这些人而被传染的人数，它们都是时间t的函数，那么x和y就满足

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = mxy - nx, & (6\text{-}22) \\ \dfrac{dy}{dt} = -mxy, & (6\text{-}23) \end{cases}$$

其中 m 和 n 分别是不一定相同的正常数。(6-22) 中的 mxy 表示容易被传染人群中变成鼠疫患者的增速，$-nx$ 表示患鼠疫者因病死而减少的速度。(6-23) 中的 $-mxy$ 表示容易被传染人群因感染鼠疫之后，被传染人群减少的速度。

(6-22)÷(6-23)，就得到

$$\frac{dx}{dy} = -1 + \frac{n}{my}, \tag{6-24}$$

即

$$dx = \left(-1 + \frac{n}{my}\right)dy。 \tag{6-25}$$

把 (6-25) 两边积分，并用初始条件 $x = x_0$，$y = y_0$，就得到

$$x = x_0 + y_0 - y + \frac{n}{m}\ln\frac{y}{y_0}。 \tag{6-26}$$

看，e 出现在预测鼠疫病人数的计算公式 (6-26) 之中了。

从 (6-24) 可以得到以下两个结果：当 $y > \frac{n}{m}$ 时，$\frac{dx}{dy} < 0$，x 是以 y 为自变量的单调递增函数；$y < \frac{n}{m}$ 时，$\frac{dx}{dy} > 0$，x 是以 y 为自变量的单调递减函数。

这两个结果告诉我们，鼠疫初期（即 $y > \frac{n}{m}$ 时），感染鼠疫的人增加很快，我们应加强这早期的控制；到了鼠疫后期（即 $y < \frac{n}{m}$ 时），虽然感染鼠疫的人增加较慢，但已经造成许多人死亡。总之，应加强早期的控制，才能有效减少灾难的损害。

当今世界，包括“非典”(SARS)、艾滋病、禽流感、登革热、甲型 H1N1 流感等在内的传染病正经常或间断袭击人类，我们应该有加强早期

控制的意识，不能麻痹大意而等到“泛滥成灾”——像 2003 年的“非典”和 2009 年的甲型 H1N1 流感那样，造成重大损失之后才“手忙脚乱”。

6.3.4 生物体上的玄机——宇宙万物的“生长螺线”

1. 从鹦鹉螺到太阳花——“黄金”和 e 扮靓生物

鹦鹉螺

鹦鹉螺是“上天”派来的使者，一到“人间”就披上了美丽的花纹——一条条黄金螺线。

当然，披上黄金螺线的动物，还有山羊和牛（的角），蜗牛、海星、贝壳、梭尾法螺（的外壳）……

不但动物身披黄金螺线，而且植物也要用“黄金”和 e 来扮靓美丽的身躯。

向日葵即太阳花和松果的种子、蓟草和波斯菊的花瓣、菠萝的鳞片，以及花菜的花，都按黄金螺线排列。蕨类植物梢头的琴状，也是黄金螺线……

那么，黄金螺线和 e 又有什么瓜葛呢？

原来，黄金螺线的一般极坐标方程是 $\rho = k\mathrm{e}^{\alpha\theta}$（$\rho$ 为极径，θ 为极角，k 和 α 是常数）内就有 e。如果取 $k=\alpha=1$，就简化为 $\rho=\mathrm{e}^{\theta}$。

2. 宇宙万物的“生长螺线”

当然，不但生物喜欢用黄金螺线来扮靓自己，而且宇宙万物也要和它“生死不离”——从银河系到“澡盆旋涡”的形状，从旋涡星云到旋风吹过的沙子的形状……

互相作用的螺旋星云 NGC2207 和 IC2163

黄金螺线是一种等角螺线，也叫对数螺线。由于它和生物密切相关，所以人们又叫它“生长螺线”。这个美名更具有哲理和“普适性”——宇宙万物都镌刻着它生长的轨迹。

6.4 生活与e相伴

为了使收藏的衣物不被虫蛀，就要放置一些樟脑丸即卫生球。樟脑丸主要成分是白色晶体状的有机化合物萘，所以又名萘球，也因容易升华出特殊的臭味，又俗称臭球儿或臭蛋。我们就是靠升华出的气体萘，将虫子“杀无赦”而保护衣物的。

放卫生球也要讲数学。

设密度为 ρ 的萘球的半径 $R(0)=5$ 毫米，升华1个月之后的 $R(1)=2.5$ 毫米，问时间 t 是几个月之后会升华完，要及时添加？

显然，单位时间内萘球升华的多少与萘球的表面积 $4\pi R^2$ 成正比。这样，就有

$$\frac{4}{3}\pi\frac{\mathrm{d}R^3}{\mathrm{d}t}\rho=-k4\pi R^2\ , \tag{6-27}$$

式中 $4\pi R^3/3$ 是萘球的体积，k 是比例常数。

(6-27) 可变形为

$$\mathrm{d}R(t)=-(k/\rho)\mathrm{d}t,$$

积分后得到

$$R(t)=-kt/\rho+C。 \tag{6-28}$$

把初始条件 $t=0$ 和 $R(0)=5$ 代入 (6-28)，解得 $C=5$。

把 $t=1$，$R(1)=2.5$ 和 $C=5$ 代入 (6-28)，就得到 $k/\rho=2.5$。于是 $R(t)$ 和 t 的函数关系是

$$R(t)=5-2.5t。 \tag{6-29}$$

萘球升华完的时候，$R(t)=0$。把它代入 (6-29)，就得到 $0=5-2.5t$。由此求得 $t=2$。也就是说，在开始放入萘球2个月之后，它就升

华完了。

由于我们不可能经常去翻衣柜看看萘球是否升华完了，所以作上面的“预算”，以便“心中有数”，做到及时添加，在一定程度上也是必要的。

此外，在洗衣服的时候，要先用少量的水和洗涤剂浸泡，再用手或者洗衣机揉搓并挤“干”衣服中的水，然后继续这样做。那么，能不能无限增多洗涤次数来无限减少衣服上残留的污物呢？中国数学家张景中在《从$\sqrt{2}$谈起》一书中用对数证明，这是不能的。以下是他的证明。

衣服里始终会残留污水——假设其中包含洗涤剂的污物有 m_0 克，残留的水有 w 千克。

现在的问题是，怎样合理用一定量的 A 千克水，尽量把衣服洗得最干净。

我们把 A 千克水分成 n 次使用，每次用 a_1，a_2，…，a_n 千克。经过这 n 次洗涤之后，衣服上剩下的污物可以由下面的计算得出。

第一次，把含有 m_0 克污物和 w 千克水的衣服，放到 a_1 千克的水中揉搓以后，m_0 克污物就均匀分布在（$w+a_1$）千克的水中。洗涤并把水几挤“干”后，显然有

$$\frac{\text{衣服上尚存污物量 } m_1}{\text{原来残存污物量 } m_0}=\frac{\text{拧“干”后残存水量 } w}{w+a_1},$$

也就是

$$m_1=\frac{m_0 w}{w+a_1}=\frac{m_0}{1+\frac{a_1}{w}}。$$

同法可得

$$m_2=\frac{m_1}{1+\frac{a_2}{w}}=\frac{m_0}{\left(1+\frac{a_1}{w}\right)\left(1+\frac{a_2}{w}\right)}。$$

显然，经过 n 次洗涤并挤“干”后衣服上残留的污物量是

$$m_n=\frac{m_0}{\left(1+\frac{a_1}{w}\right)\left(1+\frac{a_2}{w}\right)\cdots\left(1+\frac{a_n}{w}\right)} \tag{6-30}$$

这个式子，就是洗衣服的“数学模型”。

有了这个数学模型，就可以讨论下面两个问题：

（1）对于固定的 n，如何选取 a_1，a_2，…，a_n，才能使 m_n 最小？

（2）当 n 增大的时候，m_n 的最小值是增大还是变小，或者按别的什么规律变化？

从（6-30）可以看出，想要 m_n 最小，就是要使 $\left(1+\frac{a_1}{w}\right)\left(1+\frac{a_2}{w}\right)\cdots\left(1+\frac{a_n}{w}\right)$ 最大，条件是前面的 $a_1+a_2+\cdots+a_n=A$。

由于

$$\left(1+\frac{a_1}{w}\right)+\left(1+\frac{a_2}{w}\right)+\cdots+\left(1+\frac{a_n}{w}\right)=n+\frac{A}{w},$$

所以当 n 固定的时候，$n+\frac{A}{w}$ 也固定。

这样，问题就转化为：已知 n 个正数 $\left(1+\frac{a_1}{w}\right)$，$\left(1+\frac{a_2}{w}\right)$，…，$\left(1+\frac{a_n}{w}\right)$ 的和是定数 $S=n+\frac{A}{w}$，这 n 个数的乘积在什么时候最大？

利用 n 个正数的几何平均值不大于它们的算术平均值公式即柯西不等式

$$\sqrt[n]{c_1c_2\cdots c_n}\leqslant\frac{c_1+c_2+\cdots+c_n}{n},$$

就有

$$\left(1+\frac{a_1}{w}\right)\left(1+\frac{a_2}{w}\right)\cdots\left(1+\frac{a_n}{w}\right)\leqslant\left(\frac{n+\frac{A}{w}}{n}\right)^n=\left(1+\frac{A}{nw}\right)^n。$$

这个式子说明，只有当每次用水量相等的时候，才能使残留的污物量最少。这就解决了第一个问题。

那么，是否把同样为 A 的水，分成 $n+1$ 份来洗，效果更好呢？

此时，对 $n+1$ 个正数 c_1，c_2，…，c_{n+1}（这里，$c_1=c_2=\cdots=c_n=1+\frac{A}{nw}$，$c_{n+1}=1$）用柯西不等式，就得到

$$\left(1+\frac{A}{nw}\right)^n\times 1<\left[\frac{n\left(1+\frac{A}{nw}\right)+1}{n+1}\right]^n=\left[1+\frac{A}{(n+1)w}\right]^{n+1}。$$

由此可见，把水分成 $n+1$ 份来洗，要比分成 n 次洗要好。也就是说，$\left\{S_n=\left(1+\frac{A}{nw}\right)^n\right\}$是递增的。

那么，S_n 会不会无限增加——洗涤次数足够多而使衣服上残留的污物无限少呢？

假设$\frac{A}{w}=1$，$\left(1+\frac{A}{nw}\right)^n$ 就变成了$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$。而我们知道，$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=\mathrm{e}$。由此得知，不可能无限增多洗涤次数来无限减少衣服上残留的污物。

6.5 科学和 e——难舍难分的“情人”

火山喷发出来的气体可以高达 16～40 千米，进入气体交换非常缓慢的平流层。这样，火山气体中的二氧化硫就会在平流层里停留较长的时间，经过缓慢氧化而与这里的羟基反应成为硫酸，进而变成硫酸盐固体颗粒，形成气溶胶（“过程 1”）。这种气溶胶会逐渐沉积到地面（“过程2”），但这个过程不是特别缓慢。那怎么描述这些过程的反应速度呢？地质学和气象学家们采用了“指数递减时间”（e-folding-time）——反应物浓度降低到 1/e（约 1/2.718≈36%）所需要的时间，来描述这些速度。研究表明，“过程 1”的指数递减时间约 35 天，“过程 2”的指数递减时间是 12 到 14 个月。

由于上述硫酸盐气溶胶会增强对太阳辐射的反射，减弱太阳进入对

流层（平流层的下一层）的太阳辐射，所以可为地球降温。这种降温不但能解释强烈火山爆发之后的大范围气温为什么会下降，而且启发了科学家们用“向空中投射微粒来冷却地球”的奇思妙想——这被称为“地球工程技术”。有这种奇思妙想的人曾被讥笑为“异想天开”的“疯子”，但其中之一却鼎鼎有名——美籍匈牙利物理学家、“氢弹之父”爱德华·泰勒。他使人瞠目结舌的主张是向高层大气中撒播少量极细的铝粉或硫粉，用来挡开射来阳光的 1% ~ 2%——这几乎微不足道，但却足以抵消本世纪地球变暖可能带来的影响。泰勒的趣闻之一是和 e “有缘”，——他曾用 271 828 作为密码，打开了 29 个保险柜。要知道，那里面装的是有关原子弹的全部资料！

爱德华·泰勒

对上述事实和科学构想，必须说明两点。

第一，强烈火山爆发后大范围气温下降不是臆断，而是事实。例如，20 世纪所有火山爆发中规模和威力最大的一次——1991 年 6 月 9 日下午，海拔 1 436 米的菲律宾皮纳图博火山爆发。它遮天蔽日的火山灰最高喷到 35 千米，波及数百万平方千米，使地球气温平均降低约 0.5℃，并持续了两三年之久。

1991：沉寂了 600 多年的皮纳图博火山爆发

第二，火山灰的主要成分是硅酸盐颗粒，那前面我们怎么会对它“视而不见”，而只谈其中比它少得多的二氧化硫呢？原来，这些硅酸盐颗粒的尺寸较大——绝大多数在2微米以上，很快就从平流层往下“落地摔死”了。

你看，一个似乎和数学毫不相干的火山爆发问题，却和e“难分难舍”！

不过，虽然包括美国国家科学院、美国航天局和能源部的许多科学家都认为泰勒的办法“迅速、有效、可行、经济、简单、实用”，但至今还没有将它付诸实施或进行试验。原因是一些人担忧：硫粉末等可能导致平流层臭氧损耗，诸如亚洲季风之类的区域气候可能被扰乱；可能成为本来就消极“节能减排”的人们的一种借口，永无止境地继续毫无节制地排放温室气体。而另一些人则认为这种担忧不合时宜：“地球工程技术”会与向“零排放经济”过渡的长期计划相辅相成，不会代替后者。

e和科学相互眷恋的例子不胜枚举。

在19世纪和20世纪之交，物理学家们在研究“黑体问题”的时候，就得出许多含e的物理公式。

例如，在1893年，德国物理学家维恩得出的“辐射能量维恩分布定律”：$u=b\lambda^{-5}e^{-a/\lambda T}$。

又如，在1900年，德国物理学家普朗克得到的“普朗克辐射定律”$u=a\lambda^{-5}/(e^{b/\lambda T}-1)$ 或 $u=hc^2\lambda^{-5}/(e^{hc/k\lambda T}-1)$。同年10月19日，他又在向德国物理学会的报告《维恩光谱方程的改进》中，得到 $U=h\nu/(e^{h\nu/kT}-1)$。

再如，英国物理学家瑞利得到的 $u=C_1\lambda^{-4}Te^{-C_2/\lambda T}$；1905年，瑞利的同胞金斯把它完善后成为“瑞利－金斯定律”。

在相对论的研究中，据说有位中国学者按中国某军校上校政治教官季灏的实验数据，用相对论证明了如下结论：当电子的速度非常接近0.997倍光速时，电子的质量与电荷量同步地减少为初始值的1/e。他

还据此对测不准原理作出了进一步的表述。

最后，在理想气体的熵函数公式

$$S = \nu C_v \ln(T/T_0) + \nu R \ln(V/V_0) + S_0 \quad (\text{用 } T, V \text{ 作参量时})$$

和

$$S = \nu C_v \ln(T/T_0) - \nu R \ln(p/p_0) + S_0 \quad (\text{用 } T, p \text{ 作参量时})$$

中。

科学和e，确实是一对永远眷恋的“情人”。

当然，我们还有另外一种比喻。

据说，离开“天宫”的神通广大的孙悟空，一个筋斗翻了十万八千里，但最终还是在如来佛的手掌中。如果把数学比作如来佛的话，那走出数学“王宫”的e这次就是翻出了如来佛手心的孙悟空——在自然科学的各个领域大显神通。

我们在4.3节中说过，函数“如果是以指数形式或者对数形式出现的话，必定是、而且只能是以e为底的”。在这一章，就看到了这个“必定是、而且只能是”！

从自然界的复利律，到物理学中的冷却公式；从系船缆绳的拉力，到数学中的素数定理；从火箭飞天的计算，到生物学中的细菌繁殖；从地上古物年龄的测定，到气象学中高空气压的研究；从空气中摆锤的运动，到统计学中的布朗运动……的确无一不与e有关。

第 7 章　掀起你的盖头来
——e 的“质”“量”大白天下

黑夜给了我黑色的眼睛，我要用它来寻找光明。

——中国诗人顾城

7.1　数系发展——从自然数到超越数

7.1.1　从自然数到无理数

无理数由毕达哥拉斯学派中的希帕索斯发现，完成了从自然数到无理数的初步发展。

1872 年，德国数学家戴德金写的《连续性与无理数》一书，用著名的“剪刀”——“戴德金分割”引入了无理数，建立了完整的实数体系结构。这个结构成功地彻底填平了算术和几何的“鸿沟”，不但严格实现了“算术连续统”的设想，而且给微积分奠定了稳固的基础，使分析数学步入新的发展阶段。

高斯、魏尔斯特拉斯和德国数学家乔治·康托尔等，也对无理数作过巨大贡献。

1981 年，德国数学家马赫勒尔发现了著名的“马赫勒尔定理”：设 a 是大于 1 的自然数，$f=0.(a^1)(a^2)(a^3)\cdots$，其中的 (a^k) 表示把 a^k 用十进制数写出来（例如当 $a=3$ 时，$f=0.392\ 781\cdots$），则 f 一定是无理数。

1993 年，匈牙利数学家赫格瓦里证明了 0.235 711 131 719…（小

数点后依次由全体素数 2，3，5，7，…组成）是无理数。

戴德金

马赫勒尔

无理数的研究至今没有结束，例如要证明某些数是不是无理数还十分困难。

7.1.2　从无理数到超越数

在戴德金之前的公元 1794 年，法国数学家勒让德在巴黎出版了《初等几何》一书。他在书中写道：“很有可能，数 π 不能包含在代数的无理数中，亦即它不能是其系数全部为有理数的有限项的代数方程的根。”这一猜测表明他已意识到 π 为超越数，导致无理数的分类。

凡是能满足某个整数系数代数方程的复数，叫代数数；凡不是代数数的数，叫超越数。欧拉在 1744 年认为，这种数超越了代数方法的效力，从而提出了超越数的概念，并给出这个定义。或者说，给定一个数 α，如果不能使任何整数系数的方程 $f(x)=0$ 是 α 的根，那就称 α 为超越数。

欧拉还凭直觉提出以代数数为底，代数数的对数的超越性的定理。从这一定理可得出所有自然数 $N\neq 10^K$（K 为整数）的常用对数都是超越数，但没有证明。

19 世纪初，瑞士数学家鲁伊利尔初步证明了超越数的存在，并指出它的构造方法。

1840 年，法国数学家刘维尔证明 e 不是二次代数数。1844 年，他

又宣布了超越数的存在和猜测 e 是超越数，并实际构造出一批超越数。

例如，复数 $Z=\sum_{n=1}^{\infty} g^{-n!}$（其中 n 是自然数）对 $g=2$，3，…都是超越数；又如，刘维尔数 $t=\sum_{K=1}^{\infty} \frac{a_K}{10^{K!}}$（其中 a_K 是 1 到 9 之间的任意整数）也是超越数。

1874 年，乔治·康托尔证明超越数“大大多于代数数”——超越数在复数集合中占的“比重”几乎是 100%，从而奠定了超越数理论的稳固基础。

超越数的研究至今没有结束，例如要证明某些数是不是超越数还十分困难，有的——例如证明欧拉常数 γ 是不是超越数，至今也还不可能。

7.2 e 的性质——从无理数到非二次代数数

7.2.1 e 是无理数

1. 欧拉的证明

e 是 π 的“近亲”——它们都是无理数，也都是超越数。但证明 e 是无理数却比证明 π 是无理数容易得多。

1737 年，欧拉给出了用无限连分数计算平方根的一般方法，并将自然对数的底展开成三种无限连分数，并初步证明了 e 和 e^2 也是无理数。

2. 中国数学工作者们的贡献

中国数学家夏道行和张景中分别在《π 和 e》、《从$\sqrt{2}$谈起》两本书中，各自证明了 e 是无理数。此外，中国数学工作者宁挺在《说 e》一书中，也证明了 e 是无理数。这三种证明本质相同、形式不同。下面仅介绍夏道行的方法。

夏道行的思路是，证明对于任何一对自然数 p 和 q，都有 $e \neq q/p$。

对于任意给定的p，我们取充分大的自然数n，使得$n \geqslant p$。利用

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

两边同时乘以$n!$就得到：

$$n!e = 2 \times e! + n(n-1) \times \cdots \times 3 + n(n-1) \cdots \times 4 + \cdots$$

$$+ 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots 。 \tag{7-1}$$

设$a_n = 2 \times n! + n(n-1) \cdots \times 3 + n(n-1) \cdots \times 4 + \cdots + 1$，容易看出

$$a_n \text{ 是自然数。} \tag{7-2}$$

又设$b_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots$，那么

$$\begin{aligned} 0 < b_n &= \frac{1}{n+1}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots\right] \\ &< \frac{1}{n+1}\left[1 + \frac{1}{(n+2)^1} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots\right] \\ &= \frac{n+2}{(n+1)^2} \\ &< \frac{2}{n+1}, \end{aligned}$$

所以$0 < b_n < 1$。这就说明

$$b_n \text{ 不是整数。} \tag{7-3}$$

又从（7-1）可以得到

$$b_n = n!\ e - a_n 。 \tag{7-4}$$

由（7-2）~（7-4）可以看出，$n!\ e$不可能是整数。

所以，如果设$e = \frac{q}{p}$（其中p，q是既约的正整数），那么$n!\ e = n! \times \frac{q}{p} = 1 \times 2 \times \cdots \times (p-1) \times (p+1) \times \cdots \times n \times q$，也就是说$n!\ e$是一个整数。因此，$e = \frac{q}{p}$不可能成立，而$\frac{q}{p} \neq e$成立。

既然$\frac{q}{p} \neq e$成立，那么e就是无理数。

7.2.2 e是二次代数数

在代数中，除了把实数分为有理数和无理数这两大类之外，还可以把实数分为代数数和超越数这两大类。

设 u 是实数，如果存在整数 a_0，a_1，a_2，…，a_n（$a_n \neq 0$，$n>0$）使得 u 适合方程

$$a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \cdots,\ a_{n-1} u^{n-1} + a_n u^n = 0,$$

那么 u 就是代数数。u 能适合的整数系数代数方程，可以不止一个，它们的次数最低的那个 n，就称为 u 的次数。

不是代数数的实数，就叫超越数。

对于复数，也可以完全类似地定义代数数和超越数的概念。

由于有理数 $u=p/q$（p 和 q 是整数，$p \neq 0$）适合方程 $px-q=0$（1是代数方程的最低次数），所以是有理数 p/q 的一次代数数。反过来，一次代数数也是有理数。

在无理数中，也有许多满足二次、三次……整数系数方程的数，例如$\sqrt{2}$满足 $x^2-2=0$，黄金分割数$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$满足 $x^2-x-1=0$，所以它们都是二次代数数。

那么，e是不是二次代数数呢？可以证明，e不是二次代数数。

既然e不是二次代数数，那e是不是二次以上的代数数呢？因为不是代数数就是超越数，如果e不是代数数，那就应该是超越数。那e到底是不是超越数呢？

7.3 e的性质——从无理数到超越数

1844年，刘维尔就猜测e是超越数，但没有给出严格证明。而在此之前的公元1667年，英国数学家詹姆斯·格雷戈里就试图证明e是超越数。

1873 年，法国数学家埃尔米特用高超的技巧，初步证明了自然对数的底 e 是超越数。这里的“初步”，指证明了系数和指数都是有理数的特殊情形。这样，e 就成了人类证明的第一个“自然”超越数。这里的“自然”，是指“非故意构造的”——而我们提到过的刘维尔数是“故意构造的”。

埃尔米特主要依据的是埃尔米特－林德曼定理，即整数系数的代数数表达式

$$A_0e^{\alpha_0}+A_1e^{\alpha_1}+A_2e^{\alpha_2}+A_3e^{\alpha_3}+\cdots+A_ne^{\alpha_n}$$

不可能等于 0（其中 $A_n\neq 0$，α_n 是互不相等的代数数表达式）。

埃尔米特－林德曼定理的最终证明，是冯·林德曼于 1882 年在杂志 *Berliner Sitzungsberichte* 上完成的。3 年以后的 1885 年，被魏尔斯特拉斯在同一杂志上简化。1893 年，他们的同胞果尔丹在 *Mathematische Annalen* vol. 43 中把证明再次简化。德国数学家霍尔维茨则给出了一个初等证明。而德国数学家韦伯在代数教科书中给出的“初等证明”，可以在德国数学史家海因里希·德里的《100 个著名初等数学问题——历史和解》等书中找到。1955 年，美国数学家莫里斯·克莱因给出了更简单的描述。

证明 e 是超越数是比较繁杂的，这里不介绍。

至此，7.2.2 小节提到的两个问题得到圆满解答：e 不是二次以上的代数数，而是超越数。于是，e（连同 π）终于迎来了“柳暗花明又一村”。

7.4　e 的定义和符号——是“贵人”也是“打工仔”

7.4.1　e 的定义

1. 从数轴上定义 e

在 5.1.2 小节中，我们已得到 $F(t)=(1+1/t)^{t+1}$ 和 $f(t)=(1+$

$1/t)^t$ 分别是递减和递增函数的结果。

还容易看出：$F(t)=(1+1/t)^t(1+1/t)\geqslant(1+1/t)^t=f(t)$（当 $t\to\infty$ 时，“$\geqslant$”取“$=$”）。

假设当时间为 t 时，距离数轴上的 0 点分别为 $f(t)=(1+1/t)^t$ 和 $F(t)=(1+1/t)^{t+1}$ 的动点 p 和 P，在 $t=1$ 的时候以某瞬时速度开始同时移动：点 p 由 $f(1)=2$ 开始向右连续移动，点 P 由 $F(1)=4$ 开始向左连续移动。

我们来看它们如图 7-1 移动的情况。

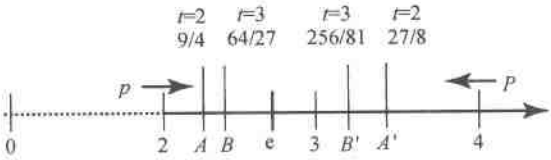


图 7-1

当 $t=2$ 的时候：$f(2)=9/4$，p 到达 A；$F(2)=27/8$，P 到达 A'。

当 $t=3$ 的时候：$f(3)=64/27$，p 到达 B；$F(3)=256/81$，P 到达 B'。

……

可以看出，p 和 P 在逐渐接近。

然而，在有限的 t 内，由于 $F(t)>f(t)$，即 P 总是在 p 的右侧移动，所以在有限的 t 内，两个点不会相遇，但是两者之间的距离缩短了

$$d=F(t)-f(t)=f(t)/t。$$

由于 $f(t)<4$，$d<4/t$ 就是一个随 t 的增大而无限变小的数，所以两个动点的最终距离将是无穷小。当然，这个结论，也可以从前面当 $t\to\infty$ 时 $(1+1/t)^t(1+1/t)=(1+1/t)^t$ 看出来。

要表达这种情况，只有假定数轴上 2 和 4 之间存在着一个定点，动点 p 和 P 分别从左右两侧逼近，但在有限的时间内达不到这个定点。那么，这个定点到 0 点的距离就是 e——当 $t\to\infty$ 时，$(1+1/t)^{t+1}$ 和 $(1+$

$1/t)^t$ 共同的极限。

这就从数轴上定义了 e。

2. 由收敛级数定义 e

如果级数 $1+1/1!+1/2!+1/3!+\cdots+1/(n-1)!+\cdots$ 是收敛的，那么

$$e=1+1/1!+1/2!+1/3!+\cdots+1/(n-1)!+\cdots。\quad (7\text{-}5)$$

下面，我们来证明（7-5）是收敛的。

显然，（7-5）的前 n 项和 $S_n=1+1/1!+1/2!+1/3!+\cdots+1/(n-1)!$。容易看出

$$S_1<S_2<S_3<\cdots<S_n<\cdots,\quad (7\text{-}6)$$

而且有

$$\frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{1\times 2\times 3}<\frac{1}{2\times 2}=\frac{2}{2^2},$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{1\times 2\times 3\times\cdots\times(n-1)}<\frac{1}{\underbrace{2\times 2\times 2\times\cdots\times 2}_{(n-2)个2}},$$

$$\cdots\cdots$$

所以有

$$S_n<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}。$$

用等比数列的求和公式，就得到 $S_n<3$。再结合（7-6）可以看出，数列 S_1，S_2，…，S_n，…虽然逐渐增大，但始终小于 3，所以（7-5）是收敛的，而且 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n<3$，就是 $e<3$。

由于 S_n 是 e 的“展开”，所以我们可以把上述定义和证明，看成是证明了 $\{x_n\}$ 递增且有上界的继 5.1.2 小节中四种之后的第五种。

3. 由极限定义 e

方法之一是，当 n 为自然数时，$e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$。

按照牛顿二项式定理，$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 可以这样展开：

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1+\frac{n}{1!}\times\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\times\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\times\frac{1}{n^3}\\&\quad+\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\times\frac{1}{n^k}\\&\quad+\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-n+1)}{n!}\times\frac{1}{n^n}\\&=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots\\&\quad+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\cdots\\&\quad+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)。\end{aligned}$$

仿照这种方法，$x_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ 也可以这样展开：

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} &= 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\\&\quad+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)\\&\quad+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)\\&\quad+\frac{1}{(n+1)^{n+1}}。\end{aligned}$$

比较 x_n 和 x_{n+1} 的展开式各项可以看到，除了第一项相等以外，x_n 的每一项都小于 x_{n+1} 的对应项，并且 x_{n+1} 还多了最后的一个正项 $\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$。于是得到 $x_n<x_{n+1}$，即数列 x_n 是递增的。

此外，用较大的数 1 代替 x_n 的展开式右边各项括号内的数，就得到

$$x_n<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{n!}<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3。$$

从这个式子可以看出，不论 n 取什么值，数列 x_n 总是小于 3，即有上界。显然，x_n 的极限存在。现在用字母 e 来表示这个极限，就是

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}。$$

那么，这个 e 是多少呢？数学家们求得 e = 2.718 281 828 459 045…。

可以看出，这种定义中证明了 $\{x_n\}$ 递增且有上界——这是第六种证明和定义。

对于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$ 的结论，不但在 n 是自然数时成立，而且可以证明，当 n（$\neq 0$）是连续变量的时候也成立。

方法之二是，定义 e 为唯一的数 x 使得 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{x^h-1}{h}=1$。这是 e 的第七种定义。

4. 由几何定义 e

取如图 7-2 所示的等边双曲线 $xy=1$ 上，B_0（1，1）是它的顶点。在 B_0 的右边取点 B，作曲边梯形 B_0A_0AB。当它的面积随 B 向右移动变到无穷大（这一点我们将在 9.3 节谈到）的时候，B 的横坐标 x 就是无穷大。因此，坐标 x 可以看成是曲边梯形 B_0A_0AB 的面积 S 的连续函数，即 $x=f(S)$。

再如图 7-3 作曲边梯形 $B_0A_0A_1B_1$ 和 $B_0A_0A_2B_2$，它们的面积分别是 S_1 和 S_2，那么 B_1 和 B_2 的横坐标，就可表示为 $x_1=f(S_1)$ 和 $x_2=f(S_2)$。

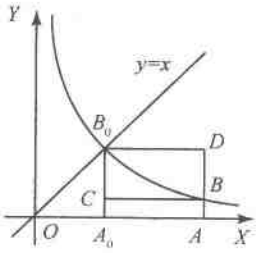


图 7-2

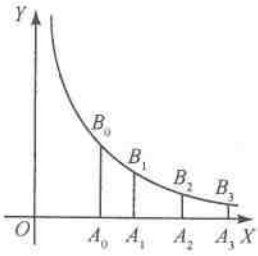


图 7-3

现在，作一个“双曲旋转”（它的含义留在下面叙述）

$$\begin{cases} x' = kx, \\ y' = \dfrac{y}{k} \end{cases}$$

使 B_0 转到 B_1，可知在“双曲旋转”中旋转系数 $k=x_1$。设此时 B_2 移到 B_3，于是曲边梯形 $B_0A_0A_2B_2$ 移到 $B_1A_1\ A_3B_3$。由于旋转后面积不变，所以这两个曲边梯形的面积相等。

再设曲边梯形 $B_0A_0\ A_3B_3$ 的面积为 S_3，就有 $S_3=S_1+S_2$，因此 $x_3=f(S_3)=f(S_1+S_2)$。另一方面，“双曲旋转”使 B_2 移到 B_3，因此横坐标 x_2 与 x_3 有 $x_3=k\ x_2$ 的关系。而 $k=x_1$，所以 $x_3=x_1x_2=f(S_1)f(S_2)$。于是得到函数方程 $f\ (S_1+S_2)=f(S_1)\times f(S_2)$。

函数方程最早出现在达朗贝尔、欧拉和拉格朗日等数学家的作品之中，而它的一般概念则是画法几何的创立者、著名的法国数学家蒙日在1773年提出来的。

由于函数方程的形式千变万化，又有很大的一般性，所以虽历经200多年，但至今没有找到一般解法。

但是，对于 $f(S_1+S_2)=f(S_1)\times f(S_2)$ 类型，挪威数学家阿贝尔在可微性要求的限制下，得到了 $x=f(S)=a^S$［这里的 S 是任意选取的面积变量，$a=e^{\lambda}$，而 $\lambda=\dfrac{f'\ (S)}{f\ (S)}$］的结果。对图7-2中的矩形 $CA_0\ AB$ 和 $B_0A_0\ AD$，由于 $A_0\ A=x-1$，$AB=\dfrac{1}{x}$ 和 $B_0A_0=1$，可知这两个矩形的面积分别是 $\dfrac{x-1}{x}$ 和 $x-1$。而曲边梯形 A_0B_0BA 的面积 S 介于它们之间，即 $\dfrac{x-1}{x}<S<x-1$。

由 $\dfrac{x-1}{x}<S$，可以得到 $x(1-S)-1<0$。而当 $S<1$ 时，则有 $x<\dfrac{1}{1-S}$。

由 $S<x-1$ 即 $x>S+1$ 和 $x=f(S)=a^S$，$x<\frac{1}{1-S}$，可以得到 $1+S<a^S<\frac{1}{1-S}$。

显然，当 $S<1$ 时，如果设 $S=\frac{1}{n}$，就有 $1+\frac{1}{n}<a^{\frac{1}{n}}<\frac{1}{1-\frac{1}{n}}$。此式就是

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<a<\left(\frac{n}{n-1}\right)^n。$$

而

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right),$$

所以

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<a<\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)。$$

由于当 $n\to\infty$ 的时候，$1+\frac{1}{n-1}\to 1$，所以

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<a<\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)$$

的左右两边有共同的极限 e。

再根据极限存在的判定定理，就得到 $a=\mathrm{e}$，所以 $x=f(S)=a^S=\mathrm{e}^S$。

由于 $f(S)$ 是连续函数，所以当 $S\to 1$ 时，就有 $\mathrm{e}=f(1)$。又由于 $f(1)$ 是曲边梯形 A_0B_0BA 的面积为 1 时的横坐标，这就得到了 e 的几何定义：在等边双曲线 $xy=1$ 中，以 $x=1$ 为始边的曲边梯形，当它的面积为 1 时的点的横坐标为 e。这是 e 的第八种定义。

我们再回到前面提到的“双曲旋转”中来。

在图 7-4 中，等边双曲线 $xy=1$ 上的一点 M 首先变到 M_1，然后 M_1 又变到 M'。这个情况类似圆周旋转——双曲线好像在“转”。

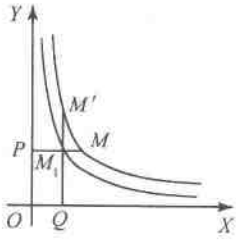


图 7-4

因此，平面上的点变换 $x'=kx$，$y'=y$ 和 $x'=x$，$y'=y/k$（k 是旋转系数或压缩系数）的合成

$$\begin{cases} x' = kx, \\ y' = \dfrac{y}{k} \end{cases}$$

就是一个“双曲旋转”。

5. 用积分形式定义 e

把 e 定义为唯一的数 $x>0$ 使得 $\int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t = 1$。这是 e 的第九种定义。

7.4.2 e 的符号

1. 历史上 e 的 5 种符号——b，c，e，訥和戊

为什么用 e 来表示自然对数的底，至今原因不明。有人猜测，可能是因为 e 是“指数”（exponential）的第一个母。另一种猜测是，a，b，c 和 d 经常有其他用途，接下来的 e 就成了首选。

已知第一次用字母符号来表示自然对数的底，是莱布尼茨在 1690 年和 1691 年给惠更斯的通信，但他用的字母符号是 b。

1727 年或 1728 年，欧拉在遗作（一份当时未发表的手稿）中，第一次引入 e 来作为自然对数的底。这份手稿在 1862 年才付印。正因为如此，后人为了纪念他，才用欧拉英文姓氏的第一个字母 E 的小写 e 来作为自然对数的底。至于欧拉用 e 来表示正好和他的姓氏第一个字母一样，是有意为之还是巧合，已不得而知。也正因为如此，e 也叫欧拉数。不过，欧拉为人谦虚，总是恰当地肯定他人的工作，可能不会借此“自我炒作”。

第一次在出版物中 e 来表示自然对数的底，是欧拉在 1736 年出版的《力学》第一卷中。在 1747 ~ 1751 年的文章中，欧拉都用 e 来表示自然对数的底。

后来，有研究者用字母 c 表示自然对数的底，但 e 较常用，于是最终成为“标准符号”。

接着，以下几位数学家也用e来表示自然对数的底：瑞士丹尼尔·伯努利在1760年，兰伯特在1764年，法国孔多塞在1771年，法国贝祖在1779年，法国克拉姆在1808年。

在17世纪对数传入中国以后，又有了几种专门表示e的符号。

例如，李善兰在1859年翻译的《代数学》卷首就有：“又訥（今简化为讷——引者）字代二、七一八二八一八，为讷白尔（即纳皮尔——引者）的对数率。”由此可见，他用“讷”代表自然对数的底，但却误以为纳皮尔对数的底是2.718 281 8。

又如，1873年，华蘅芳翻译的《代数术》卷十八中就有：“则得其常数为二·七一八二八一八四五九〇四五不尽，此数以戊代之……可见戊即为讷对之底。”可以看出，他用“戊”表示自然对数的底。显然，这与当时把ABCDE翻译成甲乙丙丁戊有关——e译成了戊。

后来，中国的数学书用横排和西文方式，就采用了e。

2. e的“第二职业”

“贵人”e也搞过“第二职业”。

首先只用一个字母来表示圆周率的，是德国巴伐利亚的奥尔多夫大学的数学教授约翰·克里斯托夫·斯图姆。他在1689年用e来表示圆周率。

圆锥曲线中的椭圆、抛物线和双曲线等的离心率也用e表示——代表离心率的英文eccentricity的第一个字母。

在物理学中，电子的符号也用e表示。

当然，这些e都与自然对数的底毫无关系。

此外，e的近似值也有“第二职业”。

享誉全球的美国“谷歌”（Google）公司在2004年首次公开募股，集资额不是通常的“整数”，而是2 718 281 828美元——最接近“整数”的“e十亿”美元。当然，“钟情”数学常数的“谷歌”，也不是“仅此一举”——在2005年的一次公开募股中，集资额是14 159 265美元，这是圆周率π小数点之后的前8位数。

“谷歌”也是首先在硅谷心脏地带，接着在马萨诸塞州剑桥城出现的神秘广告版的幕后黑手——它写着｛first 10 – digit prime found in consecutive digits of e｝.com（在e的连续数字中第一个发现的十位素数.com）。解决了这问题（e数值中的第一个十位素数7 427 466 391出奇地到e第100个数字才开始出现），进入网站后还有个更难的题目要解决，最后会到达谷歌的招聘页。但后来这个挑战已结束，上述网站已关闭。

著名美国计算机科学家高德纳的软件METAFONT的版本号码特别青睐e——版本号码是2，2.7，2.71，2.718等，要无限趋近于e。这里提到的高德纳，英文名唐纳德·欧文·克努斯，被誉为现代计算机科学的鼻祖。

7.5 计算e值——从欧拉到亚历山大·伊

要计算精确度高的e值可不是一件太容易的事。

由于$e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，所以可能有人会说，把$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$中的$n$取得足够大就行了呗！

好，我们就照这样试试看——计算结果如表7-1所示。

表7-1

n	$(1+1/n)^n$
1	2
2	2.25
3	2.307 4
4	2.441 4
5	2.488 5
10	2.593 6
100	2.705 1
1 000	2.716 92
10 000	2.718 15

从表 7-1 可以看出，算到 $n=100$，1 000，10 000 时，才分别有 1，2，4 位准确小数的结果（不考虑四舍五入）。而要得到 5 位准确小数，必须算到 $n=1\ 000\ 000$。

那么，要分别算 $n=100$，1 000，10 000 时，这个工作量怎样呢？

对于现代人来说，这不过是几十秒钟的问题，因为我们有电子计算器或电子计算机。但是，对古人来说，就没有这些东西了——必须花费几天几月甚至几年，作成百上千甚至几万次的计算，才能把 e 值算到那么多的位数！更不用说算到 $n=1\ 000\ 000$ 了！

于是，人们必须另辟蹊径。

1665 年，牛顿给出了幂级数展开式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots。$$

设这个式子中的 $x=1$，就得到我们熟悉的

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots。$$

现在，我们用它来算 e 值，结果如表 7-2 所示。特别注意，单凭这些近似值，是无法确定能准确到 e 的多少位小数值的。但是，如果把表 7-2 和表 7-1 对比，而且和 e 的准确值 2.718 281…比较，就可以看出用这种方法计算，比用 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 直接计算，能更快地得到准确的 e 值。

表 7-2

n	$e=1+1/1!+1/2!+\cdots+1/n!$
1	2
2	2.5
3	2.666 666…
4	2.708 333…
5	2.716 666…
6	2.718 055…
7	2.718 253…

下面，我们来看表7-2中当 $n=7$ 的时候，如何来确定能准确到e的多少位小数值。

对 $e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$ 而言，取它的 $n+1$ 项部分和作为近似值，那么引起的误差

$$\begin{aligned}R_{n+1}&=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+3)!}+\cdots\\&=\frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}\right.\\&\quad\left.+\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}+\cdots\right]。\end{aligned}$$

而

$$\frac{1}{(n+2)(n+3)}<\frac{1}{(n+2)^2},$$

$$\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}<\frac{1}{(n+2)^3},$$

……

所以

$$\begin{aligned}R_{n+1}&<\frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\frac{1}{(n+2)^3}+\cdots\right]\\&=\frac{1}{(n+1)!}\times\frac{n+2}{n+1}。\end{aligned}$$

现在，取 $n+1=8$ 就有

$$R_8<\frac{1}{8!}\times\frac{9}{8}=\frac{1}{35\,840}<0.000\,028\,0。\tag{7-7}$$

这时，计算 $n=7$ 时各项的和

$$S_8=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!},$$

就可以得到

$$2.718\,253\,7<S_8<2.718\,254\,2。\tag{7-8}$$

因此，从（7-8）和 $e>S_8$ 就得到

$$e > 2.718\,253\,7。\tag{7-9}$$

又从 $e = S_8 + R_8$ 和（7-7）、（7-8），就可以得到

$$e < 2.718\,282\,2。\tag{7-10}$$

于是，从（7-9）、（7-10）可得 $e = 2.718\,2\cdots$。

当然，类似上面的计算也可简单叙述如下。

取 $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$ 的前 n 项和作为 e 的近似值，则误差

$$R_n < \frac{1}{(n-1) \times (n-1)!}。$$

它的来源是

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots \\ &= \frac{1}{n!}\left[1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots\right] \\ &< \frac{1}{n!}\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \cdots\right) \\ &= \frac{1}{(n-1) \times (n-1)!}。\end{aligned}$$

现取 $n = 8$，则 $R_8 = \frac{1}{7 \times 7!} < 10^{-4}$。于是 $e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{7!} \approx 2.718\,3$（精确到小数点后第四位）。

这就是说，表 7-2 中 $n = 7$ 时，就能得到 5 位 e 值（末位误差不超过 1 个单位）。显然，这比前面用 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$，把其中的 n 取 1 000 000 才得到 5 位 e 值容易得多。

如果取 $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$ 的前 11 项，即 $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{10!}$ 计算，就可以得到 2.718 281 801 2。此时的误差

$$R = \frac{1}{11!} + \frac{1}{12!} + \frac{1}{13!} + \cdots = \frac{1}{11!}\left(1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12 \times 13} + \cdots\right)。$$

由此可以看出

$$R < \frac{1}{11!}\left(1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{12^3} + \cdots\right) = \frac{1}{11!} \times \frac{12}{11} < 0.000\ 000\ 08。$$

也就是说，此时已经得到7位小数的准确e值2.718 281 8（末位误差不超过1个单位）。

这样，只要取足够多的项，就可以把e值计算到需要的位数了。事实上，在1748年，欧拉就是利用这种无穷级法才算出e小数点后18位近似值的。

进一步，如果取更大的n值，就可以得到更准确的e值了。

接下来是一场计算e值的“马拉松接力”。

1946年，彼德森算出了809位e值。1947年9月，英国数学家弗格森和美国数学家雷恩奇各自算出809位准确π值，并于1948年1月联合发表了这个值。虽然他们计算的π值超过了809位，但却故意只发表了809位，为的是和彼德森的809位e值“平分秋色”。

电子计算机发明以后，本来就比π值计算容易一些的e值计算，就变得更容易了。

1996年，日本数学家金田康正用电子计算机把e算到小数点后515 396位。2010年2月21日，美国数学家亚历山大·伊算到了小数点后5 000亿位——截至当天的世界纪录。表7-3是计算e值的年表。

表7-3

序号	时间	小数点后位数	计算者
1	1748年	18	欧拉
2	1853年	137	英国威廉·山克斯
3	1871年	205	威廉·山克斯

续表

序号	时间	小数点后位数	计算者
4	1884 年	346	布尔曼
5	1946 年	808	彼德森
6	1949 年	2 010	匈牙利－美国约翰·冯·诺伊曼
7	1961 年	100 265	美国丹尼尔·山克斯和美国约翰·威廉·雷恩奇
8	1978	116 000	美国斯蒂芬·加里·沃兹尼亚克
9	1994 年	10 000 000	美国罗伯特·尼米罗夫和杰里·邦纳
10	1997 年 5 月	18 199 978	法国帕特里克·德米凯尔
11	1997 年 8 月	20 000 000	伯奇尔·塞弗特
12	1997 年 9 月	50 000 817	帕特里克·德米凯尔
13	1999 年 2 月	200 000 579	德国塞巴斯蒂安·魏德尼夫斯克
14	1999 年 10 月	869 894 101	塞巴斯蒂安·魏德尼夫斯克
15	1999 年 11 月 21 日	1 250 000 000	法国泽维尔·古尔东
16	2000 年 7 月 10 日	2 147 483 648	日本近藤茂和法国泽维尔·古尔东
17	2000 年 7 月 16 日	3 221 225 472	科林·马丁和法国泽维尔·古尔东
18	2000 年 8 月 2 日	6 442 450 944	日本近藤茂和法国泽维尔·古尔东
19	2000 年 8 月 16 日	12 884 901 000	日本近藤茂和法国泽维尔·古尔东
20	2003 年 8 月 21 日	25 100 000 000	日本近藤茂和法国泽维尔·古尔东
21	2003 年 9 月 18 日	50 100 000 000	日本近藤茂和法国泽维尔·古尔东
22	2007 年 4 月 27 日	100 000 000 000	日本近藤茂和史蒂夫·帕里亚鲁罗
23	2009 年 5 月 6 日	200 000 000 000	日本近藤茂和史蒂夫·帕里亚鲁罗
24	2010 年 2 月 21 日	500 000 000 000	美国亚历山大·伊

第 8 章　妙趣横生的 e
——数学界的快乐天使

美的至高无上的部分，无法以彩笔描绘出来。

——弗朗西斯·培根

8.1　数学家的“魔术”——e 的六类表达式

有限连分数（式）通常有 5 种表示方法。例如，为了节约篇幅，可以把样子像

$$①b_0+\cfrac{c_1}{b_1+\cfrac{c_2}{b_2+\cfrac{c_3}{b_3+\ddots+\cfrac{c_{m-1}}{b_{m-1}+\cfrac{c_m}{b_m}}}}}\text{或}②b_0+\cfrac{c_1}{b_1+\cfrac{c_2}{b_2+\ddots+\cfrac{c_m}{b_m}}}$$

的连分式，写成③ $b_0+\frac{c_1}{b_1}+\frac{c_2}{b_2}+\frac{c_3}{b_3}+\cdots+\frac{c_{m-1}}{b_{m-1}}+\frac{c_m}{b_m}$ 或④ $b_0+\left[\frac{c_n}{b_n}\right]_{n=1}^{m}$；如果 $c_1=c_2=c_3=\cdots=c_m=1$（此时对应的连分式称为简单连分式），更可简写为⑤ $[b_0,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots,\ b_{m-1},\ b_m]$。

无限连分数（式）也有类似的有限连分数（式）5 种表示方法，其中的②是莱布尼茨发明的。

在数学家们的笔下，有关 e 的式子就像魔术师手中的魔术，有多类表达式。

第一类是 e 的连分数表达式。

我们提到过的欧拉在证明 e 和 e^2 的过程中。把 e 展开成以下 3 种连分数：

$$e=[2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 1,\ 4,\ 1,\ 1,\ 6,\ 1\cdots],\tag{8-1}$$

$$e=2+\frac{2}{2}+\frac{3}{3}+\frac{4}{4}+\cdots,\tag{8-2}$$

$$e=2+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\cdots。\tag{8-3}$$

第二类是我们知道的 e 的极限表达式 $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，它与 $e=\lim\limits_{n\to 0}(1+n)^{\frac{1}{n}}$ 等同。

第三类是我们知道的 e 的两种阶乘形式的级数表达式：

（1）$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$（正项级数），

（2）$\frac{1}{e}=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots$（交错级数）。

第四类是无穷乘积式。

（1）“一次式”。

皮彭格尔给出的一个和谐优美得难以置信的表达式——我们称为“分数根号式”：

$$e=2\times\left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{4}{5}\times\frac{6}{5}\times\frac{6}{7}\times\frac{8}{7}\right)^{\frac{1}{8}}\cdots。$$

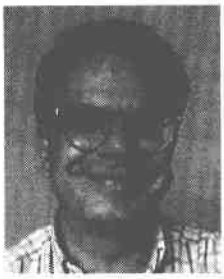
这类式子还有

$$e=\left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{1}{1}}\left(\frac{2^2}{1\times 3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2^3\times 4}{1\times 3^3}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{2^4\times 4^4}{1\times 3^6\times 5}\right)^{\frac{1}{4}}\cdots。$$

西班牙萨拉戈萨大学的数学家戈亚内斯、美国数学家介纳森·桑道，在 2008 年合写的一篇论文中记载了这个式子，以及以下三个式子。

（2）“二次式”。

$$e^2=\left(\frac{3}{1}\right)^{\frac{1}{1}}\left(\frac{3^2}{1\times 5}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{3^3\times 7}{1\times 5^3}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{3^4\times 7^4}{1\times 5^6\times 9}\right)^{\frac{1}{4}}\cdots。$$



戈亚内斯

乔纳森·桑道

（3）“分数次式”。

$$e^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{1}}\left(\frac{3^2}{2\times4}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{3^3\times5}{2\times4^3}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{3^4\times5^4}{2\times4^6\times6}\right)^{\frac{1}{4}}\cdots$$

$$=\left(\frac{2^2}{1\times3}\right)^{\frac{1}{1}}\left(\frac{2^3\times4}{1\times3^3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2^4\times4^4}{1\times3^6\times5}\right)^{\frac{1}{3}}\cdots,$$

$$e^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{1}}\left(\frac{5^2}{3\times7}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{5^3\times9}{3\times7^3}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{5^4\times9^4}{3\times7^6\times11}\right)^{\frac{1}{4}}\cdots。$$

第五类是欧拉求得的两个“间接连分数式”：

$$\frac{e+1}{e-1}=2+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{14}+\cdots,$$

$$\frac{e-1}{2}=\frac{1}{1}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{14}+\cdots。$$

最后，本书给出一类“简单分数表达式”：

$$e=3-\frac{1}{4}-\frac{1}{31}+\frac{1}{1\ 852}-\frac{1}{15\ 667\ 036}+\cdots。$$

这里所说的简单分数，是指分子为 1、分母是自然数的只有一条分数线的分数。

那么，它是如何得来的呢？先看下面的式子：

3/1→	3	→ (2.71…/1)→3
	−2.718 281 828 459 045…	
	0.281 718 171 540 955…	→−1/3.54…→−4
−1/4→	−0.250 000 000 000 000…	
	0.031 718 171 540 955…	→−1/31.46…→−31
−1/31→	−0.032 258 064 516 129…	
	−0.000 539 892 975 174…	→+1/1 852.21…→+1 852
+1/1 852→	+0.000 539 956 803 455…	
	0.000 000 063 828 281…	→−1/15 667 036.37…→−15 667 036
	…	

首先，用 2.71… ÷ 1 得到 2.71…，并取和 2.71…最接近的整数 3（右栏第一行所示）。

显然，3 比 2.71…多出了 0.28…（中栏第一、二、三行所示），所以应该减去 0.28…（即 1 ÷ 3.54…），取和 3.54…最接近的整数 4（右栏第二行所示）。

接下来的过程类似。

当然，我们也可以从整数 2 开始计算，即从 e = 2 + …开始。但此时你会发现，将得到 e = 2 + 1 + …，接下来会重复上面的过程而得到相同的结果。

8.2　“乘积最大”和“开方最大”——这里 e 也显神通

8.2.1　何时“乘积最大”

一个有趣的问题是：把一个正数 a 分成若干份，问怎么分，才能使这些等份的乘积最大？

首先，我们知道，只有把 a 等分，才能使这些等份的乘积最大。这个结论，由柯西不等式

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \quad [\text{式中等号当且仅当 } a_i = a_j (1 \leqslant i < j \leqslant n) \text{ 时成立}]$$

就可以得出来。

这样，剩下的问题就是，如何把 a 等分？

把 a 分成 x 等份，只要求得 $y = \frac{a}{x}$（x 是正实数，不一定是自然数）的极大值就行了，而这显然就是要求得函数 $y = \left(\frac{a}{x}\right)^x$ 的极大值点。为此，我们用求导数找驻点求极值的方法。

把 $y = \left(\frac{a}{x}\right)^x$ 的两边取自然对数，就得到 $\ln y = x\ln\frac{a}{x}$，求导数后

得到

$$\frac{y'}{y}=\ln\frac{a}{x}+x\left(\ln\frac{a}{x}\right)'=\ln\frac{a}{x}+x\left(\frac{x}{a}\right)\left(\frac{-a}{x^2}\right)$$

$$=\ln\frac{a}{x}-1,$$

即 $y'=y\left(\ln\frac{a}{x}-1\right)$。

因为 $x>0$ 时，$y=\left(\frac{a}{x}\right)^x>0$，所以要使得 $y'=0$，就需要 $\ln\frac{a}{x}-1=0$。解这个方程，就得到 $x=\frac{a}{e}$。再由 $y'=y\left(\ln\frac{a}{x}-1\right)$ 得知，当 $x<\frac{a}{e}$ 时，则 $e<\frac{a}{x}$，得到 $y'>0$；当 $x>\frac{a}{e}$ 时，则 $e>\frac{a}{x}$，得到 $y'<0$。

这样，就知道在区间 $\left(0,\ \frac{a}{e}\right]$ 中，$y=\left(\frac{a}{x}\right)^x$ 是增函数；而在区间 $\left[\frac{a}{e},\ \infty\right)$ 中，$y=\left(\frac{a}{x}\right)^x$ 是减函数。此时，由于 $x=\frac{a}{e}$ 是唯一的驻点，所以当 $x=\frac{a}{e}$ 时，$y=\left(\frac{a}{x}\right)^x$ 有唯一的极大值。也就是说，把 a 等分成 $\frac{a}{e}$ 等份，这些等份的乘积最大。

但应该注意到，由于不能肯定 $x=\frac{a}{e}$ 是一个整数，而“分成分数等份”在日常生活中一般是讲不通的，所以应取与 $\frac{a}{e}$ 最接近的整数——这一点也可以由函数的单调性证明。

我们在这里把分成两份来做例证。等分时，每等份是 $\frac{a}{2}$，乘积是 $\frac{a^2}{4}$。不把 a 等分时，假设两份分别是 $\frac{a}{2}-m$ 和 $\frac{a}{2}+m$（这里 m 是一个正数）；它们的乘积就是 $\frac{a^2}{4}-m^2$。可见，$\frac{a^2}{4}>\frac{a^2}{4}-m^2$。

前面得到的结论表明，例如要把 10 分成乘积最大的若干等份，就

应该用$\frac{10}{e}$来求得这“若个”。不难算得$\frac{10}{2.718\cdots}=3.678\cdots$

但是，因为把 10 分成“3.678…等份”，从“分成整数等份”的角度说，只能取 3.678…最接近的整数 4。这样，就得到把 10 分成 4 等份，每等份为$\frac{10}{4}=2.5$ 的结果。这样，就得到 $2.5^4=39.0625$。

作为比较，如果分成 3 等份或 5 等份，就会分别得到$\left(\frac{10}{3}\right)^3=37.03\cdots$和$\left(\frac{10}{5}\right)^2=32$ 的结果。可以看出，37.03…和 32 都小于 39.0625。

用这种方法，读者不难得到 20，50 和 100 的分法。答案是：分别分成 7，18 和 37 等份。

当然，我们也可以不一定遵守“分成整数等份”的“游戏规则”。那么，上述例子就有近似结果 $2.718^{3.679}\approx 39.6$。这个 $39.6>39.0625$，显然也是合理的。

附带的一个结果是：把一个自然数 n 分拆成若干个（不一定相等）自然数，怎么分才能使它们的乘积 N 最大？由于任何 n 都可以写成 $n=3a+b$ 的形式（a 和 b 都是非负整数，$b\leqslant 2$），所以答案是：$N=3^a$（当 $b=0$ 时），$N=4\times 3^{a-1}$（当 $b=1$ 时），$N=2\times 3^a$（当 $b=2$ 时）。对应的例子是：9 分为 3，3，3（乘积为 27）；10 分为 4，3，3（乘积为 36）；11 分为 2，3，3，3（乘积为 54）。

8.2.2　何时“开方最大”

另外一个有趣的问题是：如果 x 是正的变数，那么取什么值的时候，根式$\sqrt[x]{x}$的值最大？它是生于瑞士的德国数学家斯泰纳在一本数学著作中提出来的。

斯泰纳

根据指数函数不等式 $e^{\frac{x-e}{e}}\geqslant 1+\frac{x-e}{e}$（式子中仅当 $x=e$ 时用等号），可以得到$\frac{e^{\frac{x}{e}}}{e}\geqslant\frac{x}{e}$，就是

$e^{\frac{x}{e}} \geqslant x$。

把 $e^{\frac{x}{e}} \geqslant x$ 两边都开 x 次方，就得到$\sqrt[e]{e} \geqslant \sqrt[x]{x}$。这个式子用数学语言叙述就是：e 是 x 为正的变数时，使$\sqrt[x]{x}$产生最大可能值的数。也就是说，在这种形式的数中，$\sqrt[e]{e}$最大。

那么，$\sqrt[e]{e}$是多大呢？容易算出，$\sqrt[e]{e} \approx 1.445$。作为比较，$\sqrt[3]{3} \approx 1.442$，$\sqrt[2]{2} \approx 1.414$，可见它们都小于$\sqrt[e]{e}$。

前面提到的 $e^{\frac{x-e}{e}} \geqslant 1 + \frac{x-e}{e}$的证明如下。

设 $X = \frac{1}{x}$（X 是任意正数），则 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$ 变为 $(1+X)^{\frac{1}{X}} < e < (1+X)^{\frac{1}{X}+1}$，就得到 $(1+X)^{\frac{1}{X}} < e$。将两边同时 X 次方，就有 $1+X < e^{X}$；显然，$e^{\frac{x-e}{e}} \geqslant 1 + \frac{x-e}{e}$中的$\frac{x-e}{e}$，就相当于这个式子中的 X，所以 $e^{\frac{x-e}{e}} \geqslant 1 + \frac{x-e}{e}$被证明（当 $x = e$ 时取等号）。

下面的事实更有趣：当 $x = 1$ 时，$\sqrt[x]{x} = \sqrt[1]{1} = 1$；当 $x \to \infty$ 时，$\sqrt[x]{x} = \sqrt[\infty]{\infty} = 1$；或者说$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{x} = 1$——用微积分方法可以证明。这个事实说明，当 x 取 $1 \sim \infty$ 时，$\sqrt[x]{x}$呈“山峰形”——$\sqrt[e]{e}$是“峰顶”，而$\sqrt[1]{1}$和$\sqrt[\infty]{\infty}$是“山谷”。当然，对整个$\sqrt[x]{x}$来说，1 只能算是“山坡”——最低的“山谷”是0（图8-1）。我们不由得感叹，神秘的大自然把数学安排得如此美丽动人！

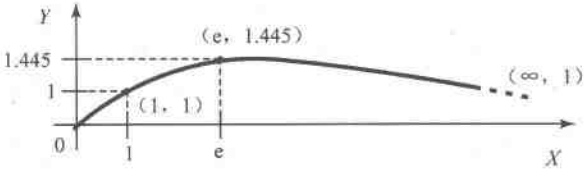


图 8-1　$\sqrt[x]{x}$随 x 而变，在 $x = e$ 时有峰值约 1.445

下面，我们把难度降低一些。设 x 是自然数，问 x 取什么值的时候，$\sqrt[x]{x}$最大？

显然，由前面的$\sqrt[x]{e}$最大可知，一定是 x 最接近 e 时，$\sqrt[x]{x}$最大，所以 $x=3$。事实上，$\sqrt[3]{3}\approx 1.442>\sqrt[2]{2}\approx 1.414$，$\sqrt[3]{3}\approx 1.442>\sqrt[4]{4}\approx 1.414$。

为什么在 8.2.1 小节和 8.2.2 小节的这两个问题中，都是 e 而不是别的什么数“当大哥”呢？这是一个似乎暗藏玄机的结果，也是一个——美妙的谜团。

8.3　ln(−1) =? ——伯努利和莱布尼茨的争论

在 18 世纪，有三位著名的数学家和“ln(−1) =?”结下了“不解之缘”。

约翰·伯努利认为，ln(−1) =0，是实数。他的理由如下。

由 $\int\frac{dx}{x}=\int\frac{d(-x)}{-x}$，可以得到 $\ln x=\ln(-1)$。此时，设 $x=1$，就得到 $\ln(1)=\ln(-1)=0$。

可是，莱布尼茨却不同意这种说法。他说 ln(−1) 是虚数。也有如下理由。

因为 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$，所以设其中 $x=-2$ 的时候，就得到

$$\ln(-1)=-2-\frac{4}{2}-\frac{8}{3}-\frac{16}{4}-\cdots。$$

显然，这个数列是发散的。按照当时对虚数的理解，所以 ln(−1) 是虚数。

那么，约翰·伯努利和莱布尼茨究竟谁对呢？

最后，欧拉解决了这个争论。他设著名的 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ 中 $x=\pi+2n\pi$，就得到

$$\ln(-1)=i(\pi+2n\pi),\quad n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots。$$

此时，就可以看到 ln(−1) 是多值的。

8.4 “不考虑它们的收敛”——交错级数的悖论

我们在5.10.1小节中知道，快速计算调和级数要和e打交道。那么，其他级数呢？

在这里，我们研究交错级数 $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}a_i$ 中的

$$1-1/2+1/3-1/4+1/5-1/6+1/7-1/8+\cdots=? \qquad (8\text{-}4)$$

正确答案不难找到：结果是 $\ln 2\approx 0.693\ 147\cdots$。

看，e又“莫名其妙”地出现了！但是，这个ln2却来之不易。

把 $1-1/2+1/3-1/4+1/5-1/6+1/7-1/8+\cdots=\ln 2$ 两边乘以1/2，就得到

$$1/2-1/4+1/6-1/8+1/10-1/12+1/14-1/16+-\cdots=(\ln 2)/2。 \qquad (8\text{-}5)$$

现在，把 $1-1/2+1/3-1/4+1/5-1/6+1/7-1/8+-\cdots=\ln 2$ 和（8-5）两边分别相加，就得到

$$1/1+1/3-1/2+1/5+1/7-1/4+1/9+1/11-1/6+\cdots=3(\ln 2)/2。 \qquad (8\text{-}6)$$

这时，可以看到（8-6）的左边和（8-4）的左边完全一样，只不过排列顺序不同而已。然而，（8-6）的值却是（8-4）的值的3/2倍。这样，我们就“证明”了 $3(\ln 2)/2=\ln 2$，即 $3/2=1$。

柯朗

怎么会有 $3/2=1$ 的结果呢？显然，这又是一个悖论——“无穷和悖论”。

对此，美籍德国数学家、教育家柯朗在他的微积分学论文中写道：“很容易想象出，这种明显的悖论的发现对18世纪的数学家带来什么样的影响，他们习惯于运算无穷级数而不考虑它们的收敛。”

出现这种悖论现象的原因是：级数 $1-1/2+1/3-1/4+\cdots$ 之所以收敛，只是因为它的项有交错变化的正负号，因此可以部分地相互“补偿”。但是如果我们取这些项的绝对值的时候，将会得到发散的调和级数。

这是两类收敛级数之间的一个主要区别：收敛过程与各项的正负号无关的级数——绝对收敛级数，以及其收敛仅仅是因为各项的正负号交错变化的级数——条件收敛级数。

正是前一类级数代表了收敛的较强类型，因为在这里之所以发生收敛，是因为它的项自身可足够快地逼近零。

微积分学已经证明，如果级数 $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}a_i$ 满足条件 $a_n \geqslant a_{n+1}$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$；那么这个级数收敛。这就是著名的莱布尼茨判别法。

只有在绝对收敛级数中，各项的任意重排才不影响它的和。这就是著名的狄利克雷定理——不同于 5.6.3 小节的 2. 提到的那个狄利克雷定理。

8.5　“千条江河归大海”——$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\cdots\right)^x=\mathrm{e}$

对于 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$，我们已经非常熟悉。但是，它收敛得很慢。那么，有没有类似形式的、收敛得更快的式子呢？

有的。可以证明，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{\theta}{x^2}\right)^x=\mathrm{e}$（其中 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}$，$k$ 是自然数）就是其中的一个。由 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}$ 可知，$0\leqslant\theta<\frac{1}{2}$。

这样，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 就推广为 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{\theta}{x^2}\right)^x=\mathrm{e}$。以下是它的一些应用实例。

（1）可用于较快速计算 e 值。当 $F(x)$ 在 $0<\theta\leqslant\frac{1}{2}$ 时，比 $\theta=0$

时收敛得更快。例如，在$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$中，当$n=100$时，$\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}\approx 2.7$。而在$\left(1+\frac{1}{n}+\frac{\theta}{n^2}\right)^n$中，只需当$n=7$时，取$k=50$，可得$\theta=0.49$，就有$\left(1+\frac{1}{7}+\frac{0.49}{7^2}\right)^7\approx 2.7$。

（2）求解某些极限问题。以下举两个实例。

第一个：求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{3x}\right)^{5x}$。

解

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{3x}\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^2}\right)^x\right]^5$$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^2}\right)^x\right]^5=e^5,$$

此时$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{\theta}{x^2}\right)^x=e$中的$\theta=\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$。

第二个：求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{0.25}{x^2}\right)^{x+99}$。

解

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{0.25}{x^2}\right)^{x+99}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{0.25}{x^2}\right)^x$$

$$\times\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{0.25}{x^2}\right)^{99}=e\times 1=e,$$

此时$\theta=0.25<\frac{1}{2}$。

对$F(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{\theta}{x^2}\right)^x=e$，还可以继续推广（和应用）。例如，当$x=n$是自然数时，用类似前面的证明过程，显然可以得到一系列结果：

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{\theta}{x^2}+\frac{\alpha}{x^3}\right)^x=e,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{\theta}{x^2}+\frac{\alpha}{x^3}+\frac{\beta}{x^4}\right)^x=e,$$

……

如果把这一系列式子中的 θ，α，β，…分别用 θ_1，θ_2，θ_3，…代替，就有通式

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{\theta_1}{x^2}+\frac{\theta_2}{x^3}+\frac{\theta_3}{x^4}+\cdots+\frac{\theta_n}{x^{n+1}}\right)^x=\mathrm{e},$$

其中 θ_i 是实数，$i=1$，2，…，n。

而更一般地，如取

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{x^k}\quad(n\text{ 是自然数，}a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\text{ 是任意个实数}),$$

就有

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{x^k}\right)^x=\mathrm{e}^{a_1}。$$

这就是“千条江河归大海”——“大海”就是这一系列结果的“通式”：

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{\theta}{x^2}+\frac{\alpha}{x^3}+\frac{\beta}{x^4}+\cdots+\frac{\lambda}{x^n}\right)^x=\mathrm{e}$$

或

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{\theta_1}{x^2}+\frac{\theta_2}{x^3}+\frac{\theta_3}{x^4}+\cdots+\frac{\theta_n}{x^{n+1}}\right)^x=\mathrm{e}。$$

8.6　大显神通靠“自然”——巧用欧拉公式解题

由欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$ 容易得到

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}=\cos x-\mathrm{i}\sin x,$$

$$\sin x=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}},\tag{8-7}$$

$$\cos x=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2},\tag{8-8}$$

$$\tan x=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{\mathrm{i}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})},$$

$$\cot x=\frac{\mathrm{i}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})}{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})},$$

其中的（8-7）和（8-8）也叫欧拉公式。

这5个式子都可用来巧妙解题——例如用（8-8）来求 $\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}$的值。

解

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=(e^{i\pi/7}+e^{-i\pi/7}+e^{3i\pi/7}+e^{-3i\pi/7}+e^{5i\pi/7}+e^{-5i\pi/7})/2 \quad [\text{用到}(8\text{-}8)]\\
&=e^{-5i\pi/7}(1-e^{12i\pi/7})/[2(1-e^{2i\pi/7})] \quad (\text{用等差数列求和公式})\\
&=(1-e^{12i\pi/7})/[2(e^{5i\pi/7}-e^{i\pi})] \quad (\text{用到 } e^{i\pi}=-1)\\
&=(1-e^{i\pi}e^{5i\pi/7})/[2(e^{5i\pi/7}+1)] \quad (\text{用到 } e^{i\pi}=-1)\\
&=\frac{1}{2} \quad (\text{用到 } e^{i\pi}=-1)。
\end{aligned}$$

8.7 “极限点”与数学竞赛——e在几何中现身

有这样一道数学竞赛题：如图8-2所示，平面上一点 A_1 的坐标是 $(1/2,\sqrt{3}/2)$，动点 M 从原点 O 出发，沿与 x 轴的夹角是60°的 OA_1 方向前进，到达 A_1 后，按顺时针方向转60°，前进距离为 $|OA_1|$ 的一半，而到达 A_2 点。然后再按顺时针方向转60°，前进距离为 $|A_1A_2|$ 的一半，而到达 A_3 点……如此无限继续下去。试确定动点 M 的极限位置。

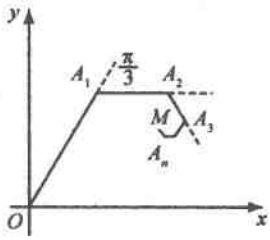


图8-2

把直角坐标平面看成复平面，并设各点 O，A_1，A_2，…，A_n，…对应的复数依次为 z_0，z_1，z_2，…，z_n，…。

由于 $|A_nA_{n+1}|=\frac{|A_{n-1}A_n|}{2}$，而且 $\overrightarrow{A_nA_{n+1}}$ 为 $\overrightarrow{A_nA_{n-1}}$ 顺时针转动了 $\pi/3$ 角的位置，所以有

$$z_{n+1}-z_n=\frac{1}{2}e^{-\frac{i\pi}{3}}(z_n-z_{n-1}) \quad (n=1,2,3,\cdots)。$$

设 $q=\frac{1}{2}e^{-\frac{i\pi}{3}}$，就有 $z_{n+1}-z_n=q\ (z_n-z_{n-1})$。于是

$$z_1-z_0=z_1-z_0,$$
$$z_2-z_1=q(z_1-z_0),$$
$$z_3-z_2=q(z_2-z_1)=q^2(z_1-z_0),$$
$$\cdots\cdots$$
$$z_n-z_{n-1}=q(z_{n-1}-z_{n-2})=q^{n-1}(z_1-z_0)。$$

把以上各式相加并考虑到 $z_0=0$，就得到

$$z_n=z_1(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1})。$$

由于 $\angle A_1OX=\pi/3$，$|OA_1|=1$，所以 $z_1=e^{\frac{i\pi}{3}}$。又知道 $|q|=\left|\frac{1}{2}e^{-\frac{i\pi}{3}}\right|=\frac{1}{2}<1$，应用等比数列求和公式，就得到 M 点对应的复数 $z=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\frac{z_1}{1-q}=\frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{1-\frac{1}{2}e^{-\frac{i\pi}{3}}}$。

因为

$$\left(1-\frac{1}{2}e^{-\frac{i\pi}{3}}\right)\overline{\left(1-\frac{1}{2}e^{-\frac{i\pi}{3}}\right)}=\left(1-\frac{1}{2}e^{-\frac{i\pi}{3}}\right)\left(1-\frac{1}{2}e^{\frac{i\pi}{3}}\right)=\frac{3}{4},$$

$$e^{\frac{i\pi}{3}}\overline{\left(1-\frac{1}{2}e^{-\frac{i\pi}{3}}\right)}=e^{\frac{i\pi}{3}}\left(1-\frac{1}{2}e^{\frac{i\pi}{3}}\right)=\frac{3}{4}+\frac{i\sqrt{3}}{4},$$

所以 $z=1+\frac{i\sqrt{3}}{3}$。这就是所求动点 M 的极限位置。

8.8　不平等的拔河赛——你也能以少胜多

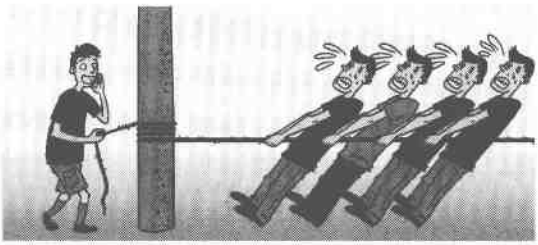
一般的拔河比赛都是“兵对兵，将对将”——人数总是相等的。然而，你却能口出“狂言”：“随便你们来多少人，我都能百战百胜！”

“是吗？”你的伙伴肯定不服。

“请把一根粗绳在固定得很稳的水泥电杆上绕几圈……”你对不服气的几个伙伴们说，“当然，你们人多，要把我拉动才能算赢，否则

算输。”

伙伴们绕好以后，攥着粗绳的一头，要和你一决雌雄。只见你不慌不忙地攥紧粗绳的另一头。



“伙伴们，加油啊！”

在“预备……开始！”的口令之后，伙伴们使尽全身力气，要把你的“狂言”变得鸦雀无声。

然而，无论伙伴们如何狠拉硬扯，你就是“岿然不动”。

当然，你知道取胜的原因——就像6.1.1小节说的“大力士”拉船那样。不过，要能“稳操胜券”，就应根据电杆表面的粗糙程度和对方人数多少决定绕绳的圈数——越光滑、人数越多，就越要多绕几圈。

对于e，还有比这个拔河比赛更有趣的轻松调侃：2010年5月26日，一位“网友”在网上说：“谁能帮我算出2.718 28的负3 676.013次方是多少，我就嫁给他……”

8.9 从ω与e的关系说起——万数回归“大自然”

这里的$\omega=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$，是指三次方程的原根。

1732年，欧拉成功地用ω和ω^2解出了样子像$x^3+mx=n$（m和n都大于0）的全部根的一般形式。这种方程，意大利数学家卡尔丹也研究过。

1770年，拉格朗日为了研究方程，引入了“预解式”，其中同样利

用了 ω。

……

属于方程代数解的 ω，主要用于方程的代数解的研究。

我们知道，ω 有许多有趣的性质。

例如，ω 和 ω^2 互为共轭复数，而且是 $x^2+x+1=0$ 的两个根。

又如，ω 是 1 的三次原根。换句话说，ω 是 1 的一个三次方根（即 $\omega^3=1$）。同时，1 的其余两个三次方根，都可以由 ω 自乘得到（即 ω^2 和 $\omega^3=1$）。

再如，当 n 是整数的时候，ω 的乘幂有趣味的规律：$\omega^{3n}=1$，$\omega^{3n+1}=\omega$，$\omega^{3n+2}=\omega^2$。

还有一个例子是，1，ω，ω^2 在复平面内组成正三角形而且关于 X 轴对称。这个正三角形的外接圆是以原点为圆心，以 1 为半径的圆。

……

更有趣的是，ω 这个虚数要和“自然”结伴为友：

$$\omega=\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}=\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}。$$

在这里，ω 的确和 e——自然对数的底结伴为友。

当然，不仅 ω 这个虚数可以和“自然”结伴为友，而且除 0 以外的所有复数，都可以和“自然”“结伴为友”。

果真如此吗？是的。

我们知道，除了 0 以外的任何复数 $a+b\mathrm{i}$，都可以表示成样子像 $r(\cos x+\mathrm{i}\sin x)$（式中 $r=\sqrt{a^2+b^2}$，$\cos x=\frac{a}{r}$，$\sin x=\frac{b}{r}$）的、具有确定辐角的三角函数式；而根据 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$，复数的三角函数式都可以化为以 e 为底的、和“自然”“结伴为友”的指数式。例如，

$$\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{6}}。$$

又如，$-1=-1+\mathrm{i}\times 0$ 这个虚部为 0 的复数，就可以化成 $\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi$。我们熟知，它就是著名的 $-1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ 或 $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi}=1$。

不过，能把诸如$\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$，$\sqrt{3}+i$，-1，1 这些复数分别表示成$e^{\frac{2i\pi}{3}}$，$e^{\frac{i\pi}{6}}$，$e^{i\pi}$，$e^{2i\pi}$这些复数的指数式，倒不值得大惊小怪，因为复数都可以表示成指数式——复数的极坐标式。

但是，我们注意到在像$e^{\frac{2i\pi}{3}}$，$e^{\frac{i\pi}{6}}$，$e^{i\pi}$，$e^{2i\pi}$这些比较特殊的复数的指数式中，都可以看到 e，π。也就是说，复数总是和两个最著名的超越数结伴同行，这不能不说是“数”（指复数）、“大自然”（指 e）和“圆”（指 π）之间最优美的联系的华章。于是，我们也可以说，万数回归在圆球形的“大自然”之中。

第9章　何当痛饮黄龙府
——等你揭开e的谜团

自然界不会一下子披露她所有的秘密。

——古罗马哲学家塞涅卡

9.1　移植布劳威尔的难题——e是正规数吗

荷兰数学家、近代直觉主义的创立者布劳威尔，为了逻辑上和哲学上的目的，提出了一个困难的问题："在π的十进位展开式中，是否有1 000个相继的数字全为0?"如果π是正态数，那么1 000个0的数字块绝不只出现一次而是无限多次，而且其出现的平均频率为$1/10^{1\,000}$。

同样，我们也要提出类似的问题："在e的十进位展开式中，是否有1 000个相继的数字全为0?"如果e是正态数，那么1 000个0的数字块绝不只出现一次而是无限多次，而且其出现的平均频率为$1/10^{1\,000}$。

布劳威尔

回答布劳威尔和我们的问题绝非探囊取物，而回答π，e是不是正态数的问题恐怕会更会"难于上青天"。至今，这些问题仍然是悬案。

这正如伊夫斯在他于1971年出版的《重访数学界》一书中所说："这当然不是电脑能解决的问题……目前很多人认为电脑无所不能。这类问题的存在，或许能点醒他们。"不过，数学家们笃信π，e，$\sqrt{2}$和欧拉常数γ等，都是正态数，还用电子计算机把它们算出许多位。例如，

美国哥伦比亚大学的达特卡（J. Dutka），在1971年花去47.5小时，算出了$\sqrt{2}$的1 000 082位值，它被打印在200页的纸上。又如，比尔（W. A. Beyer）和华特曼（M. S. Waterman），在1974年把欧拉常数γ算到小数点后7 000多位。而日本的金田康正则在1996年把e算到小数点后515 396位。

这种研究的价值之一在于，正态性能够成为科学计算的伪随机数发生器的基础。虽然这种研究至今仍长路漫漫，但人们相信，π和e的研究会揭示出解决正规性问题的新方法。

9.2 “简单”的难题——π，e“家族”“无理”“超越”吗

我们知道，π和e都是无理数。然而，我们至今仍不知道$\pi+e$，$e\pi$，π/e，e^e，π^e是不是无理数或超越数。

可能有人会说，既然π和e都是无理数，那两个无理数相加（$\pi+e$），或者两个无理数相除（π/e），不就是无理数么！

不能这么说。我们只要看以下反例就知道了。

我们知道$\sqrt{2}$和（$2-\sqrt{2}$）都是无理数，但$\sqrt{2}+(2-\sqrt{2})=2$却不是无理数。$\sqrt{2}$和$\sqrt{2}$都是无理数，但$\sqrt{2}\div\sqrt{2}=1$却不是无理数。

事实上，几个无理数经过数学运算之后，有可能是无理数，也有可能不是无理数。例如lg2和lg5都是无理数，但$\lg2+\lg5=1$却不是无理数。又如$\sqrt{2}$和$2\sqrt{2}$都是无理数，但$\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=4$却不是无理数。

对几个超越数经过某些数学运算之后是不是超越数的问题，也可如上进行讨论。

在探索几个无理数（或超越数）经过数学运算之后是不是无理数（或超越数）的问题上，数学家们真是绞尽脑汁，煞费苦心。

1900年，在巴黎召开的第二次国际数学家大会上，德国数学家希

尔伯特提出了著名的 23 个问题。其中第 7 个问题就是某些数的无理性和超越性问题：如果 α 是不等于 0 和 1 的代数数，β 是无理代数数，那么 α^{β} 是不是超越数？例如 $2^{\sqrt{2}}$ 是不是超越数？

1929 年，俄国－苏联数学家盖尔丰德和德国数学家西格尔各自独立证明了：如果 α 是不等于 0 和 1 的代数数，β 是二次复代数数，那么 α^{β} 是超越数。而特例为 $e^{\pi}=(-1)^{-i}$ 即 $e^{\pi}=i^{-2i}$ 是超越数。

希尔伯特

罗斯

1930 年，俄国－苏联数学家库兹明把上述结果推广到 β 是二次实代数数的范围，特例为 $2^{\sqrt{2}}$ 是超越数。

1934 年，盖尔丰德和西格尔的学生、德国数学家施奈德用不同方法分别对希尔伯特第 7 问题的后半部分作了肯定的证明，这被称为盖尔丰德－施奈德定理。

1955 年，出生在德国布雷劳斯（今波兰西南部城市弗罗茨瓦夫）的英国数学家罗斯，发表了《对于代数数的有理逼近》，彻底解决了用有理数逼近无理数的问题，把创立了 30 多年的这一理论发展为罗斯定理或瑟厄－西格尔－罗斯定理。罗斯也因此和其他成就荣获 1958 年菲尔兹奖。这里提到的瑟厄，又译图埃，是 19～20 世纪的挪威数学家。

图埃

我们在7.1节中提到了刘维尔数。1953年，我们提到过的马赫勒尔证明了π不是刘维尔数，即π不是刘维尔数类型的超越数，而是另一种类型的超越数。

一个无理数β是刘维尔数，如果对于任意一个n，都存在整数p和q，使得

$$0 < \left|\beta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}。$$

刘维尔指出，这些β都是超越数。事实上，当q充分大时，

$$\left|\pi - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{14.65}}。$$

归功于出生在苏联的美国数学家达维德·伏尔佛维奇·丘德诺夫斯基，和他的弟弟格雷戈里·伏尔佛维奇·丘德诺夫斯基的这个估计，可能不是最好的。如果把14.65换为$2+\varepsilon$（ε是大于0的任意数），则更合理。几乎所有的超越数都满足这样的不等式。

贝克

从1966年起，英国数学家贝克得到了比盖尔丰德更一般的结果：如果α_1，α_2，…，α_n是非0或非1的代数数；β_0，β_1，β_2，…，β_n是线性独立的代数无理数，则$e^{\beta_0}\times\alpha_1^{\beta_1}\times\alpha_2^{\beta_2}\times\cdots\times\alpha_n^{\beta_n}$是超越数。这个一般结果的一个推论是，证明了$\pi+\ln a$形式的数是超越数，例如$\pi+\ln 2+\sqrt{2}\ln 3$是超越数。他因此和其他解析数论的成果荣获1970年菲尔兹奖。而他仅128页的《超越数论》，被人们认为能与高斯的《算术研究》媲美的数学书。

由上可见，对无理数和超越数的研究取得了许多成果。

然而，使数学家们头疼的是，贝克的成果虽然具有一定的普遍性，而且超越数的其他研究也硕果累累，但对许多问题依然是一头雾水——至今没有一个一般的方法来判别某个数是不是超越数。

例如，前面提到的π和e“家族”中的$\pi+e$，$e\pi$，π/e，e^e，π^e

的无理性和超越性，至今也不能证明。

又如，至今不知道欧拉常数 $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right)$，$\ln\pi$，$\pi^{\pi}$是不是无理数或超越数。

再如，有时要看似超越数的数却不是超越数——就像 $e^{i\pi} = -1$ 那样。

“虽大禹之智，不能测其深浅”——看来，对无理数和超越数，缺乏“大禹之智”的我们，确实知之甚少。

9.3　“亲兄弟”为何分离
——黎曼函数 ζ 中为何有 π 无 e

假设 s 是形如 $a+bi$ 的复数，那么样子像

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots \tag{9-1}$$

的函数，就叫黎曼函数 ζ。它是狄利克雷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{n^z}$（其中 a_n 和 z 都是复数）的特殊情况。

黎曼函数 ζ，是由他在“论小于给定数的素数个数”中发表的（见 5.6.2 小节的 2.）。这篇仅 8 页的论文，不但为证明素数定理“开山辟路”，而且深远地影响着数学的许多分支。

那么，黎曼为什么要提出（9-1）呢？

原来，欧拉在 1744 年一篇著作中发表了他在 1737 年推出的著名恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \prod_{p}\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \quad (p\text{ 是素数},s\text{ 是大于 1 的实数})。\tag{9-2}$$

显然，（9-2）的左边就是当 s 推广到复数范围的（9-1）。

欧拉曾用（9-2）证明了所有素数的倒数之和是发散的。由于（9-2）建立了函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ 的性态与素数性质之间的一种关系，因

而引起了数学家们的普遍注意。

100 多年以后，黎曼敏锐地认识到，如果把（9-2）中的实数 s 改成复数 s，就有可能更深入地揭示素数分布的奥秘，于是（9-1）应运而生。

就是在《论小于给定数的素数的个数》中，黎曼还提出了 6 个相关的猜想。其中 5 个已先后被后来的数学家们陆续证明，但至今仍有 1 个猜想的证明仍遥遥无期：（9-1）$\zeta(s)$ 位于［0，1］的全部零点，都落在复平面的一条直线 $a=1/2$ 上。不要忘记，这里的 a，就是前面提到的“$a+bi$”中的 a。这个猜想，后来成为著名的希尔伯特 23 个问题中的第 8 个问题。

当然，在黎曼提出（9-1）之前，对（9-1）的一些特例已经有了阶段性的成果。

例如，当（9-1）中的 $s=1$ 的时候，就得到著名的调和级数 $\zeta(1)=1+1/2+1/3+\cdots$。这里的形容词“调和”，来自这个级数的“成员”和音阶间隔之间的“和谐关系”。而这个级数的发散性，早在人类认识极限概念之前约 400 年，就被法国数学家奥雷斯姆证明了。

奥雷斯姆的证明并不难懂。因为

$$
\begin{aligned}
&1+1/2+1/3+1/4+1/5+1/6+1/7+1/8+\cdots\\
=&1+1/2+(1/3+1/4)+(1/5+1/6+1/7+1/8)+\cdots\\
>&1+1/2+(1/4+1/4)+(1/8+1/8+1/8+1/8)+\cdots\\
=&1+1/2+1/2+\cdots。
\end{aligned}
$$

而我们知道，后面的 1/2 还有无穷多个，所以 $\zeta(1)$ 是发散的，即 $\zeta(1)\to\infty$。

又如，当（9-1）中的 $s=2$ 的时候，就得到著名的级数 $\zeta(2)=1+1/2^2+1/3^2+\cdots$ 而它却不是发散而是收敛的。雅格布·伯努利在 1698 年的一篇论文中，首先证明了这一结论。所以，这个级数被称为伯努利级数。他的这篇论文，被收集在《猜度术》中。

那么 $\zeta(2)$ 收敛于哪个值呢？伯努利没能回答。1734 年，欧拉算出

了 $\zeta(2)\approx 1.644\,934$ 的近似结果。并发现了 $\zeta(2)$ 收敛于 $\pi^2/6$ 的优美结果，并在《无穷分析引论》中严格地证明了 $1+1/2^2+1/3^2+\cdots=\pi^2/6$。这里 1734 这个年代，有 1736 和 1737 等多种说法。

看这里，π 意料地出现在仅仅涉及自然数的级数极限之中，所以这个级数到今天还被看成是数学分析中最漂亮的结果之一。

那么，当 $s=3$，4，5，6，…的时候呢？

研究的结果非常有趣。当 $\zeta(s)$ 中的 s 为偶数时，都有简洁的公式 $1+1/2^2+1/3^2+\cdots=\pi^2/6$，$1+1/2^4+1/3^4+\cdots=\pi^4/90$，…；而且都和 π 有关，和 e 无关。但当 s 为奇数时的 $1+1/2^3+1/3^3+\cdots$，$1+1/2^5+1/3^5+\cdots$，…，却没有类似简洁的结果；而且，都和 π 或 e 无关。

事实上，在 1977 年，法国数学家罗杰·阿佩里就证明了（1978 年 6 月公开）$\zeta(3)=1+1/2^3+1/3^3+\cdots$是一个无理数（所以 $\zeta(3)$ 被称为“阿佩里常数”），它收敛于1.202 056…。这个当时轰动数学界的结果表明，$\zeta(3)$ 的确与 π，e 无关。但数学家们仍对它兴趣盎然——2010 年 9 月，亚历山大·伊把它算到了小数点后 100 000 001 000 位。

还有一个有趣的结果是，当 $s=1$ 时，$\zeta(s)$ 才是发散的；而当 $s>1$ 时，$\zeta(s)$ 都是收敛的。利用 $\zeta(1)$ 的发散性，雅格布·伯努利指出了一条双曲线和它的渐近线之间的面积是无穷大（图 9-1）。

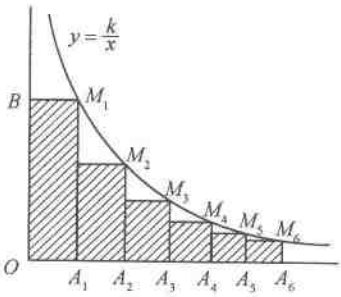


图 9-1

这是一个谜：为什么 $\zeta(s)$ 中的 s 为偶数的时候，必然与 π 有关；而 s 为任何数的时候，都和 e 无关？

看来，π 和 e 这对“亲兄弟”确实是“分道扬镳”了。

不过，$\zeta(s)$ 并没有和 e 彻底“绝缘”。数学家们在寻求

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)=O(|t|^{\alpha})$$

成立的最小 α 这个重要问题的过程中猜想，如果黎曼猜想成立，则容易

推出对任给的 $\varepsilon>0$，就有

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)=O(|t|^{\varepsilon}),$$

这就是著名的林德洛夫猜想——其中有 e。

这里提到的林德洛夫是一位芬兰数学家。

9.4 神秘的“近似”——e 为何屡屡现身

我们在许多近似计算公式中，都可以看到 e“神秘”地现身。

例如，5.6.2 小节的素数定理，5.10.2 小节的欧拉常数，5.11.2 小节的分拆公式……

现在我们要问，究竟有哪些还没有发现的近似计算公式中还有 e（有的还有 π），e 在近似计算公式中出现有没有规律，又可不可以预测？

9.5 弟弟为何不像哥哥——e 有“$\sqrt{\quad}$”表达式吗

有人认为，π 这个无理数不是根式表达的数，e 也不是根式表达的无理数。那么，这种说法对吗？

1579 年，韦达在他的《数学定律，应用于三角形》一书中，得到了 π 的第一个用根式表达的无穷乘积式——韦达式：

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\times\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\times\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\times\cdots$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\times\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\times\cdots。$$

此外，日本数学家渡边一死后，日本在 1853 年编的《当用算法》一书中有一个类似韦达式的式子：

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}}_{n+2\text{个}2}\times 2^{n}。$$

此外，我们在 5.2 节中还提到拉马努金发现的 e，π 关系的一个式子。

从上面三个式子可以看出，“π 这个无理数不是根式表达的数”这种说法并不正确。

那么，“e 也不是根式表达的无理数”这种说法又正不正确呢？

由于我们至今没有找到 e 的根式表达式——除了拉马努金发现的这个以外，所以无法判断。

现在的问题是，e 有没有根式表达式？如果有，是什么样子，为什么至今没有发现？如果没有，又是为什么？

9.6　寻找“准确”——π，e 间有简洁的实数关系吗

我们在 5.2 节中提到了“公式” $\pi^4+\pi^5\approx e^6$ 和拉马努金的两个 π 和 e 之间关系的式，以及本书中提到的其他 π 和 e 之间的关系式。现在要问：π 和 e 有没有类似 $\pi^4+\pi^5\approx e^6$ 这种只包含实数的、简洁的关系式？

有的。

$2\ln2+2\ln3+\ln\pi\approx5$（或 $2\ln6+\ln\pi\approx5$）就是其中一个。

但是，人们并不止步于此，还想找到不是“近似”而是“准确”表达 π，e 间简洁的实数关系式。

那么，有这样的式子吗？

9.7　“怪”还是“不怪”——对数先于指数

9.7.1　“不合逻辑”的发明

1. 现实需求催生对数

人类追求提高计算速度的努力，从来就没有停止过。特别是十五六

世纪文艺复兴时期，航海技术有很大改善，商业规模日趋增大，天文学及测量方面的研究工作也处于繁荣阶段。随之而来的是一门新职业的诞生："计算师"或"计算工匠"登场。他们的工作很多，一天忙忙碌碌，可是却没有想如何改善计算方法或计算技术。

但数学家们却在与时俱进，科学的车轮也继续滚滚向前。

穆勒

1464～1467年，德国天文学家、数学家穆勒出于天文计算的需要，造出了有5位数字的正切表。1471年，他又造出了有8位数字的正弦表。接着，余弦表也出现了。穆勒全名约翰内斯·穆勒·冯·哥尼斯堡，又名约翰内斯·穆勒。他的笔名雷格蒙塔努斯，由哥尼斯堡一词拉丁化而来。由于他的出生地是德国东普鲁士哥尼斯堡（今俄罗斯加里宁格勒）附近的安费德，而哥尼斯堡的德语意思是"国王之山"，所以他的名字原译玉山若干。穆勒是15世纪欧洲最重要的三角学者之一，在他与他之前的阿拉伯数学家纳速·拉丁的工作，使三角学脱离天文学而成了一门数学的分支学科。

我们在1.4.1小节中提到的沃纳，就曾尝试用他的那些公式来化乘为加。

17世纪初，开普勒计算了行星的轨道。伽利略发明了望远镜后，十分热衷星系的研究。这就有必要处理过去一般人很少涉足的大数。

庞大数字的乘、除，乘方、开方等运算十分繁难，不少人把大量宝贵的时间和精力都花在这里面。怎样才能简化计算的手续，把科学家从繁难的运算中解放出来呢？这成了当时一个迫切需要解决的问题。

由于这种客观需要的推动，纳皮尔、比尔吉等走在了前面，他们各自独立发明了对数。

2. "不合逻辑"的发明

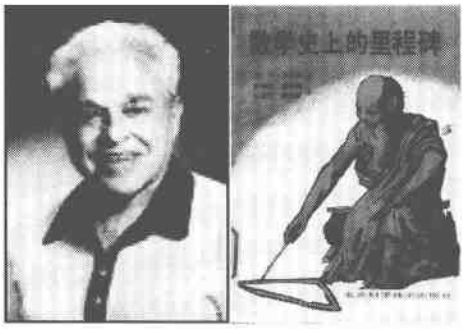
奇怪的是，当时欧洲的代数学还十分落后，连"指数"、"底数"

这些概念都还没有建立，所以，无论是纳皮尔还是比尔吉，都没有“底”的概念。显然，他们都不是从 $a^x = N$ 这个关系出发来创立对数的。事实上，纳皮尔是从几何的运动角度，比尔吉是从代数的级数对应角度各自创立对数的。

可以看出，对数的发明与概念的逻辑推演顺序相反。

对数的诞生，竟比指数、底数出现还早，显然“不合逻辑”，这不能不说是数学史上的一大奇迹、珍闻和怪事。

怪不得伊夫斯在《数学史上的里程碑》中说：“对数的发现早于指数的应用这个事实，是数学史上的反常现象之一。”



伊夫斯和他的《数学史上的里程碑》中译本封面

“对数的发明就像是一个晴天霹雳来到世界上。”也怪不得英国的罗德·麦尔顿男爵有感于此，就在《纳皮尔300年纪念文集》序言的第3页中说，“前人的任何工作都没能导致这项发明，没有任何东西预见到它或预示它的到达。这项发明是孤立的，它没有借助其他智力工作，也没有遵循原有的数学思想路线，就突然闯到人类思想中来了。”

到了18世纪，欧拉才最早用乘方的逆运算来定义对数，并指出“对数源于指数”。这个见解，很快被人们接受。现在，大都按“先指数”，“后对数”的顺序学习。

9.7.2　“逻辑怪胎”的启示

其实，像对数那样“不合逻辑”的，还有概率论中的数学期望这

个概念。

在现代概率论中，概率是基本概念，数学期望是第二级概念。然而，在数学史上，顺序却正好相反——先有“期望”概念，而古典概率的定义则完全可以从“期望”中推导出来。事实正是如此，惠更斯在1657年的论文“论赌博中的计算”里，首先提出了数学期望这一概念——古典概率论才由此诞生。

那么，我们从“对数比指数、底数还早”的“奇迹”和“怪事”中，能得到什么启示呢？

“人不是只有一个中心的圆，而是有两个焦点的椭圆，一个是事实，一个是理念。”从“对数先于指数”的事实和这个事实不符合“对数源于指数”的理念来看，法国作家雨果在《悲惨世界》一书中的这句话，是何等精辟！由此，我们要注意“逻辑有时会生出怪胎”。这是第一个启示——提醒我们必须“用事实说话”而不能囿于理念。

费马从方程出发研究它的轨迹，发明了解析几何；笛卡儿从轨迹出发研究它的方程，也独立发明了解析几何。从指数可以导出对数，用纳皮尔、比尔吉那样途径也得到对数。这些事实（虽然解析几何并不是“逻辑怪胎”）给我们第二个启示：有时通向真理的道路不止一条，甚至“条条大路通罗马”——提醒我们解决问题时不妨从多角度和多途径思考。

第三个重要启示是：科学发现或技术发明，有时应抛弃“循规蹈矩”的“先后次序”，才能有所作为。形形色色的“逆向思维”就是其中的名例之一——英国物理学家法拉第把“电生磁”被“逆”成了“磁生电”之后，才有了今天取之不尽的强大电能；“向下压”的破冰船被“逆”成了“向上顶”的潜水破冰船之后，更加高效节能。

“男儿何不带吴钩，收取关山五十州。”这是英年早逝的唐朝诗人李贺的《南园》诗中的句子。数学史上的许多“奇迹”和“怪事”，等待着读者你吟诵着李贺的诗句去揭秘。

参考文献

巴罗 . 2000. 不论——科学的极限与极限的科学 . 李新洲等译 . 上海：上海科学技术出版社

别莱利曼 . 1979. 趣味物理学续编 . 第二版 . 滕砥平译 . 北京：中国青年出版社

别莱利曼 . 1980. 趣味代数学 . 第三版 . 丁寿田等译 . 北京：中国青年出版社

陈仁政 . 1989. “组数”问题漫谈 . 中小学数学，(11)：32

陈仁政 . 1990. 漫谈两个著名超越数 . 数学通报，(1)：44

陈仁政 . 1991a. 一种力“放大器”的分析 . 物理通报，(2)：28

陈仁政 . 1991b. 说不尽的 π. 中小学数学，(4)：14 和 (5)：15 连载

陈仁政 . 1992. 漫谈对数 . 数学通报，(4) 46

陈仁政 . 1997. 结绳的奥妙 . 科学世界，(12) 24

陈仁政 . 2004. 站在巨人肩上 · 科学趣味故事 . 第二版 . 北京：北京出版社

陈仁政 . 2005a. 好玩的数学 · 说不尽的 π. 北京：科学出版社

陈仁政 . 2005b. 好玩的数学 · 不可思议的 e. 北京：科学出版社

单墫 . 1987. 趣味数论 . 北京：中国青年出版社

德里 . 100 个著名初等数学问题——历史和解 . 1982. 罗保华等译校 . 上海：上海科学技术出版社

邓宗琦 . 1990. 数学家辞典 . 武汉：湖北教育出版社

杜瑞之，王青建，孙宏安，等 . 1991. 简明数学史辞典 . 济南：山东教育出版社

樊恒铎 . 1965. 计算尺的原理与用法 . 第二版 . 上海：上海科学技术出版社

樊映川 . 1964. 高等数学讲义 . 第二版 . 北京：高等教育出版社

盖莫夫 . 1978. 从一到无穷大 . 暴永宁译 . 北京：科学出版社

顾建中 . 1981. 热学教程 . 第二版 . 北京：人民教育出版社

郭奕玲，沈慧君 . 1993. 物理学史 . 北京：清华大学出版社

杭斯伯格 . 1985. 数学中的智巧 . 李忠译 . 北京：北京大学出版社

华东师范大学数学系．1991. 数学分析·上．第二版．北京：高等教育出版社

计惠康，许依群．1980. 怎样证明数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$递增且有上界．数学通报，(4)：22

简明不列颠百科全书编译组．1985. 简明不列颠百科全书·8. 北京：中国大百科全书出版社

康拉德等．1987. 科学发现与发明辞典．周忠德等译．上海：知识出版社

堀场芳数．1997. e的奥秘——从e的发现到电脑程序．丁树深译．北京：科学出版社

李铭心，汪德营．1991. 中学数学中的数学史．海口：南海出版公司

李文汉．1981. 科学的发现（3）——六大数学难题的故事．北京：中国少年儿童出版社

梁灿彬等．1980. 电磁学．北京：人民教育出版社

梁宗巨．1992. 数学历史典故．沈阳：辽宁教育出版社

梅向明．1980. 对数表的造法和数e. 数学通报，(1)：21

宁挺．1985. 说e. 福州：福建教育出版社

钱宝琮等．1964. 中国数学史．北京：科学出版社

让·迪厄多内．1999. 当代数学：为了人类心智的荣耀．沈永欢译．上海：上海教育出版社

日本数学会．1984. 数学百科辞典．科学出版社组织国内学者编译．北京：科学出版社

塞路蒙·波克纳．1992. 数学在科学起源中的作用．李家良译．长沙：湖南教育出版社

史密斯等．1930. 数论尺规作图及周率．郑太朴译．上海：商务印书馆

斯科特．2002. 数学史．侯德润等译．桂林：广西师范大学出版社

宋学义．1980. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$的一个推广．数学通报，(12)：28

王勤国．1980. 三次原根ω的应用．数学通报，(12)：30

王勤国．1982. 数e存在性的又一证明．数学通报，(4)：24

吴文俊．1995. 世界著名数学家传记．北京：科学出版社

吴振奎．2000. 数e. 中等数学，(6)：20

吴振奎 . 2001. Euler 常数 0. 577 215 6…. 中等数学，(1)：25

吴振奎，吴旻 . 2003. 数学的创造 . 上海：上海教育出版社

物理学大辞典编辑组 . 1980. 物理学大辞典 . 香港：中外出版社

夏道行 . 1964. π 和 e. 上海：上海教育出版社

解恩泽等 . 1987. 简明自然科学史手册 . 济南：山东教育出版社

姚启钧原著，华东师范大学《光学》教材编写组改编 . 1981. 光学教程 . 北京：人民教育出版社

伊夫斯 . 1990. 数学史上的里程碑 . 欧阳绛等译 . 北京：科学技术出版社

伊莱·马奥尔 . 2000. 无穷之旅——关于无穷大的文化史 . 王前等译 . 上海：上海教育出版社

尹斌庸等 . 1985. 古今数学趣话 . 成都：四川科学技术出版社

郁祖权 . 2004. 中国古算解题 . 北京：科学出版社

曾晓新 . 1990. 数学的魅力 . 重庆：科学技术文献出版社重庆分社

张景中 . 2004. 从$\sqrt{2}$谈起 . 北京：中国少年儿童出版社

张鸣 . 1996-9-14. 最大素数与超级电脑 . 光明日报

浙江大学普通化学教研组 . 1978. 普通化学 . 北京：人民教育出版社

浙江大学普通化学教研组 . 1981. 普通化学 . 第二版 . 北京：人民教育出版社

中国大百科全书编委会 . 1988. 中国大百科全书·数学 . 北京：中国大百科全书出版社

中国科学院自然科学史研究所 . 1983. 钱宝琮科学史论文选集 . 北京：科学出版社

中国科学院自然科学史研究所近现代科学史研究室 . 1985. 20 世纪科学技术简史 . 北京：科学出版社

中学数学教师手册编写组 . 1985. 中学数学教师手册 . 上海：上海教育出版社

祝梁济 . 1982. 自然对数漫谈 . 数学通报，(2)：19

自然科学大事年表编写组 . 1975. 自然科学大事年表 . 上海：上海人民出版社

郑州大学 *04010712996$*

后　记

为本丛书寻找信息、查抄资料、提供资料、编著书稿、誊写书稿、绘图、审核校对的，还有陈梅、陈雪、陈仕达、郭汉卿、黎渝、陈仁仲、李昌敏、陈立、陈楠、李开贵、梁聪、宋贵清、涂海、王东、杨素君、赵贤菊、席波、李骥、任洁等作者。此外，张景中、李敏、郭书春、宁挺、梁宗巨、张奠宙、查有良、吴振奎、丘和、曾润生、王青建、邹大海、彭定才、潘宁、毛雷尔（原德国驻华大使馆工作人员）等专家、学者和其他人士，对本书的写作、出版、提供资料等工作，分别进行了指教、帮助和支持。在此，对以上和未提到的、也提供帮助的其他人员均表示衷心的感谢。

由于本丛书参考的文献较多，所以许多参考文献未能列出，在此，谨向这些文献的作者表示感谢和歉意。此外，有少量图片的原始作者没有找到，请这些图片的原始作者与我联系。

陈仁政

2011 年 4 月 30 日